Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 22 dicembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Mostrare che le formule

$$a_1 = \frac{\pi}{4}\,, \qquad a_{n+1} := \operatorname{arcsen}\Big(\sqrt[n]{1+\operatorname{sen} a_n} - 1\Big)$$

definiscono a_n per ricorrenza per ogni $n \in \mathbb{N}$, che la successione a_n è compresa fra 0 e $\pi/2$ e debolmente decrescente, e calcolarne il limite, se c'è.

2. Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione in x

$$x^{100} + e^{100} = (x+e)^{100}\,.$$

(Studiare la differenza dei due membri come funzione di x).

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} \operatorname{sen}^2 e^{1/x} & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

ha derivata prima e seconda in $x = 0$, che $f'(0) = f''(0) = 0$ e che f ha in 0 un minimo locale.
(Bisogna ricorrere alla definizione di derivata come limite del rapporto incrementale).

4. Calcolare il seguente integrale, se ha senso:

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{e^x}+1}}\,.$$

(Se si prende come nuova variabile il denominatore ci si riporta a un integrale di funzione razionale).

Punti: 10, 10, 10, 10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 22 dicembre 1997

Svolgimento

1. La formula che definisce a_{n+1} è del tipo ricorsivo $a_{n+1} := f(a_n, n)$, e *non* del tipo iterativo $a_{n+1} = f(a_n)$, perché la n compare anche nell'indice di radice, e non solo come indice di a_n. In altre parole per calcolare a_{n+1} non basta sapere il valore di a_n ma anche di n.

n	a_n
1	0.785398 ...
2	0.785398 ...
3	0.311580 ...
4	0.093362 ...
5	0.0225354 ...
6	0.00446663 ...
7	0.000743054 ...
8	0.000106117 ...
9	0.000013264 ...
10	0.00000147377 ...

Per essere sicuri che la successione sia ben definita bisogna che non càpiti che per un certo a_n le operazioni che producono a_{n+1} non siano definite. Cominciando dall'interno, il seno è definito ovunque, quindi non dà problemi, così come l'addizione o la sottrazione con 1. La radice ennesima invece non è definita per argomenti negativi quando n è pari. Però l'argomento è $1 + \operatorname{sen} a_n$, che è compreso fra 0 e 2 perché il seno di qualsiasi cosa è fra -1 e 1, per cui anche qui non ci sono ostacoli. Infine l'arcoseno è definito solo per argomenti fra -1 e 1. D'altra parte $0 \leq 1+\operatorname{sen} a_n \leq 2$, per cui $0 \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} \leq \sqrt[n]{2} \leq 2$ e quindi $-1 \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1 \leq 1$, come richiesto dall'arcoseno. Riassumendo: la successione è ben definita.
Dimostriamo per induzione che $0 \leq a_n \leq \pi/2$. Per $n = 1$ è ovvio. Supponendo che sia vero per un certo n, avremo che $0 \leq \operatorname{sen} a_n \leq 1$, da cui successivamente $1 \leq 1 + \operatorname{sen} a_n \leq 2$, $1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} \leq \sqrt[n]{2} \leq 2$, $0 \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1 \leq 1$, $\operatorname{arcsen}(\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1) \leq \pi/2$, cioè $0 \leq a_{n+1} \leq \pi/2$, che è quanto volevamo dimostrare.
Per studiare la monotonia, conviene prima fare un'esplorazione numerica, che è riportata nella tabella sopra, e fa pensare che la successione sia (debolmente) decrescente. Vediamo di dimostrarlo formalmente. Conviene prima osservare che dalla disuguaglianza di Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, valida per $x \geq -1$ e n intero ≥ 1 segue, estraendo la radice ennesima di ambo i membri, che

$$1 + x \geq \sqrt[n]{1 + nx} \geq \sqrt[n]{1 + x}\,.$$

Applicando la disuguaglianza con $x = \operatorname{sen} a_n$ si ottiene $\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} \leq 1 + \operatorname{sen} a_n$, da cui $\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1 \leq 1 + \operatorname{sen} a_n - 1 = \operatorname{sen} a_n$ e infine

$$a_{n+1} = \operatorname{arcsen}\Bigl(\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1\Bigr) \leq \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} a_n = a_n\,.$$

Si può anche procedere dimostrando per induzione che $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \pi/2$, senza bisogno di usare la disuguaglianza di Bernoulli, ma soltanto che $\sqrt[n+1]{x} \leq \sqrt[n]{x}$ se $x \geq 1$. Per $n = 1$ è vero:

$$a_2 = \operatorname{arcsen}\Bigl(\sqrt[1]{1 + \operatorname{sen} a_1} - 1\Bigr) = \operatorname{arcsen} 1 + \operatorname{sen} a_n - 1 = \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} a_1 = a_1\,.$$

(Notare che $a_2 = a_1$, come lasciava pensare anche il valore numerico approssimato). Supponendo che sia vero per un certo n si deduce successivamente che:

$$\begin{aligned}
0 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \pi/2 &\Longrightarrow 0 \leq \operatorname{sen} a_{n+1} \leq \operatorname{sen} a_n \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq 1 + \operatorname{sen} a_{n+1} \leq 1 + \operatorname{sen} a_n \leq 2 \Rightarrow \\
&\Longrightarrow 1 = \sqrt[n+1]{1} \leq \sqrt[n+1]{1 + \operatorname{sen} a_{n+1}} \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_{n+1}} \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} \leq \sqrt[n]{2} \leq 2 \Rightarrow \\
&\Longrightarrow 0 \leq \sqrt[n+1]{1 + \operatorname{sen} a_{n+1}} - 1 \leq \sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1 \leq 1 \Rightarrow \\
&\Longrightarrow 0 \leq \operatorname{arcsen}\Bigl(\sqrt[n+1]{1 + \operatorname{sen} a_{n+1}} - 1\Bigr) \leq \operatorname{arcsen}\Bigl(\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1\Bigr) \leq \pi/2 \iff \\
&\iff 0 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Essendo monotona e limitata, la successione a_n ammette limite, e il limite ℓ è compreso fra 0 e $\pi/2$, anzi, fra 0 e $a_1 = \pi/4$. Tuttavia non c'è bisogno in questo caso di sapere a priori che il limite esiste per calcolarlo. Infatti possiamo scrivere

$$0 \leq a_{n+1} = \operatorname{arcsen}\Big(\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1 \Big) \leq \operatorname{arcsen}\big(\sqrt[n]{2} - 1 \big) .$$

Per $n \to +\infty$ l'ultimo membro della disuguaglianza tende ad $\operatorname{arcsen}(1-1) = 0$ poiché $\sqrt[n]{2} = e^{(\ln 2)/n} \to e^0 = 1$ e per la continuità dell'arcoseno. Dunque per il teorema del confronto abbiamo che $a_{n+1} \to 0$. Dovrebbe essere ovvio che anche a_n tende allo stesso limite.
Attenzione! Non cadere nel comunissimo erroraccio di passare al limite soltanto in a_n, lasciando libero n nell'indice di radice, scrivendo qualcosa come

$$\text{no!!} \quad \lim_{n \to +\infty} \operatorname{arcsen}\Big(\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} a_n} - 1 \Big) = \operatorname{arcsen}\Big(\sqrt[n]{1 + \operatorname{sen} \ell} - 1 \Big) \quad \text{no!!}$$

2. Bisogna risolvere l'equazione $x^{100} + e^{100} = (x+e)^{100}$. Ad occhio si vede che $x = 0$ è una soluzione. Ce ne sono altre? Chiamiamo $f(x)$ la differenza dei due membri:

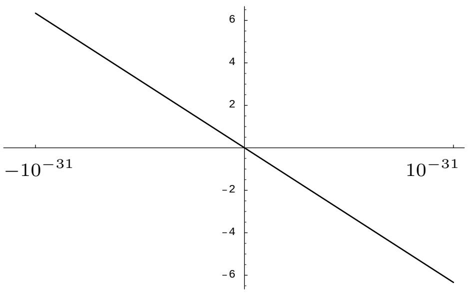
$$f(x) := x^{100} + e^{100} - (x+e)^{100} .$$

Può essere che gli strumenti che conosciamo per "studiare una funzione" bastino per decidere se esistono altre soluzioni dell'equazione ed eventualmente trovarle.
Come abbiamo già notato $f(0) = 0$. La derivata di f è

$$f'(x) = 100x^{99} - 100(x+e)^{99} = 100\big(x^{99} - (x+e)^{99}\big) .$$

Poiché $e > 0$ abbiamo che $x < x + e$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo l'esponente 99 *dispari*, da $x < x + e$ segue che $x^{99} < (x+e)^{99}$ (la funzione $y \mapsto y^{99}$ è strettamente crescente). Quindi

$$f'(x) = 100\big(x^{99} - (x+e)^{99}\big) < 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} .$$



La derivata della f è sempre minore di zero, per cui f è strettamente decrescente. Una funzione strettamente monotona non può annullarsi in più di un punto. Conclusione: $x = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione.
Chi volesse cimentarsi nel disegnare un grafico della funzione f calcolandone il valore per punti deve stare in guardia contro seri problemi di precisione numerica. La derivata in $x = 0$ è $f'(0) = -100e^{99} \sim -10^{45}$, il che vuol dire una pendenza piuttosto ripida del grafico vicino all'origine. Fra l'altro piccolissime variazioni nell'approssimazione decimale di e possono cambiare di molto il risultato. Chi ha accesso ad aritmetica intera esatta ad arbitraria precisione può provare a cambiare equazione sostituendo ad e un numero intero esatto, per esempio 2. Il grafico qui accanto ritrae la funzione $g(x) := x^{100} + 2^{100} - (x+2)^{100}$ nell'intervallo fra 10^{-31} e 10^{31}. Le scale sui due assi sono diverse.

3. Che f abbia un minimo locale per $x = 0$ segue facilmente dalla definizione: $f(x) \geq f(0)$ per ogni x abbastanza vicino a 0. Infatti per $x \neq 0$ si ha

$$f(x) = \underbrace{e^{-1/x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}^2 e^{1/x}}_{\geq 0} \geq 0 = f(0)$$

(il primo fattore è > 0 perché è un esponenziale; il secondo è ≥ 0 perché è un quadrato). La definizione di f passa per una scelta logica (se $x = 0$ o no), che non rientra nella casistica delle regole sulla derivata delle funzioni elementari. Per decidere se la f sia o no derivabile nell'origine dobbiamo ritornare alla definizione di derivata. Il rapporto incrementale di f in 0 è

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-1/x^2}\operatorname{sen}^2 e^{-1/x} - 0}{x-0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x}\cdot \operatorname{sen}^2 e^{1/x}\,.$$

Il limite per $x \to 0$ del fattore $e^{-1/x^2}/x$ si trova colla sostituzione $1/x = y$, qualche manipolazione, e la regola de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{e^{-y^2}}{1/y} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0\,.$$

Il fattore $\operatorname{sen}^2 e^{-1/x}$ non ha limite per $x \to 0$, però è compreso fra 0 e 1. Il prodotto ha quindi limite 0:

$$\left|\frac{e^{-1/x^2}}{x}\cdot \operatorname{sen}^2 e^{1/x}\right| \le \left|\frac{e^{-1/x^2}}{x}\right| \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \to 0\,.$$

Pertanto la derivata prima $f'(0)$ esiste e vale 0:

$$f'(0) := \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0\,.$$

La derivata seconda è definita come la derivata della derivata prima. Nell'origine in particolare abbiamo

$$f''(0) := \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} \quad \text{(se esiste il limite).}$$

Fuori dall'origine la derivata prima si ottiene con le solite regole di derivazione delle funzioni elementari:

$$\text{per } x \neq 0 \qquad f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}\operatorname{sen}^2 e^{1/x} + e^{-1/x^2}\cdot 2\big(\operatorname{sen} e^{1/x}\big)\big(\cos e^{1/x}\big)e^{1/x}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) =$$
$$= \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}\cdot \operatorname{sen}^2 e^{1/x} - \frac{2e^{(1/x)-(1/x^2)}}{x^2}\big(\operatorname{sen} e^{1/x}\big)\big(\cos e^{1/x}\big)\,.$$

Dividendo per x

$$\frac{f'(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^{-1/x^2}}{x^4}}_{=:A(x)}\cdot\underbrace{\operatorname{sen}^2 e^{1/x}}_{=:B(x)} - \underbrace{\frac{e^{(1/x)-(1/x^2)}}{x^3}}_{=:C(x)}\cdot\underbrace{\big(\operatorname{sen} e^{1/x}\big)\big(\cos e^{1/x}\big)}_{=:D(x)}\,.$$

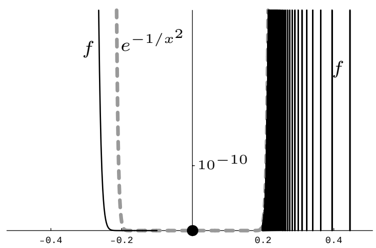
I fattori $B(x)$ e $D(x)$ sono compresi fra -1 e 1. Il limite degli altri fattori si trova come prima con la sostituzione $y = 1/x$:

$$\lim_{x\to\pm 0} A(x) = \lim_{y\to\pm\infty} A(1/y) = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{e^{-y^2}}{1/y^4} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y^4}{e^{y^2}} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{4y^3}{2ye^{y^2}} =$$
$$= \lim_{y\to\pm\infty} \frac{2y^2}{e^{y^2}} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{4y}{2ye^{y^2}} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{2}{e^{y^2}} = 0\,.$$

Similmente per $C(x)$, ricordando che $y^2 - y = y^2(1-1/y) \to +\infty$ per $y \to \pm\infty$, per cui pure $e^{y^2-y} \to +\infty$ per $y \to \pm\infty$:

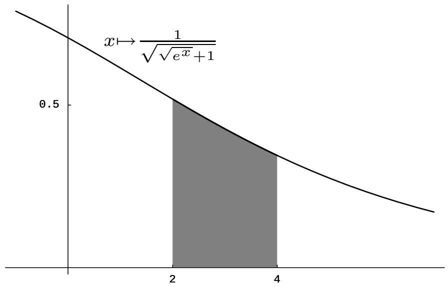
$$\lim_{x\to\pm 0} C(x) = \lim_{y\to\pm\infty} C(1/y) = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{2e^{y-y^2}}{1/y^3} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2-y}} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{6y^2}{(2y-1)e^{y^2-y}} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$= \lim_{y\to\pm\infty} \frac{12y}{2e^{y^2-y} + (2y-1)^2e^{y^2-y}} =$$
$$= \lim_{y\to\pm\infty} \underbrace{\left(\frac{12y}{2+(2y-1)^2}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{e^{y^2-y}}\right)}_{\to 0} = 0$$

Possiamo concludere che esiste $f''(0)$ e vale 0.
Se si vuole tracciare un grafico di $f(x)$ bisogna stare attenti che il fattore $\operatorname{sen}^2 e^{1/x}$ è fortemente oscillante a destra di 0. Il grafico di f oscilla con tratti quasi verticali fra l'asse x e il grafico della funzione $x \mapsto e^{-1/x^2}$, che è indistinguibile dall'asse x nelle vicinanze dell'origine.



4. La funzione

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sqrt{e^x}+1}}$$



è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché $e^x > 0$, per cui la radice quadrata interna esiste ed è pure > 0. Pure $\sqrt{e^x}+1 > 1 > 0$, per cui anche la seconda radice esiste ed è > 0. Infine il reciproco di un numero > 0 è ben definito. La funzione è poi integrabile su qualunque intervallo limitato, e in particolare su $[2,4]$, per uno a scelta di due motivi indipendenti: la funzione è continua in quanto composizione di funzioni continue, ed è monotona (decrescente) perché il denominatore è crescente. Insomma, l'integrale

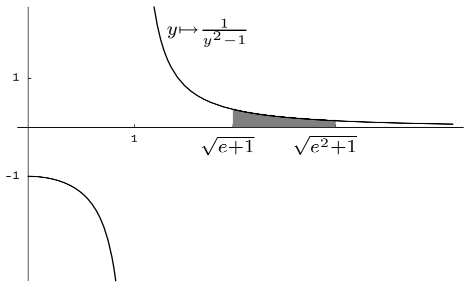
$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{e^x}+1}}$$

ha perfettamente senso, ed è un numero > 0. Seguendo il suggerimento proviamo a prendere come nuova variabile il denominatore:

$$y := \sqrt{\sqrt{e^x}+1}\,.$$

Ricaviamo x in funzione di y. Notiamo che necessariamente $y > 0$, in quanto radice di un numero > 0. Quindi si può tranquillamente elevare al quadrato ottenendo una formula equivalente:

$$y = \sqrt{\sqrt{e^x}+1} \iff y^2 = \sqrt{e^x}+1 \iff y^2 - 1 = \sqrt{e^x} = e^{x/2} \iff \ln(y^2-1) = \frac{x}{2} \iff$$
$$\iff x = 2\ln(y^2-1)\,.$$



Quindi

$$dx = \frac{2}{y^2-1}\cdot 2y\,dy = \frac{4y}{y^2-1}\,dy\,,$$

e l'integrale diventa

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{e^x}+1}} = \int_{\sqrt{\sqrt{e^2}+1}}^{\sqrt{\sqrt{e^4}+1}} \frac{1}{y}\cdot\frac{4y}{y^2-1}\,dy =$$
$$= 4\int_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{1}{y^2-1}\,dy\,.$$

Decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} = \frac{Ay + A + By - B}{(y-1)(y+1)} = \frac{(A+B)y + (A-B)}{y^2-1}\,.$$

Uguagliando i numeratori si ottiene

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2A = 1 \\ 2B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2\,. \end{cases}$$

Quindi

$$4\int_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{1}{y^2-1}\,dy = 4\int_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} \Big(\frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}\Big)dy = 2\int_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} \Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)dy =$$
$$= 2\Big[\ln(y-1) - \ln(y+1)\Big]_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} =$$
$$= 2\Big(\ln(\sqrt{e^2+1}-1) - \ln(\sqrt{e^2+1}+1) - \ln(\sqrt{e+1}-1) + \ln(\sqrt{e+1}+1)\Big) =$$
$$= 2\ln\frac{(\sqrt{e^2+1}-1)(\sqrt{e+1}+1)}{(\sqrt{e^2+1}+1)(\sqrt{e+1}-1)}\,.$$

Il valore numerico dell'integrale è circa 0,857469.

Un modo leggermente diverso di procedere era di calcolare una primitiva della funzione originale e poi sostituire gli estremi originali. Per la primitiva veniva

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{e^x}+1}} = \Bigl(\int \frac{4}{y^2-1} dy\Bigr)_{y=\sqrt{\sqrt{e^x}+1}} = 2\Bigl(\ln(y-1)-\ln(y+1)\Bigr)_{y=\sqrt{\sqrt{e^x}+1}} =$$
$$= 2\ln\bigl(\sqrt{\sqrt{e^x}+1}-1\bigr) - 2\ln\bigl(\sqrt{\sqrt{e^x}+1}+1\bigr)\,.$$

Per chi conosce le funzioni iperboliche l'integrale si può scrivere in modo più compatto. Infatti una primitiva di $y \mapsto 1/(y^2-1)$ è $y \mapsto -\operatorname{arctanh} y$, per cui

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{e^x}+1}} = 4\int_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{1}{y^2-1}\, dy = 4\bigl[-\operatorname{arctanh} y\bigr]_{\sqrt{e+1}}^{\sqrt{e^2+1}} =$$
$$= 4\operatorname{arctanh}\sqrt{e+1} - 4\operatorname{arctanh}\sqrt{e^2+1}\,.$$