Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 24 settembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Provare che per ogni intero $n > 0$ valgono le disuguaglianze

$$\ln n \le n - 1 \qquad \text{e} \qquad \ln n \le (n-1)\ln 2.$$

(Notare che se $n > 1$ la prima disuguaglianza equivale a $\frac{\ln n - \ln 1}{n-1} \le \ldots$, e si può usare il teorema di Lagrange; per la seconda verificare che $n \mapsto \frac{\ln n - \ln 1}{n-1}$ è decrescente, usando la derivata, per cui...).

2. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x - \tan^2 x}{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}\right)^{\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} = e\,.$$

3. Calcolare il seguente integrale, se ha senso:

$$\int_0^1 e^{\operatorname{arcsen} x}\, dx\,.$$

(Cambio di variabile $y = \operatorname{arcsen} x$ e poi per parti...).

Punti: 12, 10, 8

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 24 settembre 1997

Svolgimento

1. Per $n = 1$ la disuguaglianza $\ln n \le n - 1$ diventa $0 \le 0$, che è vera banalmente. Per $n > 1$ possiamo dividere ambo i membri per $n - 1$, che è > 0:

$$\frac{\ln n}{n-1} \le 1 .$$

Usando il fatto che $\ln 1 = 0$ possiamo riscrivere la disuguaglianza come

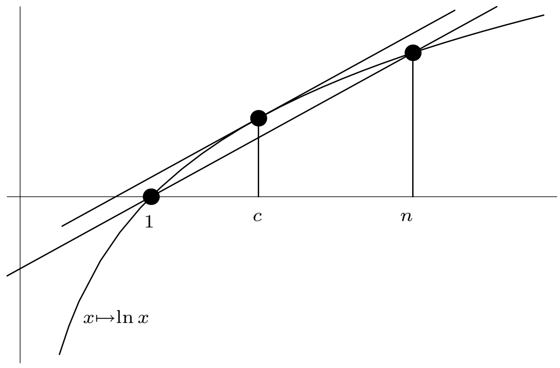
$$\frac{\ln n - \ln 1}{n-1} \le 1 ,$$

che è della forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le 1 ,$$

dove $f = \ln$, $a = 1$, $b = n$. Sull'intervallo $[a, b] = [1, n]$ la funzione f è derivabile, per cui possiamo applicare il teorema del valor medio di Lagrange e ottenere un punto $c \in]1, n[$ tale che

$$\frac{\ln n - \ln 1}{n-1} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) = \frac{1}{c} .$$



Il fatto che $c > 1$ implica che $1/c < 1$ e possiamo concludere che in effetti

$$\frac{\ln n - \ln 1}{n-1} = \frac{1}{c} < 1 .$$

Per dimostrare che $\ln n \le (n-1)\ln 2$ notiamo che è vera ancora banalmente per $n = 1$ (dove diventa $0 \le 0$) e per $n = 2$ (dove diventa $\ln 2 \le \ln 2$). In generale per $n > 1$ si riscrive come

$$\frac{\ln n}{n-1} \le \ln 2 .$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) := \frac{\ln x}{x-1} .$$

Noi vogliamo dimostrare che $g(n) \le \ln 2$ se n è intero ≥ 2. Calcoliamo la derivata di g:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1) - (\ln x)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} .$$

Vediamo dove la derivata di g è negativa: poiché il denominatore è positivo per gli x che ci interessano,

$$g'(x) < 0 \iff x - 1 - x\ln x < 0 \iff \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x} \iff \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} > \frac{1}{x} .$$

Con lo stesso ragionamento di prima per $x > 1$ esiste un $c \in]1, x[$ tale che

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = f'(c) = \frac{1}{c} .$$

Essendo $c > 1$ si ha che

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \frac{1}{c} < 1 .$$

Dunque $g'(x) < 0$ per $x > 1$, e g risulta strettamente decrescente per $x > 1$. Di conseguenza

$$n \ge 2 \quad\Rightarrow\quad g(n) \ge g(2) = \frac{\ln 2}{2-1} = \ln 2 ,$$

come volevasi dimostrare.

2. La funzione di cui si cerca il limite per $x \to 0$ è un vespaio di forme indeterminate:

$$f(x) := \left(\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x - \tan^2 x}{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}\right)^{\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} .$$

Il numeratore e il denominatore della base e il numeratore dell'esponente sono del tipo $+\infty - \infty$ perché $\operatorname{sen}^2 x \to 0^+$ e $\tan^2 x \to 0^+$, per cui $\ln \operatorname{sen}^2 x \to -\infty$ e $\ln \tan^2 x \to -\infty$. Però il denominatore della base compare tale e quale (sparpagliato) al numeratore, per cui possiamo riscrivere la funzione come

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x - \tan^2 x}{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}\right)^{\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} = \\ &= \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}\right)^{\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} . \end{aligned}$$

Ora usiamo il fatto che il logaritmo del rapporto è la differenza dei logaritmi, e il fatto che la tangente è il rapporto fra seno e coseno:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}\right)^{\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} = \\ &= \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \operatorname{sen}^2 x + \ln \cos^2 x}\right)^{\frac{\ln \operatorname{sen}^2 x - \ln \operatorname{sen}^2 x + \ln \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} = \cdot \\ &= \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}{\ln \cos^2 x}\right)^{\frac{\ln \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}} \end{aligned}$$

La funzione si presenta nella forma

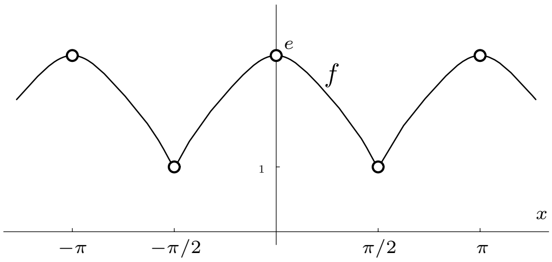
$$f(x) = \big(1 + g(x)\big)^{1/g(x)} , \qquad \text{dove } g(x) := \frac{\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x}{\ln \cos^2 x} .$$

La $g(x)$ tende a 0 per $x \to 0$ perché il numeratore $\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x \to 0$ e il denominatore tende a $-\infty$. Ci si potrebbe chiedere anche se $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ vicino a 0, perché altrimenti il problema fin dall'inizio non avrebbe senso. Ma questo è facile: poiché

$$\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - 1)\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} ,$$

la $g(x)$ si annulla solo per $x \in \pi\mathbb{Z}$, che Torniamo al limite:

$$f(x) = \big(1 + g(x)\big)^{1/g(x)} = \exp\Big(\frac{1}{g(x)} \ln\big(1 + g(x)\big)\Big) = \exp \frac{\ln\big(1 + g(x)\big)}{g(x)} .$$



Ora col cambio di variabile $y = g(x)$ per $x \to 0$ anche $y \to 0$ e quindi ci riportiamo a un limite notevole:

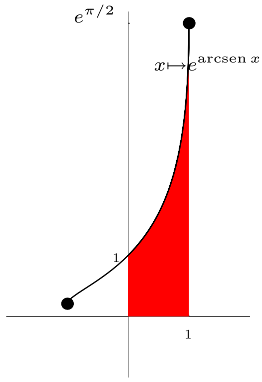
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \exp \frac{\ln\big(1 + g(x)\big)}{g(x)} = \\ &= \lim_{y \to 0} \exp \frac{\ln(1 + y)}{y} = \exp 1 = e . \end{aligned}$$

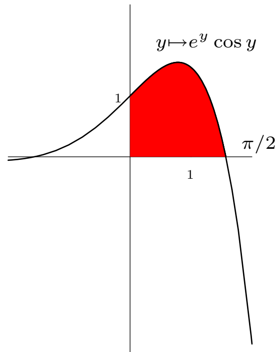
Un altro punto di interesse per la funzione è $\pi/2$, dove non esiste. Qual è il limite?

3. La funzione $x \mapsto e^{\operatorname{arcsen} x}$ è continua in quanto composta della funzione arcsen, che è definita e continua su $[-1, 1]$, con l'esponenziale, che è definito e continuo ovunque. Pertanto l'integrale

$$\int_0^1 e^{\operatorname{arcsen} x}\, dx$$

ha senso. Per concludere che la funzione è integrabile su $[0, 1]$, al posto della continuità si potrebbe anche usare il fatto che la funzione integranda è crescente, in quanto composizione di funzioni crescenti.
La funzione arcsen è biiettiva dall'intervallo $[0, 1]$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$, e derivabile su $[0, 1[$. La sua funzione inversa è il seno. Cambiamo variabile $y = \operatorname{arcsen} x$ nell'integrale:





$$\int_0^1 e^{\operatorname{arcsen} x}\, dx = \int_0^{\pi/2} e^y \cos y\, dy\,, \qquad \text{in quanto } y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow x = \operatorname{sen} y \Rightarrow dx = \cos y\, dy\,.$$

Calcoliamo una primitiva di $y \mapsto e^y \cos y$ per parti due volte:

$$\begin{aligned}\int e^y \cos y\, dy &= \int e^y\, d \operatorname{sen} y = e^y \operatorname{sen} y - \int \operatorname{sen} y\, de^y = e^y \operatorname{sen} y - \int e^y \operatorname{sen} y\, dy = \\ &= e^y \operatorname{sen} y - \int e^y\, d(-\cos y) = e^y \operatorname{sen} y - \Big(e^y(-\cos y) - \int (-\cos y)\, de^y \Big) = \\ &= e^y \operatorname{sen} y + e^y \cos y - \int e^y \cos y\, dy\,.\end{aligned}$$

Portando al primo membro l'ultimo integrale si ricava che

$$2 \int e^y \cos y\, dy = e^y(\operatorname{sen} y + \cos y)\,,$$

cioè

$$\int e^y \cos y\, dy = \frac{e^y}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y)\,.$$

Concludendo l'integrale cercato vale

$$\int_0^{\pi/2} e^y \cos y\, dy = \Big[\frac{e^y}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y) \Big]_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi/2}}{2}(1+0) - \frac{e^0}{2}(0+1) = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} \approx 1{,}905\,.$$