Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 9 luglio 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Dimostrare che la successione definita per ricorrenza

$$a_0 := 0\,, \qquad a_{n+1} := \arctan\sqrt{\frac{1+\tan^4 a_n}{2}}$$

è ben definita, compresa fra 0 e $\pi/4$, monotona, che ammette limite e trovare quale. (Una volta che a_n è ben definita può aiutare considerare la successione $b_n := \tan a_n$).

2. Data la funzione della variabile reale x

$$\pi\ln(1+\operatorname{sen} x) + \pi^2\ln(1+\operatorname{sen} 2x) + \pi^3\ln(1+\operatorname{sen} 3x)\,,$$

verificare che è infinitesima per $x \to 0$ e calcolarne la parte principale (rispetto all'infinitesimo campione x).

3. Calcolare l'integrale seguente, se ha senso:

$$\int_1^2 \ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr)\,dx\,.$$

(Per parti...).

Punti: 14, 6, 10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

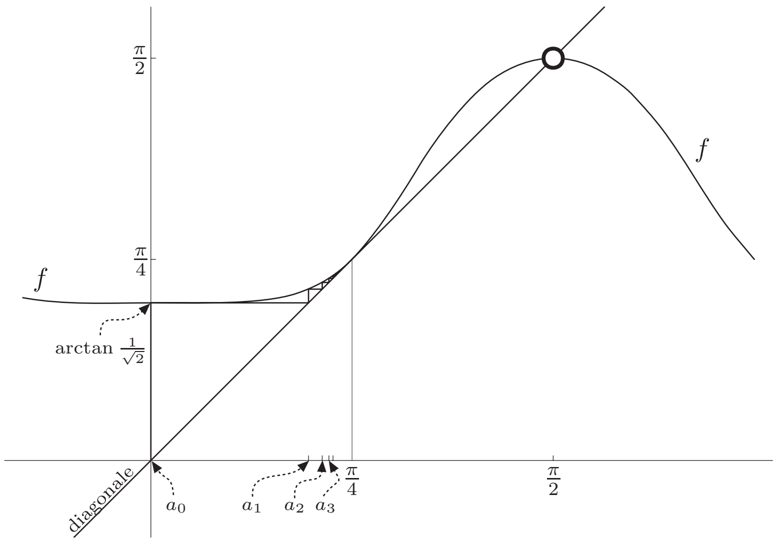
Prova Scritta del 9 luglio 1997

Svolgimento

1. Dimostriamo per induzione la proposizione seguente: *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *il numero* a_n *è ben definito e* $0 \le a_n < \pi/4$. Per $n = 0$ è vero perché $a_0 = 0$ per definizione. Supponiamo che n sia un numero per il quale la proposizione è vera. La tangente è strettamente crescente su $]-\pi/2, \pi/2[$ e la radice quadrata lo è su $[0, +\infty[$ e l'arcotangente lo è dappertutto, per cui

$$\begin{aligned}
&0 \le a_n < \pi/4 \quad\Rightarrow\quad 0 \le \tan a_n < 1 \quad\Rightarrow\quad 0 \le \tan^4 a_n < 1 \quad\Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow\quad 1 \le 1 + \tan^4 a_n < 2 \quad\Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2} \le \frac{1+\tan^4 a_n}{2} < 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{\frac{1+\tan^4 a_n}{2}} < 1 \quad\Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow\quad 0 \le \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} \le \underbrace{\arctan\sqrt{\frac{1+\tan^4 a_n}{2}}}_{=a_{n+1}} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow\quad 0 \le a_{n+1} < \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

n	$a_n \approx$
0	0
1	0,615480
2	0,668964
3	0,695045
4	0,710982
5	0,721873
6	0,729844
7	0,735958
8	0,740809
9	0,744761
10	0,748046
11	0,750824
12	0,753206



Quindi anche a_{n+1} è ben definito e $0 \le a_{n+1} < \pi/4$. Un altro modo di procedere è quello di definire la funzione

$$f(x) := \arctan\sqrt{\frac{1+\tan^4 x}{2}}\,,$$

che chiaramente è definita dove esiste la tangente, cioè per gli $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$, e vedere che f manda l'intervallo $[0, \pi/4[$ in se stesso. Ora questa f è certamente definita e derivabile su $[0, \pi/4[$; la sua derivata è

$$\begin{aligned}
f'(x) = {}& \frac{1}{1 + \frac{1+\tan^4 x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \\
& \cdot 4\tan^3 x \cdot (1 + \tan^2 x)\,,
\end{aligned}$$

Poiché chiaramente $f'(x) > 0$ per $0 < x < \pi/2$, la f risulta strettamente crescente su $[0, \pi/2[$, e manda quindi $[0, \pi/4[$ nell'intervallo $[f(0), f(\pi/4)[$, cioè in $[\arctan(1/\sqrt{2}), \pi/4[$, che è contenuto in $[0, \pi/4[$.
Dobbiamo dimostrare che a_n è monotona. Poiché $a_0 < a_1 = \arctan(1/\sqrt{2})$, la monotonia da dimostrare è la crescenza. Dimostriamo per induzione che $a_n \le a_{n+1}$. Per $n = 0$ l'abbiamo già visto. Se è vero per n, applichiamo la f, che è strettamente crescente su $[0, \pi/2[$ a tutti i membri della disuguaglianza $0 \le a_n < a_{n+1} < \pi/4$, ottenendo

$$f(0) \le \underbrace{f(a_n)}_{=a_{n+1}} < \underbrace{f(a_{n+1})}_{=a_{n+2}} < f(\pi/4)\,, \qquad \text{cioè} \qquad 0 < \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} \le a_{n+1} < a_{n+2} < \frac{\pi}{4}\,.$$

Dunque la disuguaglianza $0 \le a_n < a_{n+1} < \pi/4$ è vera anche con $n+1$ al posto di n.
Essendo limitata (in quanto $0 \le a_n < \pi/4$) e crescente, la successione a_n ha limite finito $\ell \in [0, \pi/4]$. Poiché la f è continua su tutto $[0, \pi/4]$, estremi compresi, possiamo passare al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ottenendo

$$\ell = f(\ell)\,.$$

Manipoliamo l'equazione $\ell = f(\ell)$:

$$\begin{aligned}
\ell = f(\ell) \quad &\iff \quad \ell = \arctan\sqrt{\frac{1+\tan^4\ell}{2}} \quad \Rightarrow \quad \tan\ell = \sqrt{\frac{1+\tan^4\ell}{2}} \quad \Rightarrow \\
&\implies \quad \tan^2\ell = \frac{1+\tan^4\ell}{2} \quad \iff \quad 2\tan^2\ell = 1+\tan^4\ell \quad \iff \quad (\tan^2\ell - 1)^2 = 0 \quad \iff \\
&\iff \quad \tan^2\ell = 1 \quad \iff \quad \tan\ell = \pm 1 \quad \iff \\
&\iff \quad \ell \in \big\{\pi/4 + k\pi/2 \ : \ k \in \mathbb{Z}\big\}\,.
\end{aligned}$$

Alcuni di questi passaggi non sono reversibili, almeno per ℓ generico. Comunque abbiamo ottenuto che da una parte ℓ esiste e giace in $[0, \pi/4]$, mentre dall'altra deve appartenere all'insieme $\{\pi/4 + k\pi/2 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
Concludiamo che $\ell = \pi/4 \approx 0{,}785398$. Si noterà che la convergenza è piuttosto lenta.
Se poniamo $b_n := \tan a_n$, visto che $a_n \in [0, \pi/4[\ \subset \ ]-\pi/2, \pi/2[$ possiamo scrivere che $b_0 = \tan a_0 = \tan 0 = 0$ e che

$$b_{n+1} = \tan a_{n+1} = \tan\arctan\sqrt{\frac{1+\tan^4 a_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\tan^4 a_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+b_n^4}{2}}\,.$$

Se poniamo

$$g(x) := \sqrt{\frac{1+x^4}{2}}\,,$$

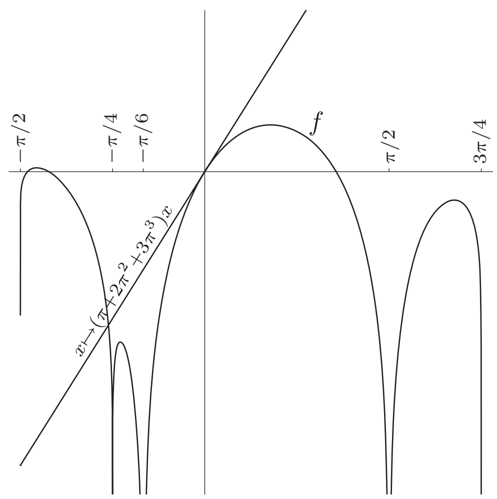
la successione b_n soddisfa le relazioni ricorsive

$$b_0 = 0, \qquad b_{n+1} = g(b_n)\,.$$

La successione b_n è un poco più facile da studiare della a_n, perché la g è più semplice della f. Risulta che b_n è compreso fra 0 e 1, è strettamente crescente e tende a $\tan(\pi/4) = 1$. Da questo si può dedurre che $a_n = \arctan b_n$ è compreso fra 0 e $\pi/4$, crescente e tende a $\arctan 1 = \pi/4$.

2. Definiamo la funzione

$$\begin{aligned} f(x) := {} & \pi\ln(1+\operatorname{sen} x) + \\ & + \pi^2\ln(1+\operatorname{sen} 2x) + \\ & + \pi^3\ln(1+\operatorname{sen} 3x)\,. \end{aligned}$$

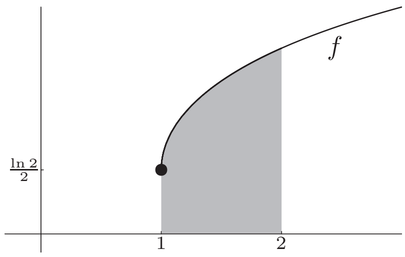


La $f(x)$ è definita per gli x abbastanza vicini a 0, perché $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x$ sono tutti infinitesimi per $x \to 0$, e il logaritmo è ben definito quando l'argomento è vicino a 1. (Qual'è precisamente il dominio di f?). Inoltre f è continua (e derivabile infinite volte) dove è definita, perché composizione di funzioni continue (e derivabili infinite volte). La $f(x)$ è quindi infinitesima per $x \to 0$ perché $f(0) = \pi\ln(1+\operatorname{sen} 0) + \pi^2\ln(1+\operatorname{sen} 0) + \pi^3\ln(1+\operatorname{sen} 0) = \pi\ln 1 + \pi^2\ln 1 + \pi^3\ln 1 = 0$.
Per trovarne la parte principale rispetto a x per $x \to 0$ si può per esempio provare con la regola de L'Hôpital: se $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi\ln(1+\operatorname{sen} x) + \pi^2\ln(1+\operatorname{sen} 2x) + \pi^3\ln(1+\operatorname{sen} 3x)}{x^\alpha} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{1+\operatorname{sen} x}\cos x + \frac{\pi^2}{1+\operatorname{sen} 2x}2\cos 2x + \frac{\pi^3}{1+\operatorname{sen} 3x}3\cos 3x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \\
&= \begin{cases} \pi + 2\pi^2 + 3\pi^3 & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ rispetto a x è
$$(\pi + 2\pi^2 + 3\pi^3)x^1 .$$
Secondo modo. Usiamo la formula di Taylor col resto di Peano: $f(x) = f(0)+f'(0)x+o(x) = f'(0)x+o(x)$ per $x \to 0$. La derivata di f è
$$f'(x) = \frac{\pi}{1+\operatorname{sen} x}\cos x + \frac{\pi^2}{1+\operatorname{sen} 2x}2\cos 2x + \frac{\pi^3}{1+\operatorname{sen} 3x}3\cos 3x\,, \qquad f'(0) = \pi + 2\pi^2 + 3\pi^3 \neq 0\,.$$
Quindi $f(x) = (\pi + 2\pi^2 + 3\pi^3)x + o(x)$, e la parte principale è $(\pi + 2\pi^2 + 3\pi^3)x$.
Terzo modo. Usiamo le formula di Taylor $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, $\ln(1 + x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, e le regole di manipolazione del simbolo o:
$$\begin{aligned} f(x) &= \pi\ln(1+\operatorname{sen} x) + \pi^2\ln(1+\operatorname{sen} 2x) + \pi^3\ln(1+\operatorname{sen} 3x) = \\ &= \pi\ln\bigl(1+x+o(x)\bigr) + \pi^2\ln\bigl(1+2x+o(x)\bigr) + \pi^3\ln\bigl(1+3x+o(x)\bigr) = \\ &= \pi\bigl(x+o(x)\bigr) + \pi^2\bigl(2x+o(x)\bigr) + \pi^3\bigl(3x+o(x)\bigr) = \\ &= (\pi + 2\pi^2 + 3\pi^3)x + o(x)\,. \end{aligned}$$

3. La funzione
$$f(x) := \ln\bigl(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\bigr)$$
è definita per gli x tali che $x + 1 \geq 0$, $x - 1 \geq 0$, cioè per $x \geq 1$; le due radici sono ≥ 0 quando esistono, e non si annullano mai contemporaneamente, quindi il logaritmo non dà problemi. Inoltre f è continua dove è definita, perché composizione di funzioni continue. Pertanto l'integrale di f fra 1 e 2 esiste. Calcoliamolo una primitiva di f per parti:



$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int \ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr)dx = \\ &= x\ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \Bigl(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\Bigr)dx = \\ &= x\ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\,dx = \\ &= x\ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\,dx = \\ &= x\ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\,. \end{aligned}$$
Nell'ultimo integrale facciamo il cambio di variabile $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$:
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \frac{1}{2}\int (y-1)^{-1/2}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{(y-1)^{1/2}}{1-1/2} = \sqrt{y-1} = \sqrt{x^2-1}\,.$$
Ecco quindi la primitiva cercata
$$\int f(x)\,dx = x\ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,.$$
L'integrale definito vale
$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \Bigl[x\ln\bigl(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\bigr) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\Bigr]_1^2 = \\ &= \Bigl(2\ln\bigl(\sqrt{2+1}+\sqrt{2-1}\bigr) - \frac{1}{2}\sqrt{2^2-1}\Bigr) - \Bigl(1\ln\bigl(\sqrt{1+1}+\sqrt{1-1}\bigr) - \frac{1}{2}\sqrt{1^2-1}\Bigr) = \\ &= 2\ln(1+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\sqrt{2} = 2\ln(1+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}+\ln 2}{2} \approx 0{,}797506 \end{aligned}$$
Dove la funzione esiste si ha che $f(x) \geq \ln\sqrt{2} > 0$, quindi l'integrale doveva per forza essere > 0.