Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 24 giugno 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Si dica se le formule ricorsive

$$a_1 := e^{\pi} - 1\,, \qquad a_{n+1} := \sqrt[n]{1 + a_n} - 1$$

definiscono una successione di numeri reali con indice $n \geq 1$, e in caso affermativo stabilire se tale successione è limitata, monotona, se ha limite e quale.

2. Trovare tutte le soluzioni analitiche (serie di potenze di centro 0), se ce ne sono, coi relativi raggi di convergenza, del problema di Cauchy

$$y'' + x^2 y' + xy = 0\,, \qquad y(0) = 2\pi\,, \quad y'(0) = \sqrt{\pi}\,.$$

3. Calcolare l'integrale definito, se ha senso:

$$\int_1^e \frac{2\ln x}{x} \cdot \frac{2\ln^2 x + 1}{\ln^4 x + 1}\, dx\,.$$

Punti: 10, 14, 8

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 24 giugno 1997

Svolgimento

1. La formula

$$a_1 := e^\pi - 1\,, \qquad a_{n+1} := \sqrt[n]{1+a_n} - 1$$

contiene delle radici ennesime, che non sono definite fra i reali quando l'argomento è negativo e l'indice è pari. Consideriamo il predicato seguente:

$P(n) :=$ "n è un indice tale che a_n è definito ed è > 0".

Dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\begin{aligned} &a_n > 0 \Rightarrow 1 + a_n > 1 \Rightarrow \\ &\quad\Rightarrow \sqrt[n]{1+a_n} \text{ è definito e } \sqrt[n]{1+a_n} > 1 \Rightarrow \\ &\quad\Rightarrow \sqrt[n]{1+a_n} \text{ è definito e } \sqrt[n]{1+a_n} - 1 > 0 \Rightarrow \\ &\quad\Rightarrow a_{n+1} \text{ è definito e } a_{n+1} > 0\,. \end{aligned}$$

n	a_n	$a_n \approx$
1	$e^\pi - 1$	22,1407
2	$e^\pi - 1$	22,1407
3	$e^{\pi/2} - 1$	3,81048
4	$e^{\pi/6} - 1$	0,688092
5	$e^{\pi/24} - 1$	0,139853
6	$e^{\pi/120} - 1$	0,0265256
7	$e^{\pi/720} - 1$	0,00437286
8	$e^{\pi/5040} - 1$	0,000623526
9	$e^{\pi/40320} - 1$	0,0000779195
10	$e^{\pi/362880} - 1$	0,00000865742

Poiché $P(1)$ è vero, per induzione otteniamo che a_n è ben definito ed è > 0 per ogni $n \geq 1$. Se poniamo $b_n := 1 + a_n$, valgono le relazioni

$$b_n > 1\,, \qquad b_{n+1} = \sqrt[n]{b_n}\,.$$

Sapendo che la radice n-esima (con $n > 1$) di un numero > 1 è minore del numero stesso, abbiamo che $b_{n+1} < b_n$ per ogni $n \geq 2$. Quindi pure a_n è strettamente decrescente per $n \geq 2$. Essendo anche limitata inferiormente (da 0, per esempio), ammette limite finito, che indichiamo provvisoriamente con ℓ. Nella formula ricorsiva

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{1+a_n} - 1 = (1+a_n)^{1/n} - 1 = \exp\Bigl(\frac{\ln(1+a_n)}{n}\Bigr) - 1$$

si può passare al limite per $n \to +\infty$ e si ottiene, ricordando che $\ell \geq 0$,

$$\ell = \exp\Bigl(\frac{\overbrace{\ln(1+\ell)}^{\text{finito}}}{+\infty}\Bigr) - 1 = \exp 0 - 1 = 1 - 1 = 0\,.$$

Dunque il limite della successione è 0.

Secondo modo. Scrivendo esplicitamente i primi termini della successione viene il sospetto che

$$a_n = e^{\pi/(n-1)!} - 1 \qquad \forall n \geq 1\,.$$

Dimostriamolo per induzione. Per $n = 1$ è vero, perché il primo membro vale $e^\pi - 1$ per definizione, mentre il secondo vale $e^{\pi/0!} - 1 = e^{\pi/1} - 1 = e^\pi - 1$. Sia $n \geq 1$ un indice per il quale l'uguaglianza è vera, e dimostriamo che è vera anche per l'indice $n+1$:

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{1+a_n} - 1 = \sqrt[n]{1 + \bigl(e^{\pi/(n-1)!} - 1\bigr)} - 1 = \sqrt[n]{e^{\pi/(n-1)!}} - 1 = \bigl(e^{\pi/(n-1)!}\bigr)^{1/n} - 1 = e^{\pi/n!} - 1\,,$$

che coincide in effetti con $e^{\pi/(n-1)!} - 1$ se al posto di n si scrive $n + 1$. La formula è quindi dimostrata. Ora, poiché la successione $n \mapsto (n-1)!$ è crescente e tende a $+\infty$, deduciamo che a_n decresce e tende a $e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

2. Scriviamo
$$y(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n\,,$$
con a_n coefficienti incogniti. Deriviamo due volte:
$$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}\,,$$
e sostituiamo nell'equazione $y'' + x^2 y' + xy = 0$:
$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0\,.$$
Distribuiamo i prodotti:
$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0\,.$$
Per raccogliere i termini di uguale esponente conviene cambiare indici: poniamo $n-2=k$ nella prima somma e $n+1=k$ nella seconda e nella terza, in modo da avere somme con esponenti tutti uguali a k, facendo attenzione a non sbagliare l'indice di partenza delle somme:
$$\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k\geq 2}(k-1)a_{k-1}x^k + \sum_{k\geq 1} a_{k-1}x^k = 0\,.$$
Raccogliamo i termini di uguale esponente:
$$2\cdot 1 a_2 x^0 + \big(3\cdot 2 a_3 + a_0\big)x^1 + \sum_{k\geq 2}\Big((k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-1)a_{k-1} + a_{k-1}\Big)x^k = 0\,.$$

n	a_n
0	2π
1	$\sqrt{\pi}$
2	0
3	$-\frac{\pi}{3}$
4	$-\frac{\sqrt{\pi}}{6}$
5	0
6	$\frac{2\pi}{45}$
7	$\frac{5\sqrt{\pi}}{252}$
8	0
9	$-\frac{7\pi}{1620}$
10	$-\frac{\sqrt{\pi}}{567}$
11	0
12	$\frac{7\pi}{21384}$

Per il principio di identità delle serie di potenze l'equazione è verificata se e solo se
$$a_2 = 0\,, \qquad 6a_3 + a_0 = 0\,, \qquad \forall k\geq 2 \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} + k a_{k-1} = 0\,,$$
cioè
$$a_2 = 0\,, \qquad a_3 = -\frac{1}{6}a_0\,, \qquad \forall k\geq 2 \quad a_{k+2} = -\frac{k}{(k+2)(k+1)}a_{k-1}\,.$$
La formula per $k\geq 2$ vale anche per $k=1$ (per $k=0$ no, perché non ha senso a_{-1}), come si vede sostituendo, quindi possiamo scrivere più semplicemente
$$a_2 = 0\,, \qquad \forall k\geq 1 \quad a_{k+2} = -\frac{k}{(k+2)(k+1)}a_{k-1}\,,$$
o ancora, ponendo $k-1=n$,
$$a_2 = 0\,, \qquad \forall n\geq 0 \quad a_{n+3} = -\frac{n+1}{(n+3)(n+2)}a_n\,,$$
L'ultima formula determina univocamente a_{n+3} quando è noto n e a_n. Quindi conoscendo a_0 si deducono $a_3, a_6, a_9, \ldots$, e conoscendo a_1 si conoscono anche $a_4, a_7, a_{10}\ldots$, mentre $a_2, a_5, a_8, a_{11}\ldots$ sono tutti nulli perché $a_2 = 0$. D'altra parte le condizioni iniziali del problema sono $y(0) = 2\pi$ e $y'(0) = \sqrt{\pi}$, che ci forniscono i valori $a_0 = 2\pi$, $a_1 = \sqrt{\pi}$. Dunque la serie della candidata soluzione $y(x)$ è univocamente determinata.

Volendo si possono ricavare formule esplicite non ricorsive per i coefficienti a_n, ma non sono particolarmente illuminanti. Resta da trovare il raggio di convergenza. Abbiamo che

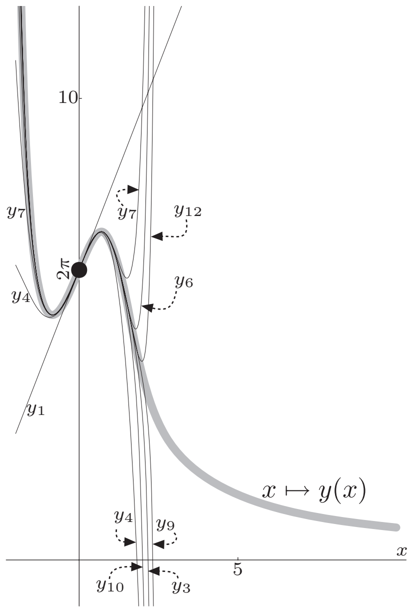
$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{k\geq 0} a_{3k}x^{3k} + \sum_{k\geq 0} a_{3k+1}x^{3k+1} = \sum_{k\geq 0} a_{3k}(x^3)^k + x\sum_{k\geq 0} a_{3k+1}(x^3)^k\,.$$

Ponendo $x^3 = z$ calcoliamo i raggi di convergenza R_1, R_2 delle due serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_{3k}z^k\,, \qquad \sum_{k\geq 0} a_{3k+1}z^k\,,$$

cioè, ponendo $b_k := a_{3k}$, $c_k := a_{3k+1}$,

$$\sum_{k\geq 0} b_k z^k\,, \qquad \sum_{k\geq 0} c_k z^k\,.$$



Il conto è facile usando il criterio del rapporto e le formule ricorsive:

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{k\to+\infty}\frac{|b_k|}{|b_{k+1}|} = \lim_{k\to+\infty}\frac{|a_{3k}|}{|a_{3k+3}|} = \\ &= \lim_{k\to+\infty}\frac{(3k+3)(3k+2)}{3k+1} = +\infty\,, \\ R_2 &= \lim_{k\to+\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k\to+\infty}\frac{|a_{3k+1}|}{|a_{3k+5}|} = \\ &= \lim_{k\to+\infty}\frac{(3k+5)(3k+4)}{3k+2} = +\infty\,, \end{aligned}$$

Quindi la serie di potenze di $y(x)$ converge per ogni x, ed è proprio l'unica soluzione analitica del problema di Cauchy. La figura qui accanto mostra il grafico di $y(x)$ in grassetto grigio, insieme con i grafici delle prime somme parziali

$$y_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,.$$

Una cosa che mi ha incuriosito è che l'adagiamento delle somme parziali y_n sulla somma totale *non* sembri migliorare uniformemente al crescere di n, almeno visto alla scala di questa figura.

3. Per $x \in [1, e]$ entrambi i denominatori x e $\ln^4 x + 1$ esistono e sono $\neq 0$. Inoltre la funzione integranda è continua dove esiste, perché rapporto, composizione ecc. di funzioni continue dove esistono. Quindi l'integrale ha senso. Per calcolarlo conviene prendere come nuova variabile $y = \ln x$, cioè $x = e^y$. Derivando si ha $dx = e^y\,dy$ e quindi

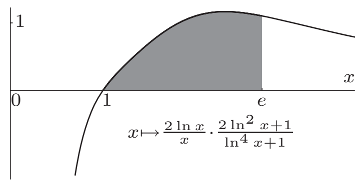
$$\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\cdot\frac{2\ln^2 x + 1}{\ln^4 x + 1}\,dx = \int_{\ln 1}^{\ln e}\frac{2y}{e^y}\cdot\frac{2y^2+1}{y^4+1}\,e^y\,dy = \int_0^1 \frac{2y(2y^2+1)}{y^4+1}dy\,.$$

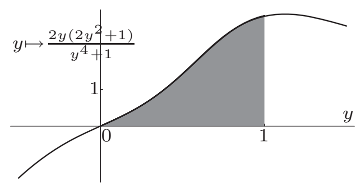
Meglio cambiare di nuovo variabile: $z = y^2$, cioè $y = \sqrt{z}$, con $z \geq 0$. Derivando si ha $dy = (dz)/(2\sqrt{z})$ e quindi

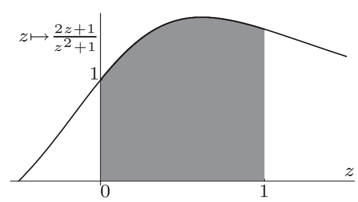
$$\int_0^1 \frac{2y(2y^2+1)}{y^4+1}dy = \int_{0^2}^{1^2}\frac{2\sqrt{z}(2z+1)}{z^2+1}\cdot\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int_0^1\frac{2z+1}{z^2+1}\,dz\,.$$

Si decompone infine in somma di integrali immediati:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2z+1}{z^2+1}\,dz &= \int_0^1\frac{2z}{z^2+1}\,dz + \int_0^1\frac{1}{z^2+1}\,dz = \\ &= \Big[\ln\left|z^2+1\right|\Big]_0^1 + \big[\arctan z\big]_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$







I tre grafici qui accanto hanno scale diverse negli assi. È per questo che le tre aree non appaiono uguali.