Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 10 giugno 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Dimostrare che la successione definita per ricorrenza

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + a_n^2\Big)$$

è monotona (crescente o decrescente?) e compresa fra 0 e 1, e calcolarne il limite, se esiste.

2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{1 + \sqrt[3]{n^2}} \,.$$

(Per studiare la monotonia di un'espressione in n talvolta si può considerare n come variabile reale e usare la derivata).

3. Verificare che l'integrale seguente ha senso (cioè la funzione è integrabile su quell'intervallo) e calcolarlo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\exp \operatorname{sen}^2 x + \exp(-\operatorname{sen}^2 x)} dx \,.$$

Punti: 10, 12, 8

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 10 giugno 1997

Svolgimento

1. Se definiamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + x^2\Big) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}\,,$$

la successione a_n si riconosce iterativa:

$$a_0 := 0\,, \qquad a_{n+1} := f(a_n)\,.$$

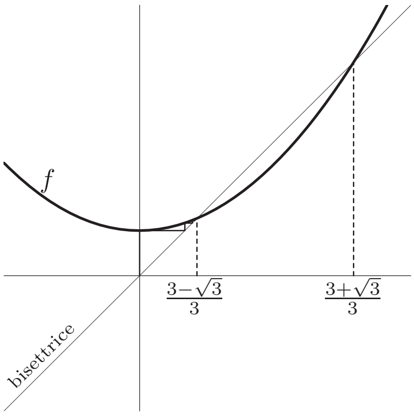
n	$a_n \approx$
0	0
1	0,333333
2	0,388889
3	0,408951
4	0,416954
5	0,420259
6	0,421642
7	0,422224
8	0,422470
9	0,422574
10	0,422618

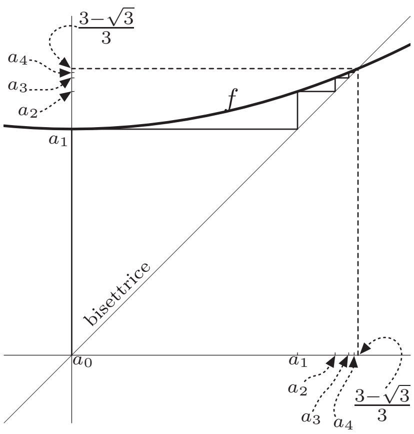
La successione a_n è ben definita, perché $f(a_n)$ è definito qualunque sia a_n. Dato che $f(x) \geq 1/3 > 0$ per ogni x, abbiamo che $a_n \geq 0$ per ogni n. Poiché $a_0 = 0$ e $a_1 = f(0) = 1/3$, se la a_n è monotona, è del tipo crescente. In effetti la successione a_n è strettamente crescente, come si vede per induzione:

$$0 \leq a_0 = 0 < a_1 = f(0) = \frac{1}{3}\,,$$

$$0 \leq a_n < a_{n+1} \quad\Rightarrow\quad 0 \leq a_n^2 < a_{n+1}^2 \quad\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{2}{3} + a_n^2 < \frac{2}{3} + a_{n+1}^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + a_n^2\Big) < \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + a_{n+1}^2\Big) \quad\Rightarrow\quad 0 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}\,.$$





Dimostriamo per induzione anche che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni n:

$$0 \leq a_0 = 0 \leq 1\,,$$

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad\Rightarrow\quad 0 \leq a_n^2 \leq 1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 0 \leq a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + \underbrace{a_n^2}_{\leq 1}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + 1\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{6} \leq 1\,.$$

La successione a_n, essendo monotona e compresa fra 0 e 1, converge a un valore finito pure compreso fra 0 e 1, valore che provvisoriamente chiamiamo ℓ. Per calcolare ℓ passiamo al limite per $n \to +\infty$ nella relazione $a_{n+1} = f(a_n)$:

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + a_n^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + \lim_{n\to+\infty} a_n^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + \ell^2\Big) = f(\ell)\,.$$

L'equazione $\ell = f(\ell)$ si risolve facilmente:

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} + \ell^2\Big) \iff 6\ell = 2 + 3\ell^2 \iff$$

$$\iff 3\ell^2 - 6\ell + 2 = 0 \iff$$

$$\ell = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\,.$$

Il limite ℓ è necessariamente uno dei due valori $(3 \pm \sqrt{3})/3$. Però $(3 + \sqrt{3})/3$ non è accettabile perché è > 1. Dobbiamo concludere che $\ell = (3 - \sqrt{3})/3$. In effetti $(3 - \sqrt{3})/3$ è compreso fra 0 e 1. Approssimatamente $(3 - \sqrt{3})/3 \approx 0{,}42265$, in buon accordo coi valori di a_n per n attorno a 10.

2. Poniamo

$$b_n := (-1)^n \frac{\ln n}{1+\sqrt[3]{n^2}} \qquad \text{per } n \geq 1\,,$$

n	$b_n \approx$
1	0,000000
2	0,267893
3	−0,356683
4	0,393851
5	−0,410151
6	0,416502
7	−0,417640
8	0,415888
9	−0,412489
10	0,408145

Al variare di $n \geq 1$ la successione b_n ha segni alterni. Per vedere se b_n è infinitesimo, prendiamo il valore assoluto, che ci libera del fattore $(-1)^n$, e applichiamo la regola de l'Hôpital:

$$\lim_{n\to+\infty} |b_n| = \left|(-1)^n \frac{\overbrace{\ln n}^{\geq \ln 1 = 0}}{\underbrace{1+\sqrt[3]{n^2}}_{>1>0}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{1+n^{2/3}} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n}{(2/3)n^{-1/3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^{2/3}} = 0\,.$$

Il termine generale è quindi infinitesimo, ma questo non garantisce la convergenza della serie. Proviamo a vedere se c'è convergenza assoluta. Il valore assoluto di b_n si minora così, per $n \geq 2$:

$$|b_n| = \left|(-1)^n \frac{\overbrace{\ln n}^{\geq \ln 2 > 0}}{\underbrace{1+\sqrt[3]{n^2}}_{>1>0}}\right| = \frac{\ln n}{1+\sqrt[3]{n^2}} > \frac{\ln 2}{1+\sqrt[3]{n^2}} > \frac{\ln 2}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\ln 2}{2n^{2/3}}\,.$$

Dato che $2/3 < 1$, sappiamo che $\sum_{n\geq 1} 1/n^{2/3} = +\infty$, e quindi per il criterio del confronto

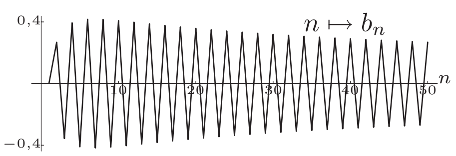
$$\sum_{n=2}^{+\infty} |b_n| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln 2}{2n^{2/3}} = +\infty\,.$$

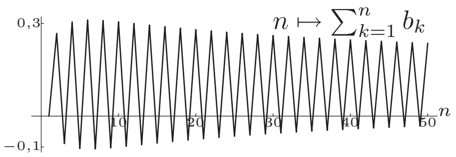
Non c'è convergenza assoluta. Proviamo a vedere se si applica il criterio di Leibniz sulle serie a segni alterni. Dobbiamo verificare se $|b_n|$ decresce e tende a 0. Per la decrescenza deriviamo rispetto a n, considerata come variabile reale:

$$\frac{d|b_n|}{dn} = \frac{d}{dn}\frac{\ln n}{1+\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}(1+n^{2/3}) - (\ln n)(2/3)n^{-1/3}}{(1+n^{2/3})^2} =$$
$$= \frac{1+n^{2/3}-(2/3)n^{2/3}\ln n}{n(1+n^{2/3})^2} = \frac{3+n^{2/3}(3-2\ln n)}{3n(1+n^{2/3})^2}\,.$$

Questa espressione tende a 0 per $n \to +\infty$, ma a noi interessa il segno: mentre il denominatore è sempre > 0, il numeratore tende a $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(3 + \underbrace{n^{2/3}}_{\to+\infty}(\underbrace{3-2\ln n}_{\to-\infty})\Big) = -\infty\,,$$





per cui

$$\frac{d|b_n|}{dn} = \frac{3+n^{2/3}(3-2\ln n)}{3n(1+n^{2/3})^2} < 0 \quad \text{per tutti gli } n \text{ grandi.}$$

In effetti $|b_n|$ è definitivamente decrescente (dalla tabella si vede che fino a $n = 7$ è crescente). Ricapitolando, b_n è a segni alterni e infinitesima, e $|b_n|$ è definitivamente decrescente. Quindi il criterio di Leibniz ci dice che la serie $\sum b_n$ converge. La convergenza delle somme parziali però è molto lenta, come si può vedere dalla figura qui accanto.

3. Osserviamo che nell'integrale

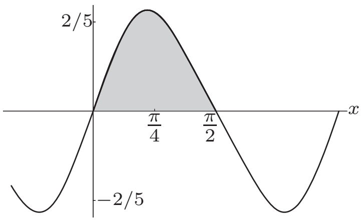
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\exp \operatorname{sen}^2 x + \exp(-\operatorname{sen}^2 x)} dx$$

la derivata della funzione $\operatorname{sen}^2 x$ è $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, che è proprio la funzione al numeratore. Facciamo quindi il cambio di variabile $y = \operatorname{sen}^2 x$, per il quale $dy = \operatorname{sen} 2x\, dx$, e $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}$ (quando $0 \le x \le \pi/2$ si ha che $\operatorname{sen} x \ge 0$). Quindi

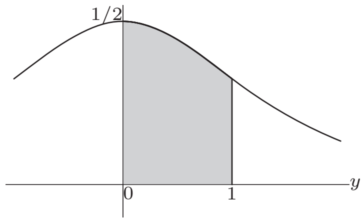
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\exp \operatorname{sen}^2 x + \exp(-\operatorname{sen}^2 x)} dx = \int_{\operatorname{sen}^2 0}^{\operatorname{sen}^2(\pi/2)} \frac{1}{e^y + e^{-y}} dy = \int_0^1 \frac{1}{e^y + e^{-y}} dy\,.$$

Cambiamo ancora variabili: $y = \ln t$, ossia $dy = (1/t)dt$, $t = e^y$:

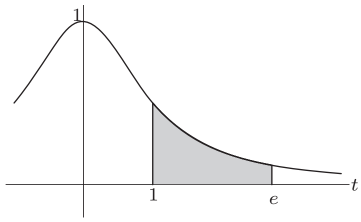
$$\int_0^1 \frac{1}{e^y + e^{-y}} dy = \int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{e^{\ln t} + e^{-\ln t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{1}{t + 1/t} \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{1}{t^2+1} dt =$$
$$= \big[\arctan t\big]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4} \approx 0.432885\,.$$



$x \mapsto \frac{\operatorname{sen} 2x}{\exp \operatorname{sen}^2 x + \exp(-\operatorname{sen}^2 x)}$



$y \mapsto \frac{1}{e^y + e^{-y}}$



$t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$