Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Compitino del 29 maggio 1997

Svolgimento

1. Il logaritmo di x è definito per $x > 0$. Il denominatore della formula $(\ln x)/x$ si annulla solo per $x = 0$. Quindi la funzione

$$f(x) := \frac{\ln x}{x}$$

è definita per $x > 0$. Essendo il rapporto di due funzioni continue, anzi, di classe C^∞, anche f è di classe C^∞ sul suo dominio. Il denominatore è positivo per $x > 0$. Dunque la frazione ha lo stesso segno del numeratore:

$$f(x) > 0 \text{ per } x > 1, \qquad f(x) = 0 \text{ per } x = 1, \qquad f(x) < 0 \text{ per } 0 < x < 1\,.$$

Per $x \to 0^+$ il numeratore $\ln x$ tende a $-\infty$ mentre il denominatore x tende a 0^+. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty\,.$$

Per $x \to +\infty$ sia $\ln x$ che x tendono a $+\infty$, e siamo davanti a una forma indeterminata ∞/∞. Proviamo con la regola de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

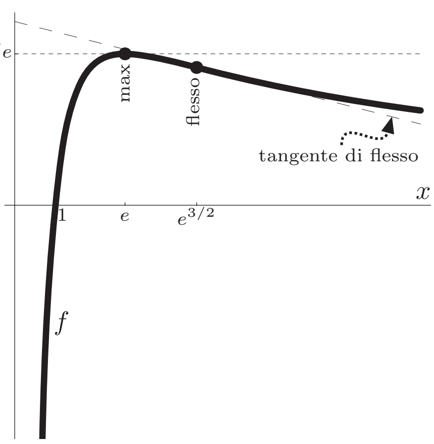
Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{(1/x)\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}\,.$$

Il segno della derivata coincide col segno di $1 - \ln x$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\text{ quando } 1-\ln x > 0, \text{ cioè per } x < e\,,\\ f'(x) = 0 &\text{ quando } 1-\ln x = 0, \text{ cioè per } x = e\,,\\ f'(x) < 0 &\text{ quando } 1-\ln x < 0, \text{ cioè per } x > e\,. \end{aligned}$$

Quindi f è crescente su $]0,1]$, ha un massimo (globale) in e (con valore $f(e) = 1/e$), e decresce su $[1,+\infty[$.



La derivata seconda di f è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-1/x)\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \\ &= \frac{-1-2(1-\ln x)}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}\,. \end{aligned}$$

Il segno di $f''(x)$ coincide col segno di $2\ln x - 3$:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\text{ quando } 2\ln x - 3 > 0, \text{ cioè per } x < e^{3/2}\,,\\ f'(x) = 0 &\text{ quando } 2\ln x - 3 = 0, \text{ cioè per } x = e^{3/2}\,,\\ f'(x) < 0 &\text{ quando } 2\ln x - 3 < 0, \text{ cioè per } x > e^{3/2}\,. \end{aligned}$$

Quindi la f è convessa su $[e^{3/2},+\infty[$, è concava su $]0,e^{3/2}]$, ed ha un flesso in $e^{3/2}$ con quota $f(e^{3/2}) = (3/2)/e^{3/2} = 3/(2e^{3/2}) = 3/e^3$.

2. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt{1-\cos x}}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Per calcolarlo possiamo provare con la regola de L'Hôpital, con l'accortezza di esprimere il $\operatorname{sen} x$ in termini di $\cos x$:

$$\frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\ln\big(1+(1-\cos^2 x)^{1/3}\big)}{(1-\cos x)^{1/2}}\,,$$

e poi cambiando variabile $t=\cos x$, liberandoci delle funzioni trigonometriche:

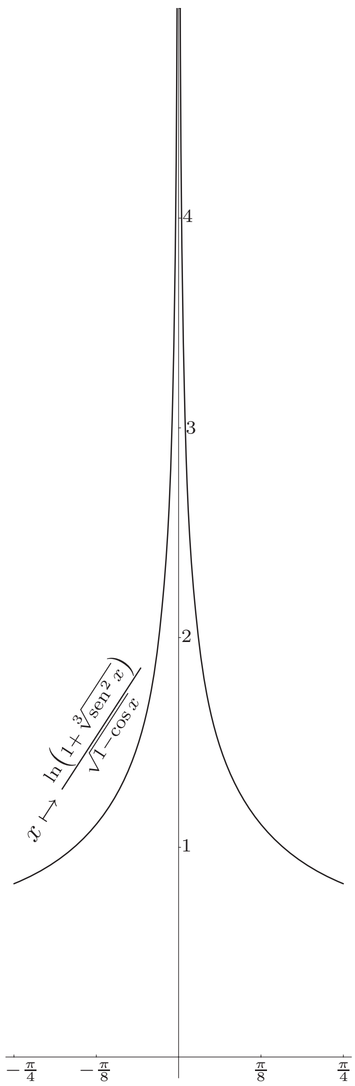
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+(1-\cos^2 x)^{1/3}\big)}{(1-\cos x)^{1/2}} = \lim_{t\to 1^-}\frac{\ln\big(1+(1-t^2)^{1/3}\big)}{(1-t)^{1/2}} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\frac{\frac{1}{1+(1-t^2)^{1/3}}\cdot(1/3)(1-t^2)^{-2/3}(-2t)}{(1/2)(1-t)^{-1/2}(-1)} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{t\to 1^-}\frac{\overbrace{t}^{\to 1^-}}{\underbrace{1+(1-t^2)^{1/3}}_{\to 1}}\cdot\frac{(1-t)^{1/2}}{(1-t^2)^{2/3}} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{t\to 1^-}\frac{(1-t)^{1/2}}{(1-t)^{2/3}(1+t)^{2/3}} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{\underbrace{(1-t)^{1/6}}_{\to 0^+}\underbrace{(1+t)^{2/3}}_{\to 2^{2/3}}} = +\infty\,.$$



Altra via è di usare i polinomi di Taylor delle funzioni coinvolte:

$$\frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\ln\big(1+(x+o(x))^{2/3}\big)}{\sqrt{1-(1-x^2/2+o(x^2))}} =$$

$$= \frac{(x+o(x))^{2/3}+o((x+o(x))^{2/3})}{\sqrt{x^2/2+o(x^2)}} =$$

$$= \frac{(x+o(x))^{2/3}+o((x+o(x))^{2/3})}{|x|\sqrt{1/2+o(1)}} =$$

$$= \frac{x^{2/3}\big((1+o(1))^{2/3}+o((1+o(1))^{2/3})\big)}{|x|\sqrt{1/2+o(1)}} = \frac{\overbrace{(1+o(1))^{2/3}+o((1+o(1))^{2/3})}^{\to 1}}{\underbrace{|x|^{1/3}}_{\to 0^+}\underbrace{\sqrt{1/2+o(1)}}_{\to 1/\sqrt{2}}} \longrightarrow +\infty\,.$$

Ancora, ci si può riportare ai limiti notevoli $(\ln(1+x))/x\to 1$, $(\operatorname{sen} x)/x\to 1$ e $(1-\cos x)/x^2\to 1/2$ per $x\to 0$ dividendo e moltiplicando per opportuni fattori (che sono diversi da 0 quando $0<|x|<\pi$)

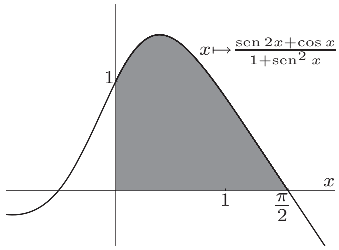
$$\frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{|x|}\cdot\frac{|x|}{\sqrt{1-\cos x}} =$$

$$= \frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}\cdot|x|^{-1/3}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\ln\big(1+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\big)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{2/3}}_{\to 1}\cdot\underbrace{|x|^{-1/3}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{(1-\cos x)/x^2}}}_{\to\sqrt{2}} \longrightarrow +\infty\,.$$

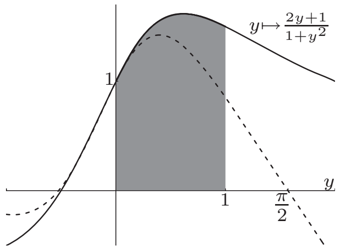
3. Per calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$



sviluppiamo il $\operatorname{sen} 2x$ con le formule di duplicazione e raccogliamo $\cos x$ a fattore comune:

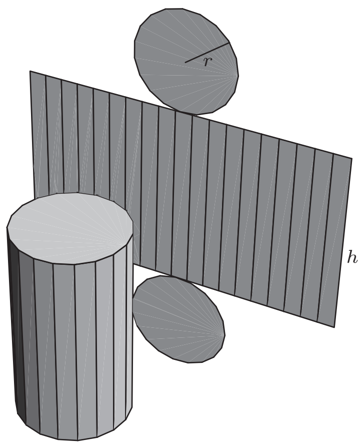
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} x + 1}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \cos x\, dx\,.\end{aligned}$$



Usando il fatto che la derivata del seno è il coseno, cambiamo variabile: $y = \operatorname{sen} x$, $dy = \cos x\, dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} x + 1}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \cos x\, dx &= \int_{\operatorname{sen} 0}^{\operatorname{sen}(\pi/2)} \frac{2y+1}{1+y^2} dy = \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}\Big) dy = \Big[\ln(1+y^2) + \arctan y\Big]_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{4} \approx 1{,}47855\,.\end{aligned}$$

4. Se trascuriamo lo spessore della lattina rispetto alle altre dimensioni, abbiamo da minimizzare la superficie di un cilindro con volume assegnato. Sia r il raggio di base del cilindro, h la sua altezza, $q = h/(2r)$ il rapporto fra altezza e diametro di base, V il volume, S la superficie. Valgono le relazioni



$$\begin{aligned}V &= (\text{area di base}) \cdot \text{altezza} = \pi r^2 \cdot h\,, \\ S &= 2(\text{area di base}) + (\text{area laterale}) = 2(\pi r^2) + 2\pi r \cdot h = \\ &= 2\pi r(r+h)\,. \\ q &= \frac{h}{2r}\,.\end{aligned}$$

Conviene scrivere la superficie in termini della quantità adimensionale q. Ricaviamo h dall'ultima equazione: $h = 2rq$ e sostituiamo nelle altre due:

$$V = \pi r^2 \cdot 2rq = 2\pi r^3 q\,, \qquad S = 2(\pi r^2) + 2\pi r \cdot 2rq = 2\pi r^2(1+2q)\,, \qquad q = \frac{h}{2r}\,.$$

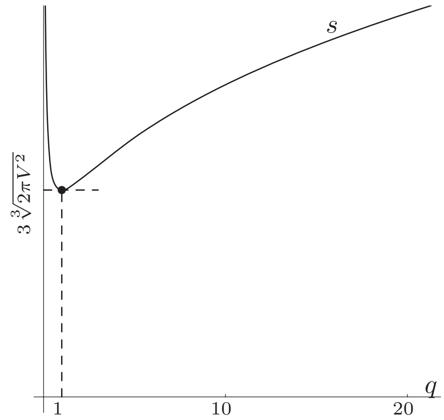
Ricaviamo r dalla prima espressione e sostituiamo nella seconda:

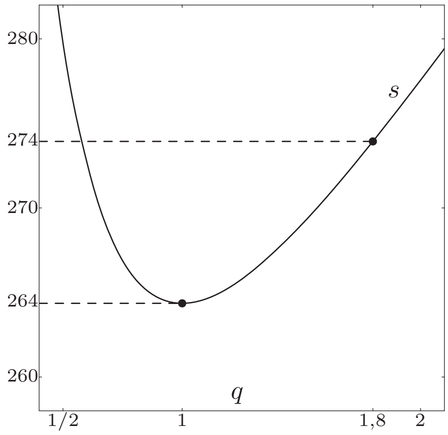
$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi q}}\,, \qquad S = 2\pi(1+2q)\sqrt[3]{\frac{V^2}{(2\pi q)^2}} = (1+2q)\sqrt[3]{\frac{2\pi V^2}{q^2}}\,, \qquad q = \frac{h}{2r}\,.$$

La seconda equazione esprime S in funzione di V, che è fisso, e di q, che è libero. La nostra funzione da minimizzare è

$$s(q) := (1+2q)\sqrt[3]{\frac{2\pi V^2}{q^2}} = (1+2q)q^{-2/3}\sqrt[3]{2\pi V^2}\,.$$

Questa $s(q)$ è evidentemente di classe C^∞ per $q > 0$, e tende a $+\infty$ sia per $q \to 0^+$ che per $q \to +\infty$.





Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} s'(r) &= \left(2q^{-2/3} + (1+2q)\Big(-\frac{2}{3}q^{-5/3}\Big)\right)\sqrt[3]{2\pi V^2} = \\ &= \Big(2q - \frac{2}{3}(1+2q)\Big)q^{-5/3}\sqrt[3]{2\pi V^2} = \\ &= (6q-2-4q)q^{-5/3}\frac{\sqrt[3]{2\pi V^2}}{3} = \\ &= \frac{q-1}{q^{5/3}}\cdot\frac{2\sqrt[3]{2\pi V^2}}{3}\,. \end{aligned}$$

La $s'(q)$ è < 0 per $0 < r < 1$, si annulla per $q = 1$ ed è > 0 per $q > 1$. Ne segue che il valore minimo di $s(q)$ per $q > 0$ viene assunto quando $q = q_{\text{opt}} = 1$ e vale

$$S_{\min} = s(q_{\text{opt}}) = s(1) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Il raggio di base, l'altezza e l'area esterna ottimali corrispondenti a $q_{\text{opt}} = 1$ nel caso standard in cui $V = 33\,\text{cl} = 330\,\text{cm}^3$ sono

$$\begin{aligned} r_{\text{opt}} &= \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi q_{\text{opt}}}} \approx \sqrt[3]{\frac{330\,\text{cm}^3}{2\pi\cdot 1}} \approx 3{,}7\text{ cm}, \\ h_{\text{opt}} &= 2r_{\text{opt}}\cdot q_{\text{opt}} \approx 7{,}5\text{ cm} \\ S_{\text{opt}} &= (1+2q_{\text{opt}})q_{\text{opt}}^{-2/3}\sqrt[3]{2\pi V^2} \approx \\ &\approx 3\sqrt[3]{2\pi(330\,\text{cm}^3)^2} \approx 264\text{ cm}^2\,. \end{aligned}$$

Le misure della lattina standard sono $2r_{\text{std}} \approx 6{,}5$cm, $h_{\text{std}} \approx 11{,}5$cm, ossia $q_{\text{std}} \approx 1{,}8$, che corrispondono a una superficie laterale di

$$S_{\text{std}} = (1+2q_{\text{std}})q_{\text{std}}^{-2/3}\sqrt[3]{2\pi V^2} \approx (1+2\cdot 1{,}8)1{,}8^{-2/3}\sqrt[3]{2\pi(330\,\text{cm}^3)^2} \approx 274\text{ cm}^2\,.$$

L'area esterna della lattina standard è circa il 3,6% maggiore di quella ottimale.