Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Compitino del 5 dicembre 1996

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.
Ogni esercizio svolto e spiegato bene vale 5 punti.

1. Dimostrare che la disuguaglianza $(1-a)^n < \dfrac{1}{1+na}$ vale per ogni $0 < a < 1$ ed $n \geq 1$.

2. Provare che $3^n > 1 + 4 + 8 + 12 + \cdots + 4(n-1)$ per ogni $n \geq 1$.

3. Provare che per ogni $n \geq 1$ si ha che $\quad 8\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k < (2n+1)^2$.

4. Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2 + n\,\mathrm{sen}\, n!}{3n^2 - \sqrt{n}\cos n^n}\right)^n$.

5. Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(n^2)!}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$.

6. Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right)$.

7. Provare che la seguente serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2^n}\,\mathrm{sen}\,\frac{x^2}{3^n}\cos n!\,$.

8. Calcolare, se esiste, il $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^3}{(\frac{n}{2}+3)^4}+\frac{2^3}{(\frac{n}{2}+3)^4}+\cdots+\frac{n^3}{(\frac{n}{2}+3)^4}\right)$.

9. Calcolare, se esiste, il $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{\sqrt[3]{n^3+3k}}$.

10. Dimostrare che se a_n è una successione *crescente* e positiva allora la serie seguente converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\,.$$

11. Dire se la seguente successione iterativa è monotona, se ammette limite, e, qualora esista, calcolarlo:

$$\begin{cases} a_0>0, \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}\,. \end{cases}$$

12. Dire se la seguente successione iterativa è monotona, se ammette limite, e, qualora esista, calcolarlo:

$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n}\,. \end{cases}$$

13. Si studi per $n\to+\infty$ il comportamento delle due soluzioni dell'equazione nell'incognita reale x

$$3x^2+n\pi x-3n\sqrt{2}=0\,.$$