Europ. J. Combinatorics (1980) **1**, 113–138

Sur l'Inversion et l'Itération Continue des Séries Formelles

G. LABELLE

This paper deals with the composition of normalised formal power series, in one variable, over an arbitrary field $\mathbb{K}$ of characteristic zero. A suitable group structure $\mathbb{B}^{\odot}$ on the set $\mathbb{B}$ of polynomial sequences of binomial type is introduced. This group is used first to obtain many formal variants of the classical Lagrange inversion formula (without using any complex integration). Secondly, via one-parameter subgroups of $\mathbb{B}^{\odot}$, iteration (i.e., successive composition) of normalised formal power series is studied in detail for arbitrary orders $s \in \mathbb{K}$ ("continuous" iteration). The case $s = -1$ coincides with power series inversion. Many new formulas are derived in the course of the text. The end of the work contains suggestions for future research.

1. INTRODUCTION

Le problème de l'interpolation de la fonction $n!$ a été résolu par Euler par l'introduction de sa fameuse fonction gamma $\Gamma(s)$, $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0, -1, -2, \ldots$. Les propriétés de cette fonction ont permis en outre à Liouville et Riemann d'étendre l'opérateur $\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n$ de dérivation d'ordre n au cas où l'entier n est remplacé par un nombre complexe s. Cette extension a depuis fait l'objet de nombreux travaux.

Dans le même ordre d'idées, nous allons traiter ici le problème d'étendre l'itération (discrète) d'ordre n

$$f^{\langle n\rangle}(z) = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f(z)}_{n \text{ fois}}$$

des séries formelles (unitaires)

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots \in \mathbb{C}[\![z]\!]$$

au cas où l'ordre est remplacé par un nombre complexe s quelconque (itération continue).

Il existe une approche classique à ce problème. Elle fait appel aux matrices infinies de Jabotinski. On peut la trouver, par exemple, dans Comtet [2]. Nous l'abordons ici de façon différente. En plus d'offrir un éclairage nouveau à la situation, le traitement qui en découlera permettra la mise en évidence d'un bon nombre de formules et résultats inédits.

Dans notre approche nous munissons d'abord d'une structure de groupe (non abélien) certaines suites de polynômes (appelées suites de type binomial). Cette structure de groupe réflètera si fidèlement la composition (i.e., la substitution) des séries formelles que nous ramènerons le problème considéré à l'étude de certains sous-groupes à un paramètre du groupe introduit. Au cours de notre démarche nous obtiendrons de plus, par des procédés formels extrêmement simples et directs, diverses reformulations du théorème classique de Lagrange concernant l'inversion (i.e. l'itération d'ordre -1) des séries de puissances.

Le présent texte utilise seulement le langage des séries formelles. Sa lecture ne demande donc aucun prérequis spécial à part une certaine habileté à travailler dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$. On vérifiera facilement que les résultats que nous allons présenter demeurent valables même dans le contexte où le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est remplacé par un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque de caractéristique zéro.

L'article se termine par l'énumération de quelques thèmes généraux de recherches susceptibles d'être développés plus à fond à l'aide de nos méthodes.

0195–6698/80/020113+26 $01.00/0

2. Suites de Type Binomial, le Groupe $\mathbb{B}^{\odot}$

Considérons une série formelle unitaire quelconque du type

$$\varphi(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{1}$$

alors il existe une et une seule suite de *polynômes*

$$P = (P_n(x))_{n\geq 0}, \qquad \deg P_n \leq n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

pour laquelle on ait l'identité formelle

$$[\varphi(z)]^x = \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n. \tag{2}$$

Pour vérifier ce résultat (trop peu connu), il suffit de considérer le développement

$$[\varphi(z)]^x = [1 + (c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)]^x = \sum_{k\geq 0} \binom{x}{k} (c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)^k,$$

de remarquer que la série obtenue est en fait sommable, de collecter les puissances semblables de z et de constater que le coefficient de z^n obtenu est une combinaison linéaire à coefficients constants des polynômes

$$\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \ldots, \binom{x}{n} \quad \text{où} \quad \binom{x}{\mu} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-\mu+1)/\mu!.$$

Les polynômes $P_n(x)$ donnés par (2) ne sont pas complètement arbitraires car l'identité

$$[\varphi(z)]^{x+y} = [\varphi(z)]^x \cdot [\varphi(z)]^y \tag{3}$$

ainsi que l'égalité $[\varphi(z)]^0 = 1$ montrent qu'ils forment une suite satisfaisant la définition suivante.

Définition 1. Une suite non identiquement nulle de polynômes $P = (P_n(x))_{n\geq 0}$ est dite *suite de type binomial* si et seulement si pour chaque $n = 0, 1, 2, \ldots,$ on a l'identité suivante

$$P_n(x+y) = \sum_{i+j=n} P_i(x) P_j(y). \tag{4}$$

L'ensemble des suites de type binomial sera noté par la lettre $\mathbb{B}$.

Le cas particulier où $\varphi(z) = \exp(z)$ donne $P_n(x) = x^n/n!$ et l'identité (4) devient, après multiplication par $n!$, la formule classique du binôme de Newton. Cela justifie la terminologie employée dans la Définition 1. Le lecteur vérifiera (par exemple, par induction sur n) que toute suite $P = (P_n(x))_{n\geq 0} \in \mathbb{B}$ satisfait

$$\deg P_n \leq n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

et

$$P_0(0) = 1, \qquad P_n(0) = 0 \quad \text{pour } n > 0. \tag{6}$$

Introduisons maintenant deux notations:

$$\mathbb{U} = \{\varphi(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!] \mid \varphi(z) = 1 + \cdots\} \tag{7}$$

$$\mathbb{S} = \{f(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!] \mid f(z) = z + \cdots\}. \tag{8}$$

Il est bien connu que (7) forme un groupe (abélien) sous la multiplication ordinaire des séries formelles tandis que (8) forme un groupe (non abélien) sous la composition (i.e., la substitution) des séries formelles. Il est immédiat que

$$\mathbb{S} = z\mathbb{U}. \tag{9}$$

On vérifie que (2) établit en fait une *bijection canonique* entre $\mathbb{U}$ et $\mathbb{B}$. Cette relation bijective sera désignée par la notation compacte

$$\varphi(z) \sim (P_n(x))_{n\geq 0} \quad \text{(ou simplement } \varphi \sim P\text{)}. \tag{10}$$

En effet, si $P \in \mathbb{B}$ est donnée, alors $\varphi(z)$ prend nécessairement la forme

$$\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} P_n(1) z^n. \tag{11}$$

Les $P = (P_n(x))_{n\geq 0} \in \mathbb{B}$ sont caractérisées par leurs valeurs $(P_n(1))_{n\geq 0}$ en $x = 1$.

À cause de l'Égalité (9) on déduit une autre bijection canonique entre, cette fois, $\mathbb{S}$ et $\mathbb{B}$. Par abus de notation nous utiliserons encore le symbole $\sim$ pour la désigner. On écrira donc

$$f(z) \sim (P_n(x))_{n\geq 0} \quad \text{(ou simplement } f \sim P\text{)} \tag{12}$$

lorsque $f(z) = z\varphi(z) \in \mathbb{S}$, $\varphi(z) \in \mathbb{U}$ et $\varphi \sim P$. Ces deux bijections permettent de transporter les structures de groupe de $\mathbb{U}$ et $\mathbb{S}$ pour ainsi munir $\mathbb{B}$ de deux structures de groupe que nous désignerons respectivement par $\mathbb{B}^*$ et $\mathbb{B}^{\odot}$.

La première structure est triviale et immédiate. Elle se décrit comme suit. Si $P, Q \in \mathbb{B}$, on définit $P*Q \in \mathbb{B}$ par la "convolution"

$$(P * Q)_n(x) = \sum_{i+j=n} P_i(x) Q_j(x). \tag{13}$$

Le neutre $E \in \mathbb{B}$ est simplement la suite

$$E_n(x) = \delta_0^n \quad (\delta_j^i = \text{symbole de Kronecker}) \tag{14}$$

tandis que l'inverse de $P \in \mathbb{B}$ est donné par $P^{[-1]}$ où

$$P_n^{[-1]}(x) = P_n(-x). \tag{15}$$

Les Formules (13), (14) et (15) découlent directement de l'identité

$$(\varphi \cdot \psi)^x = \varphi^x \cdot \psi^x \tag{16}$$

où $\varphi, \psi \in \mathbb{U}$, $\varphi \sim P$, $\psi \sim Q$ et de $1 \sim E$. Le groupe $\mathbb{B}^*$ ainsi défini est donc abélien et isomorphe à $\mathbb{U}$.

La deuxième structure de groupe est beaucoup plus intéressante. Sa description sera précédée par un lemme concernant une identité peu remarquée (tirée de [7]) qui est satisfaite par toutes les suites de type binomial.

LEMME 1. *Toute suite $P = (P_n(x))_{n\geq 0}$ de type binomial satisfait, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, l'identité*

$$nxP_n(x+y) = (x+y) \sum_{i+j=n} iP_i(x) P_j(y). \tag{17}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \mathbb{U}$ telle que $\varphi \sim P$. En dérivant formellement $[\varphi(z)]^{x+y}$ et $[\varphi(z)]^x$ par rapport à z on obtient

$$x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \varphi^{x+y} = (x+y) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \varphi^x\right] \varphi^y.$$

L'Identité (17) découle alors d'une application de (2).

PROPOSITION 1. *L'opération binaire* $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \xrightarrow{\odot} \mathbb{B}$ *définie par*

$$(P \odot Q)_n(x) = \sum_{i+j=n} P_i(x) Q_j(x+i) \tag{18}$$

munit l'ensemble $\mathbb{B}$ *des suites de type binomial d'une loi de groupe non abélien dont l'élément neutre* $E \in \mathbb{B}$ *est donné par*

$$E_n(x) = \delta_0^n \tag{19}$$

et dont l'inverse $P^{\langle -1 \rangle}$ *de l'élément* $P \in \mathbb{B}$ *est fourni par la formule compacte*

$$P_n^{\langle -1 \rangle}(x) = \frac{x}{x+n} P_n(-x-n). \tag{20}$$

Le groupe $\mathbb{B}^{\odot}$ *ainsi obtenu est isomorphe, via* $\sim$, *au groupe* $\mathbb{S}$.

DÉMONSTRATION. Soient $f, g, h \in \mathbb{S}$, où $f(z) = z\varphi(z)$, $g(z) = z\psi(z)$, $h(z) = z\eta(z)$ avec φ, ψ, $\eta \in \mathbb{U}$. Posons $f \sim P$, $g \sim Q$, $h \sim R$. Alors, $h = f \circ g$ si et seulement si $R = P \odot Q$ comme le montre le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} R_n(x) z^n &= [\eta(z)]^x = [f(g(z))/z]^x \\
&= [\psi(z) \cdot \varphi(g(z))]^x = [\varphi(z\psi(z))]^x \cdot [\psi(z)]^x \\
&= \Big(\sum_{i \geq 0} P_i(x) z^i [\psi(z)]^i \Big) \cdot \sum_{k \geq 0} Q_k(z) z^k \\
&= \Big(\sum_{i,r \geq 0} P_i(x) Q_r(i) z^{i+r} \Big) \cdot \sum_{k \geq 0} Q_k(x) z^k \\
&= \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{i+r+k=n} P_i(x) Q_r(i) Q_k(x) \Big) z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \Big[\sum_{i+j=n} P_i(x) \Big(\sum_{r+k=j} Q_r(i) Q_k(x) \Big) \Big] z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{i+j=n} P_i(x) Q_j(x+i) \Big) z^n \qquad (\text{car } Q \in \mathbb{B}).
\end{aligned}$$

L'opération $\odot$ est donc bien (à cause de la bijectivité de $\sim$) une loi de groupe qui fait de l'ensemble $\mathbb{B}$ un groupe $\mathbb{B}^{\odot}$ isomorphe à $\mathbb{S}$. On vérifie que E donné par (19) est l'élément neutre de ce groupe. Il nous reste donc à démontrer que (20) fournit bien l'inverse de P selon $\odot$. L'équation $P \odot P^{\langle -1 \rangle} = E$ détermine $P^{\langle -1 \rangle}$ de façon unique et (20) décrit (à cause de (6)) un polynôme de degré $\leq n$. Il suffit donc, par la substitution de (20) pour Q dans (18), de prouver que

$$\sum_{i+j=n} P_i(x) \frac{x+i}{(x+i)+j} P_j(-(x+i)-j) = \delta_0^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

c'est-à-dire, de montrer que

$$\frac{1}{x+n} \sum_{i+j=n} P_i(x)(x+i) P_j(-x-n) = \delta_0^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Cette dernière égalité est trivialement vérifiée quand $n = 0$. Quand $n > 0$, le calcul (basé sur (4) et le Lemme 1 avec $y = -x-n$):

$$x \sum_{i+j=n} P_i(x) P_j(-x-n) + \sum_{i+j=n} i P_i(x) P_j(-x-n) = x P_n(-n) + \frac{nx}{(-n)} P_n(-n) = 0$$

montre qu'elle est encore vérifiée. D'où le résultat.

Dans [13] (voir aussi [3], [4], [12]), G.-C. Rota et R. Mullin utilisent une définition de suite de type binomial un peu plus sévère que celle que nous prenons dans la Définition 1. Ils ajoutent à (4) la condition supplémentaire

$$\deg P_n = n$$

au lieu de (5). Selon cette définition, les opérations $*$ et $\odot$ introduites plus haut ne forment plus cependant des lois de groupe (pour le vérifier, prendre par exemple, $\varphi = 1+z \sim P$, $\psi = 1-z \sim Q$ pour $*$ et $f = z(1+z) \sim P$, $g = z(1-z) \sim Q$ pour $\odot$). Cependant, étant donné que leur théorie extrêmement élégante relie bijectivement leur notion de suite de type binomial à celle de delta-opérateur (i.e., opérateur linéaire $Q:\mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x]$ commutant avec l'opérateur de translation et tel que $Qx \in \mathbb{C}^*$) et qu'elle contient une foule de renseignements et d'exemples à propos des suites de type binomial, nous suggérons fortement au lecteur de consulter leurs travaux.

Bien qu'une certaine partie du traitement qui suivra pourrait être reformulée dans le contexte des travaux de G.-C. Rota, nous avons quand même choisi de présenter nos résultats en utilisant directement le langage des séries formelles. Cette façon de procéder permettra de mettre en évidence l'efficacité d'une exploitation systématique des propriétés de $\sim$ et du groupe $\mathbb{B}^{\odot}$ devant l'inversion et l'itération continue.

3. Diverses Formules Concernant l'Inversion

Etant donnée une série de puissances

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \qquad a_1 \neq 0$$

ayant un rayon de convergence strictement positif, le problème classique de l'inversion consiste en la détermination explicite du développement de la fonction inverse

$$z = f^{\langle -1\rangle}(w) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \cdots, \qquad b_1 \neq 0$$

en termes du développement de $f(z)$. Le procédé usuel pour résoudre ce problème consiste en l'utilisation d'une intégrale complexe selon un chemin simple fermé C (assez petit) autour de l'origine. Plus précisément, la formule intégrale de Cauchy montre (après quelques manipulations bien connues) que

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{f(\zeta)-w} \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{[f(\zeta)]^n}\right)\frac{w^n}{n}. \end{aligned}$$

Comme $[f(\zeta)]^{-n}$ possède un pôle d'ordre n en $\zeta = 0$, on obtient via la théorie des résidus, que l'intégrale du terme général de la dernière sommation vaut en réalité

$$\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\zeta^{n-1}}\left[\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right]^n\Bigg|_{\zeta=0}.$$

Rebaptisant nos variables, nous arrivons alors au développement célèbre

$$f^{\langle -1\rangle}(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\zeta^{n-1}}\left[\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right]^n\Bigg|_{\zeta=0}. \tag{21}$$

Plus généralement, si $\Phi(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ possède un rayon de convergence strictement positif, alors, en utilisant plutôt l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(\zeta)f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{f(\zeta)-w}$$

on obtient d'une façon analogue

$$\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z))=\Phi(0)+\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\zeta^{n-1}}\left[\Phi'(\zeta)\left(\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right)^n\right]\bigg|_{\zeta=0}. \tag{22}$$

Nous conviendrons d'appeler (21) et (22) les formules classiques pour l'inversion de Lagrange.

On retrouvera dans E. Goursat [8] une démonstration élégante des Formules (21) et (22) qui ne fait pas appel à la notion d'intégrale de contour mais qui utilise plutôt seulement l'opération de dérivation. C'est à Laplace que Goursat attribue cette approche. Voir aussi Good [6] pour le cas de plusieurs variables.

A. M. Garsia et S. A. Joni [5], en utilisant la théorie des opérateurs de Rota–Mullin mentionnée plus haut, ont donné une démonstration relativement courte de (21) et (22) dans le contexte plus large des séries formelles. Voir aussi Joni [10] pour le cas multi-dimensionnel et Chottin [1].

Dans le cadre de notre approche, la présente section montrera à l'aide seulement des propriétés du groupe $\mathbb{B}^{\odot}$, comment on peut non seulement obtenir (21) et (22) de façon très directe dans le contexte des séries formelles, mais explicitera aussi un bon nombre de formules décrivant plus à fond la nature de l'inversion formelle. Pour ne pas alourdir inutilement le texte, convenons d'abord d'une définition.

DÉFINITION 2

(a) On dira qu'un couple (F, G) où $F, G\in\mathbb{C}[\![z]\!]$, $F(0)=0=G(0)$, $F'(0)\neq 0\neq G'(0)$, est un couple de Lagrange s'il satisfait $F\circ G(z)=G\circ F(z)=z$. L'ensemble de ces couples sera désigné par $\mathbb{L}$.

(b) On dira d'un couple de Lagrange (f, g) qu'il est normalisé si on a plutôt $f, g\in\mathbb{S}$. L'ensemble de ces couples sera désigné par $\mathbb{L}_1$.

Remarquons tout de suite que tout théorème concernant les couples de Lagrange (F, G) revient à un théorème concernant les couples de Lagrange normalisés (f, g). En effet, si $F(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$, il suffit de poser $F(z)=a_1f(z)$ et $G(z)=g(z/a_1)$ pour conclure que $(F, G)\in\mathbb{L}\Leftrightarrow(f, g)\in\mathbb{L}_1$. A cause de cela notre étude portera donc le plus souvent sur $\mathbb{L}_1$ plutôt que sur $\mathbb{L}$.

PROPOSITION 2. *Les suites de type binomial fournissent les trois paramétrisations suivantes de l'ensemble* $\mathbb{L}_1$ *de tous les couples de Lagrange normalisés.*

(a) *Lorsque* P *parcourt* $\mathbb{B}$ *alors* $(f, f^{\langle -1\rangle})$ *défini par*

$$\left.\begin{aligned} f(z)&=z\sum_{n\geqslant 0}P_n(1)z^n\\ f^{\langle -1\rangle}(z)&=z\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}P_n(-n-1)z^n\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

parcourt (bijectivement) l'ensemble $\mathbb{L}_1$.

(b) *Soient $s, t \in \mathbb{C}$ fixés tels que $s+t=1$. Lorsque T parcourt $\mathbb{B}$ alors $(f, f^{\langle -1\rangle})$ défini par*

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+ns} T_n(1+ns)z^n \\ f^{\langle -1\rangle}(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+nt} T_n(-1-nt)z^n \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

parcourt (bijectivement) l'ensemble $\mathbb{L}_1$.

(c) *Lorsque S parcourt $\mathbb{B}$ alors $(f, f^{\langle -1\rangle})$ défini par*

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{2}{n+2} S_n(n+2)z^n \\ f^{\langle -1\rangle}(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{2}{n+2} S_n(-n-2)z^n \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

parcourt (bijectivement) l'ensemble $\mathbb{L}_1$.

DÉMONSTRATION. La partie (a) découle directement de la Proposition 1. Pour le voir, il suffit d'utiliser l'isomorphisme $\sim$ pour écrire $f \sim P$ et $f^{\langle -1\rangle} \sim P^{\langle -1\rangle}$, de poser ensuite $x=1$ dans (20) et d'utiliser le fait que l'"évaluation" au point $x=1$ donnée par $P \mapsto (P_n(1))_{n\geq 0}$ est une bijection entre $\mathbb{B}$ et les suites quelconques du type $(1, a_1, a_2, \ldots,)$. Tournons nous maintenant vers la démonstration de la partie (b). Les cas $s=0$ ou $t=0$ étant une réécriture de la partie (a), il suffit donc de considérer le cas où $s \neq 0 \neq t$. Posons pour $f, g \in \mathbb{S}$

$$f(z) = z\varphi(z) \sim P, \qquad g(z) = z\psi(z) \sim Q$$

et définissons $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathbb{U}$ par

$$(z[\varphi(z)]^s, z[\tilde{\psi}(z)]^s) \in \mathbb{L}_1, \qquad (z[\tilde{\varphi}(z)]^t, z[\psi(z)]^t) \in \mathbb{L}_1. \tag{26}$$

Il n'y a qu'une et une seule façon de faire cela. Comme $s \neq 0 \neq t$, on obtient que lorsque f et g parcourent $\mathbb{S}$ alors les couples (26) parcourent chacun bijectivement $\mathbb{L}_1$. Tenant compte de (2) et de (20), on obtient

$$\tilde{\varphi}(z) \sim \frac{x}{x+nt} Q_n(-x-nt) = \tilde{P}_n(x) \quad \text{disons,} \tag{27}$$

$$\tilde{\psi}(z) \sim \frac{x}{x+ns} P_n(-x-ns) = \tilde{Q}_n(x) \quad \text{disons.} \tag{28}$$

Nous allons voir que

$$P \odot Q = E \text{ ssi } \tilde{P} * \tilde{Q} = E \tag{29}$$

En effet, $P \odot Q = E$ ssi $Q = P^{\langle -1\rangle}$ ssi

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(-x) &= \frac{-x}{-x+nt} Q_n(x-nt) \\ &= \frac{-x}{-x+nt} \cdot \frac{x-nt}{x-nt+n} P_n(-(x-nt)-n) \\ &= \frac{x}{x+(1-t)n} P_n(-x-n(1-t)) \\ &= \frac{x}{x+ns} P_n(-x-ns) = \tilde{Q}_n(x), \quad \text{car } s+t=1. \end{aligned}$$

Comme les couples $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ tels que $\tilde{P} * \tilde{Q} = E$ peuvent se paramétriser par les $T \in \mathbb{B}$ en posant

$$\tilde{P}_n(x) = T_n(x), \qquad \tilde{Q}_n(x) = T_n(-x) \tag{30}$$

on obtient (via (30), (27) et (28)) que lorsque T parcourt $\mathbb{B}$ alors les couples (P, Q) définis par

$$P_n(x) = \frac{x}{x+ns} T_n(x+ns), \qquad Q_n(x) = \frac{x}{x+nt} T_n(-x-nt) \tag{31}$$

parcourent bijectivement les solutions de $P \odot Q = E$. On conclue en posant $x = 1$ dans (31). La partie (c) s'ensuit immédiatement en prenant $s = t = 1/2$ et en définissant $S \in \mathbb{B}$ par $S_n(x) = T_n(2x)$.

Remarque. Prenons le cas particulier $f(z) = \ln(1+z)$, $f^{\langle -1 \rangle}(z) = e^z - 1$ et considérons les développements bien connus

$$[z^{-1} \ln(1+z)]^k = \sum_{n \geqslant 0} (k+1)^{-1} \cdots (k+n)^{-1} \cdot \mathfrak{s}_k^{n+k} z^n \tag{32}$$

$$[z^{-1}(e^z - 1)]^k = \sum_{n \geqslant 0} (k+1)^{-1} \cdots (k+n)^{-1} \cdot \mathfrak{S}_k^{n+k} z^n \tag{33}$$

où $\mathfrak{s}_n^m$ et $\mathfrak{S}_n^m$ désignent respectivement les nombres de Stirling de la première et de la deuxième espèce. Les polynômes correspondants $S_n(x)$ apparaissant dans la formule symétrique d'inversion (25) fournissent une sorte de "synthèse symétrique" des deux espèces de nombres de Stirling à la fois.

Comme la démonstration précédente relie les structures de groupe $\mathbb{B}^*$ et $\mathbb{B}^{\odot}$, nous en réunissons l'essentiel sous forme d'un premier corollaire.

Corollaire 1. *Soient $s, t \in \mathbb{C}$ fixés tels que $s + t = 1$, $s \neq 0 \neq t$. Alors, $(f(z), g(z)) = (z\varphi(z), z\psi(z)) \in \mathbb{L}_1$ si et seulement si*

$$(z[\varphi(z)]^s, z[\tilde{\psi}(z)]^s) \in \mathbb{L}_1 \quad \textit{et} \quad (z[\tilde{\varphi}(z)]^t, z[\psi(z)]^t) \in \mathbb{L}_1,$$

où $\tilde{\varphi}(z) \cdot \tilde{\psi}(z) = 1$. En posant $\varphi \sim P$, $\psi \sim Q$, $\tilde{\varphi} \sim \tilde{P}$ et $\tilde{\psi} \sim \tilde{Q}$, on a

$$P \odot Q = E \quad \textit{ssi} \quad \tilde{P} * \tilde{Q} = E$$

(i.e., $f \circ g(z) = z$ ssi $\tilde{\varphi}(z) \cdot \tilde{\psi}(z) = 1$).

Finalement, les solutions (P, Q), $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ de ces équations simultanées peuvent se paramétriser (bijectivement) par les $T \in \mathbb{B}$ en utilisant (27), (28) *et* (31).

En regard de la littérature existante (voir [13]), on pourrait appeler la suite $P_n(x)$ donnée par (31) la $(-s)$-abélianisée de la suite $T_n(x)$. Le Corollaire 1 explicite donc une relation directe entre *abélianisation* et *inversion*.

Le prochain corollaire contient en outre les formules classiques pour l'inversion de Lagrange.

Corollaire 2

(a) *Pour tous $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ et $\Phi \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ où $f(0) = 0 \neq f'(0)$, les formules classiques* (21) *et* (22) *sont valables.*

(b) *Soient s, $t \in \mathbb{C}$ fixés tels que $s+t=1$. Lorsque $\theta(z)$ parcourt $\mathbb{U}$, alors les couples $(f, f^{\langle -1\rangle})$ donnés par*

$$\begin{aligned} f(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{1}{1+ns} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n} [\theta(\zeta)]^{1+ns}\bigg|_{\zeta=0} \\ f^{\langle -1\rangle}(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{1}{1+nt} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n} [(\theta(\zeta)]^{-1-nt}\bigg|_{\zeta=0} \end{aligned} \tag{34}$$

parcourent (bijectivement) tous les couples de Lagrange normalisés.

(c) *Lorsque $\sigma(z)$ parcourt $\mathbb{U}$, alors les couples $(f, f^{\langle -1\rangle})$ donnés par*

$$\begin{aligned} f(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{2}{2+n} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n} [\sigma(\zeta)]^{2+n}\bigg|_{\zeta=0} \\ f^{\langle -1\rangle}(z) &= z \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{2}{2+n} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n} [\sigma(\zeta)]^{-2-n}\bigg|_{\zeta=0} \end{aligned} \tag{35}$$

parcourent (bijectivement) $\mathbb{L}_1$.

Démonstration. Pour (a), il suffit de démontrer la formule (22) puisqu'elle contient (21) comme cas particulier. On peut même se restreindre au cas où f est normalisée à cause de la remarque qui précède la Proposition 2. Comme (22) est linéaire en Φ, il suffit de considérer le cas où $\Phi(z)=z^\nu$ avec $\nu \geq 1$ (le cas où $\nu=0$ est trivial). Posant $f \sim P$ on a (tenant compte de (20)):

$$\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z)) = \sum_{n\geq \nu} \nu P_{n-\nu}(-n)\frac{z^n}{n}.$$

Mais, $\nu P_{n-\nu}(-n) = \text{coeff de } \zeta^{n-1} \text{ dans } \Phi'(\zeta)(f(\zeta)/\zeta)^{-n}$.

Pour vérifier la partie (b), on n'a qu'à utiliser (24) de la Proposition 2 et poser $\theta(z) \sim T$. On a alors tout de suite

$$T_n(1+ns) = \text{coeff de } \zeta^n \text{ dans } [\theta(\zeta)]^{1+ns}$$

$$T_n(-1-nt) = \text{coeff de } \zeta^n \text{ dans } [\theta(\zeta)]^{-1-nt}.$$

La partie (c) découle de (b) en posant $s=t=1/2$ et $\sigma=\theta^2$.

Remarque. Soient $f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, $a_1 \neq 0$ et $\Phi(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, alors on a aussi les développements suivants parents de (21) et (22):

$$f^{\langle -1\rangle}(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!}\left[(f'(\zeta))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right]^n \zeta\bigg|_{\zeta=0} \tag{36}$$

$$\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z)) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\left[(f'(\zeta))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right]^n \Phi(\zeta)\bigg|_{\zeta=0} \tag{37}$$

Pour le voir, il suffit de démontrer (37). Pour ce, considérons d'abord le développement de Taylor de

$$\Phi \circ f^{\langle -1\rangle}(f(\zeta)+z)$$

autour du point $z=0$. Comme on vérifie facilement par induction que

$$(\Phi \circ f^{\langle -1\rangle})^{(n)}(f(\zeta)) = \left[\frac{1}{f'(\zeta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right]^n \Phi(\zeta), \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

on obtient alors que

$$\Phi \circ f^{\langle -1\rangle}(f(\zeta)+z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\left[(f'(\zeta))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right]^n \Phi(\zeta) \tag{38}$$

et il suffit de poser $\zeta = 0$ pour obtenir le résultat cherché.

La preuve très simple de (37) que nous venons de donner est indépendante du groupe $\mathbb{B}^{\odot}$ et n'utilise que le développement Taylorien. On vérifie aisément qu'elle peut même se reformuler directement dans le contexte multidimensionnel. On remarquera la parenté de (37) avec une formule générale de W. Gröbner [9] concernant les fonctions holomorphes implicitement définies.

Plus bas, le Corollaire 3 contient une variante de (22) qui ne fait pas appel cette fois à une évaluation à l'origine des dérivées impliquées. Cette variante, connue de Lagrange, est quelquefois appelée la G-formule d'inversion et peut même, elle aussi, se formuler dans le contexte multidimensionnel [10]. A. M. Garsia et S. A. Joni [5] en ont donné une démonstration courte en faisant appel à la théorie des opérateurs mentionnée plus haut. Le groupe $\mathbb{B}^{\odot}$ permet aussi une preuve directe de cette formule (ainsi qu'une généralisation). La voici.

COROLLAIRE 3. *Soient $f \in \mathbb{S}$ et $\Phi \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Si on pose $f(z) = z - g(z)$ où $g(0) = g'(0) = 0$ alors*

$$\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z)) = \Phi(z) + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1}\{\Phi'(z)[g(z)]^k\}. \tag{39}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit, comme plus haut, de ne considérer que le cas où $\Phi(z) = z^{\nu}$, $\nu \geq 1$. Posons $f(z) = z - g(z) = z(1+h(z)) = z\varphi(z) \sim P$, $f^{\langle -1\rangle}(z) = z\psi(z) \sim P^{\langle -1\rangle}$. Ecrivons $[h(z)]^k = \sum_{n\geq k} C_n^{(k)} z^n$. Les formules (2) et (20) donnent

$$P_n(x) = \sum_{k\leq n} C_n^{(k)}\binom{x}{k} \quad \text{et} \quad P_n^{\langle -1\rangle}(x) = \frac{x}{x+n}\sum_{k\leq n} C_n^{(k)}\binom{-x-n}{k}.$$

posant $x = \nu$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z)) &= [f^{\langle -1\rangle}(z)]^{\nu} = z^{\nu}[\psi(z)]^{\nu} = \sum_{n\geq 0} P_n^{\langle -1\rangle}(\nu) z^{\nu+n}\\ &= z^{\nu} + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\nu\sum_{n\geq k}(\nu+n+1)\ldots(\nu+n+k-1)C_n^{(k)}\right]z^{\nu+n}\\ &= z^{\nu} + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1}\{\nu z^{\nu-1}[g(z)]^k\}.\end{aligned}$$

GÉNÉRALISATION. Si au lieu de $f(z) = z(1+h(z))$ on avait $f(z) = z\sigma(h(z))$ où $\sigma \in \mathbb{U}$, $\sigma \sim S \in \mathbb{B}$, alors en remplaçant systématiquement $\binom{x}{k}$ par $S_k(x)$, on obtiendrait de façon analogue la formule

$$\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z)) = \Phi(z) + \sum_{k\geq 1} T_k\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\{z\Phi'(z)[h(z)]^k\} \tag{40}$$

où $T_k(x) = S_k(-x)/x$.En particulier, si $f(z) = z\,\mathrm{e}^{h(z)}$, $h(0) = 0$, alors $S_k(x) = x^k/k!$ et on trouve

$$\Phi(f^{\langle -1\rangle}(z)) = \Phi(z) + \sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1}\{z\Phi'(z)[h(z)]^k\}. \tag{41}$$

Les deux formules d'inversion particulières contenues dans la prochaine proposition sont en fait des conséquences des formules générales d'itération continue développées dans la Section 4. Nous avons décidé de les présenter immédiatement pour ne pas nuire à l'unité de texte.

PROPOSITION 3.

(a) *Désignons par* $O(z^2)$ *l'ensemble des* $\omega(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ *telles que* $\omega(0) = \omega'(0) = 0$. *Lorsque* $\omega(z)$ *parcourt* $O(z^2)$ *alors les couples* $(f, f^{\langle -1 \rangle})$ *définis par*

$$f(z) = e^{\omega(z)D} z, \qquad f^{\langle -1 \rangle}(z) = e^{-\omega(z)D} z, \qquad D = d/dz \tag{42}$$

parcourent bijectivement l'ensemble $\mathbb{L}_1$ *de tous les couples de Lagrange normalisés.*

(b) *Soit* $f(z) \in \mathbb{S}$, *alors on a la formule explicite suivante pour* $f^{\langle -1 \rangle}(z)$ *en termes des itérées "entières positives" de* $f(z)$:

$$f^{\langle -1 \rangle}(z) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f(z).}_{k-1 \text{ facteurs}} \tag{43}$$

DÉMONSTRATION. La partie (a) découle (via $s = -1$) de la Proposition 4 donnée plus bas tandis que la partie (b) sera établie dans les remarques qui suivront la proposition 6 contenue dans la prochaine section.

4. L'ITÉRATION CONTINUE

La présente section traite le problème de l'itération continue proprement dite des éléments de $\mathbb{S}$. Enonçons d'abord un lemme concernant l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

LEMME 2. *Pour tout* $f(z) = z(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) \in \mathbb{S}$, *il existe une et une seule suite de polynômes* $a_0(s) = 1$, $a_1(s)$, $a_2(s), \ldots,$ *telle que* $\deg a_n(s) \leq n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *et pour laquelle* $f^{\langle s \rangle}(z)$ *définie par*

$$f^{\langle s \rangle}(z) = z(1 + a_1(s)z + a_2(s)z^2 + \cdots) \in \mathbb{S}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{44}$$

satisfait les propriétés de l'itération continue, à savoir,

$$f^{\langle 0 \rangle}(z) = z, \qquad f^{\langle \nu \rangle}(z) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f(z),}_{\nu \text{ facteurs}} \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{45}$$

et

$$\forall s, t \in \mathbb{C}: f^{\langle s \rangle} \circ f^{\langle t \rangle}(z) = f^{\langle s+t \rangle}(z). \tag{46}$$

DÉMONSTRATION. Vérifions d'abord l'unicité. Si $a_n(s)$ et $a_n^*(s)$ sont deux suites de polynômes satisfaisant ces conditions alors pour chaque $n \geq 0$, on a $a_n(\nu) = a_n^*(\nu)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ à cause de (45). Les polynômes $a_n(s)$ et $a_n^*(s)$ sont donc identiques. Pour montrer maintenant qu'une telle suite de polynômes $a_n(s)$ existe effectivement, appliquons d'abord formellement la formule d'interpolation classique de Newton par rapport à la variable s en "définissant" $f^{\langle s \rangle}(z)$ par

$$f^{\langle s \rangle}(z) = \sum_{k \geq 0} \binom{s}{k} g_k(z) \tag{47}$$

où

$$g_k(z) = f^{\langle k \rangle}(z) - \binom{k}{1} f^{\langle k-1 \rangle}(z) + \binom{k}{2} f^{\langle k-2 \rangle}(z) - \cdots + (-1)^k f^{\langle 0 \rangle}(z). \tag{48}$$

Comme $g_0(z)=z$, $g_{k+1}(z)=g_k(f(z))-g_k(z)$, on en déduit tout de suite par induction sur k, que $g_k(z)=\mathrm{O}(z^{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$. L'expression (47) est donc sommable et appartient bien à $\mathbb{S}$. En écrivant maintenant (47) sous la forme (44), on voit que $a_n(s)$ est bien un polynôme en s de degré $\leqslant n$. Posant $s=\nu\in\mathbb{N}$ dans (47) on obtient que (45) est vérifiée. Soit maintenant $s\in\mathbb{C}$ quelconque et considérons $f^{\langle s\rangle}(f(z))$. Un réarrangement des termes de (47) montre que $f^{\langle s\rangle}(f(z))=f^{\langle s+1\rangle}(z)$. Une simple induction donne alors

$$f^{\langle s\rangle}(f^{\langle \nu\rangle}(z))=f^{\langle s+\nu\rangle}(z), \qquad s\in\mathbb{C}, \qquad \nu=0,1,2,\ldots. \tag{49}$$

Les coefficients des puissances semblables de z dans les deux membres de (49) étant des polynômes en ν qui prennent les mêmes valeurs en une infinité de points, on en déduit que ce sont des polynômes (en ν) identiques. On peut donc remplacer ν par $t\in\mathbb{C}$ et conclure que (46) est vérifiée identiquement. Incidemment, un raisonnement similaire montre qu'on a de plus,

$$\forall s,t\in\mathbb{C}: f^{\langle s\rangle\langle t\rangle}(z)=f^{\langle st\rangle}(z). \tag{50}$$

Le lecteur vérifiera, en appliquant cette fois la formule d'interpolation de Newton à $\ln[f^{\langle s\rangle}(z)/z]$ et en suivant le même type de démarche, que $f^{\langle s\rangle}(z)$ peut même s'écrire (en plus de (47)) sous la forme du *produit infini* suivant

$$f^{\langle s\rangle}(z)=z[h_1(z)]^s\cdot[h_2(z)]^{\frac{1}{2}s(s-1)}\cdot[h_3(z)]^{\frac{1}{6}s(s-1)(s-2)}\cdots. \tag{51}$$

où $h_0(z)=z$, $h_{k+1}(z)=h_k(f(z))/h_k(z)$, $k\geqslant 0$. Lorsque $k>0$, on a de plus $h_k(z)=1+\mathrm{O}(z^k)$.

Nous allons relier l'itération continue au groupe $\mathbb{B}^{\odot}$ des suites de type binomial introduit plus haut. Remarquons d'abord que l'ensemble $\mathbb{P}$ de toutes les suites de polynômes $(P_n(x))_{n\geqslant 0}$, *de type binomial ou non*, telles que $\deg P_n(x)\leqslant n$ forme une algèbre non commutative unitaire $\mathbb{P}^{\odot+}$ sous les opérations $+$ (terme à terme) et $\odot$ (définie par (18)). Il est clair que $\mathbb{B}^{\odot}$ est un sous-groupe multiplicatif du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{P}^{\odot+}$. Pour chaque $P\in\mathbb{P}^{\odot+}$ définissons $P^{\langle k\rangle}$ par $P^{\langle k\rangle}=P\odot P\odot\cdots\odot P$, k facteurs. On vérifie aisément que *si* $P_0(x)=0$ (i.e. le polynôme nul), alors $P_n^{\langle k\rangle}(x)=0$ si $k>n$. *Dans ce cas*, toute série infinie du type

$$S(P)=c_0E+c_1P+c_2P\odot P+\cdots+c_kP^{\langle k\rangle}+\cdots$$

est "sommable" au sens où elle fournit un élément de $\mathbb{P}^{\odot+}$ dont la composante d'indice n est le polynôme

$$S(P)_n(x)=c_0E_n(x)+c_1P_n(x)+\cdots+c_nP_n^{\langle n\rangle}(x), \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

On peut considérer les groupes $\mathbb{S}$ et $\mathbb{B}^{\odot}$ comme des groupes de Lie de "dimension infinie" (les paramètres pour $f\in\mathbb{S}$ étant les coefficients de f). Nous allons voir que certaines méthodes de la théorie classique des groupes de Lie peuvent s'appliquer même dans notre contexte purement formel.

Considérons à cet effet $f\in\mathbb{S}$ et posons

$$f\sim P\in\mathbb{B}^{\odot}, \qquad f^{\langle s\rangle}\sim P^{\langle s\rangle}\in\mathbb{B}^{\odot}.$$

Comme $f^{\langle s\rangle}\circ f^{\langle t\rangle}=f^{\langle s+t\rangle}$ et $P^{\langle s\rangle}\odot P^{\langle t\rangle}=P^{\langle s+t\rangle}$ ne dépendent que de la somme $s+t$, on a les développements parallèles qui suivent

$$\frac{\partial}{\partial s}f^{\langle s+t\rangle}=\frac{\partial}{\partial t}f^{\langle s+t\rangle} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial s}P^{\langle s+t\rangle}=\frac{\partial}{\partial t}P^{\langle s+t\rangle}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial s} f^{\langle s\rangle} \circ f^{\langle t\rangle} = \frac{\partial}{\partial t} f^{\langle s\rangle} \circ f^{\langle t\rangle} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial s} P^{\langle s\rangle} \odot P^{\langle t\rangle} = \frac{\partial}{\partial t} P^{\langle s\rangle} \odot P^{\langle t\rangle}.$$

Explicitement,

$$\frac{\partial}{\partial s} f^{\langle s\rangle}(f^{\langle t\rangle}(z)) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f^{\langle s\rangle}(f^{\langle t\rangle}(z))\right] \frac{\partial}{\partial t} f^{\langle t\rangle}(z). \qquad\qquad \left(\frac{\partial}{\partial s} P^{\langle s\rangle}\right) \odot P^{\langle t\rangle}(x) = P^{\langle s\rangle} \odot \frac{\partial}{\partial t} P^{\langle t\rangle}(x).$$

Posant $t = 0$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s} f^{\langle s\rangle} = \omega(z) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f^{\langle s\rangle} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial s} P^{\langle s\rangle} = P^{\langle s\rangle} \odot \Omega \tag{52}$$

où

$$\omega(z) = \frac{\partial}{\partial t} f^{\langle t\rangle}(z)\bigg|_{t=0} = z(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots) \in \mathrm{O}(z^2)$$

où

$$\Omega_n(x) = \frac{\partial}{\partial t} P_n^{\langle t\rangle}(x)\bigg|_{t=0} \in \mathbb{P}^{\odot +}$$

satisfait $\Omega_0(x) = 0$.

Résolvant pour $f^{\langle s\rangle}$ on a

$$f^{\langle s\rangle}(z) = \mathrm{e}^{s\omega(z)\mathrm{D}} z$$

où

$$\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}z.$$

Résolvant pour $P^{\langle s\rangle}$ on a

$$P^{\langle s\rangle}(x) = \mathrm{e}_{\odot}^{s\Omega}(x) \tag{53}$$

où

$$\mathrm{e}_{\odot}^{s\Omega} = E + \frac{s}{1!}\Omega + \frac{s^2}{2!}\Omega \odot \Omega + \cdots.$$

Le lien qui existe entre ω et Ω s'obtient de la façon suivante. L'hypothèse $f^{\langle t\rangle} \sim P^{\langle t\rangle}$ s'écrit explicitement

$$[f^{\langle t\rangle}(z)/z]^x = \sum_{n\geq 0} P_n^{\langle t\rangle}(x) z^n. \tag{54}$$

Si on applique ensuite l'opérateur $\partial/\partial t$ aux deux membres on trouve

$$x[f^{\langle t\rangle}(z)/z]^{x-1} \frac{\partial}{\partial t}[f^{\langle t\rangle}(z)/z] = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial}{\partial t} P_n^{\langle t\rangle}(x) z^n. \tag{55}$$

Posant $t = 0$, il vient

$$x\omega(z)/z = \sum_{n\geq 0} \Omega_n(x) z^n. \tag{56}$$

Comme

$$\omega(z) = z(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots), \tag{57}$$

on tire de (56) que les polynômes $\Omega_n(x)$ sont des polynômes *homogènes* de degré ≤ 1 donnés par

$$\Omega_n(x) = \alpha_n x, \qquad n \geq 0, \qquad \alpha_0 = 0. \tag{58}$$

Introduisons maintenant un sous-espace vectoriel $\mathbb{V}$ de $\mathbb{P}^{\odot +}$ en posant

$$\mathbb{V} = \{\Gamma \in \mathbb{P} | \Gamma_n(x) = \gamma_n x,\ \gamma_n \in \mathbb{C},\ n \geq 0,\ \gamma_0 = 0\}. \tag{59}$$

LEMME 3
(a) *L'application*

$$P \mapsto \Omega \text{ où } \Omega_n(x) = \frac{\partial}{\partial t} P_n^{\langle t \rangle}(x)\Big|_{t=0} \tag{60}$$

établit une bijection entre $\mathbb{B}$ *et* $\mathbb{V}$.
(b) *L'application*

$$f \mapsto \omega \text{ où } \omega(z) = \frac{\partial}{\partial t} f^{\langle t \rangle}(z)\Big|_{t=0} \tag{61}$$

établit une bijection entre $\mathbb{S}$ *et* $\mathrm{O}(z^2)$.

DÉMONSTRATION. L'injectivité de (60) est immédiate à cause de l'équation de droite dans (53). Montrons la surjectivité en nous donnant, *a priori*, un $\Omega \in \mathbb{V}$ et en *définissant* une suite $P^{\langle s \rangle}$ par

$$P^{\langle s \rangle} = \mathrm{e}_{\odot}^{s\Omega}. \tag{62}$$

On a alors évidemment $(\partial/\partial t)P^{\langle t \rangle}|_{t=0} = \Omega$, $P^{\langle 0 \rangle} = E$. De plus, $P^{\langle s \rangle} \odot P^{\langle t \rangle} = P^{\langle s+t \rangle}$ découle de la distributivité de $\odot$ sur $+$ dans l'algèbre $\mathbb{P}^{\odot+}$. Finalement, on a bien $P^{\langle s \rangle} \in \mathbb{B}$ (i.e. $P^{\langle s \rangle}$ est de type binomial). En effet, l'Équation (62) peut s'écrire explictement

$$P_n^{\langle s \rangle}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \Omega_n^{\langle k \rangle}(x) \tag{63}$$

et il faut montrer que

$$P_n^{\langle s \rangle}(x+y) = \sum_{i+j=n} P_i^{\langle s \rangle}(x) P_j^{\langle s \rangle}(y) \tag{64}$$

Utilisant (63), il suffit de vérifier que

$$\Omega_n^{\langle k \rangle}(x+y) = \sum_{\substack{i+j=n \\ \mu+\nu=k}} \frac{k!}{\mu!\,\nu!} \Omega_i^{\langle \mu \rangle}(x) \Omega_j^{\langle \nu \rangle}(y), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ceci peut se faire par une induction relativement délicate sur k dont nous laissons les détails au lecteur. L'injectivité de (61) découle de l'Équation (53) de gauche. Pour la surjectivité, donnons d'avance un $\omega(z) = z(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots) \in \mathrm{O}(z^2)$. Il faut trouver un $f \in \mathbb{S}$ satisfaisant (61). Pour le faire construisons d'abord un $\Omega \in \mathbb{V}$ en posant $\Omega_n(x) = \alpha_n x$, $n \geqslant 0$, $\alpha_0 = 0$. Définissant $P^{\langle s \rangle} \in \mathbb{B}$ par (62), il suffit alors de choisir f à l'aide de la bijection $\sim$ en posant $f \sim P$.

DÉFINITION 3. Lorsque (60) est satisfaite, on dira que Ω est le générateur (infinitésimal) de P et on écrira $\Omega = \operatorname{gen} P$. De même, lorsque (61) est satisfaite, on dira que ω est le générateur (infinitésimal) de f et on écrira $\omega = \operatorname{gen} f$.
Ces préliminaires peuvent se résumer par la proposition suivante.

PROPOSITION 4
(a) *L'équation* $\omega = \operatorname{gen} f$ *établit une bijection entre les* $f \in \mathbb{S}$ *et les* $\omega \in \mathrm{O}(z^2)$. *On a*

$$\omega = \operatorname{gen} f \Leftrightarrow f = \mathrm{e}^{\omega \mathrm{D}} z \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{C}: f^{\langle s \rangle} = \mathrm{e}^{s\omega \mathrm{D}} z. \tag{65}$$

(b) *L'équation* $\Omega = \operatorname{gen} P$ *établit une bijection entre les* $P \in \mathbb{B}$ *et les* $\Omega \in \mathbb{V}$. *On a*

$$\Omega = \operatorname{gen} P \Leftrightarrow P = \mathrm{e}_{\odot}^{\Omega} \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{C}: P^{\langle s \rangle} = \mathrm{e}_{\odot}^{s\Omega}. \tag{66}$$

(c) *Lorsque* $f \sim P$, $\Omega = \operatorname{gen} P$, $\omega = \operatorname{gen} f$, *on a alors*

$$\omega(z) = z(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots) \Leftrightarrow \Omega_n(x) = \alpha_n x, \qquad n \geqslant 0, \qquad \alpha_0 = 0. \tag{67}$$

Remarquons que pour tout $f \in \mathbb{S}$ et $\omega \in \mathrm{O}(z^2)$, on a

$$\omega(z) = \operatorname{gen} f(z) \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{C}\colon s\omega(z) = \operatorname{gen} f^{\langle s\rangle}(z). \tag{68}$$

Notons aussi que (65) peut s'écrire explicitement sous la forme

$$f^{\langle s\rangle}(z) = z + \frac{s}{1!}\omega(z) + \frac{s^2}{2!}\omega(z)\omega'(z) + \cdots + \frac{s^n}{n!}\omega_n(z) + \cdots \tag{69}$$

où $\omega_0(z) = z$, $\omega_1(z) = \omega(z)$, $\omega_{n+1}(z) = \omega(z)\omega_n'(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Le lecteur vérifiera que les $\Omega_n^{\langle k\rangle}(x)$ correspondants sont donnés explicitement par

$$\Omega_n^{\langle k\rangle}(x) = \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} x(x+i_1)(x+i_1+i_2)\cdots(x+i_1+\cdots+i_{k-1}). \tag{70}$$

EXEMPLES.

(i) Si $\omega(z) = 0 = \operatorname{gen} f$ avec $f \sim P$ alors, trivialement, $f(z) = z$, $f^{\langle s\rangle}(z) = z$, $P = E$, $P^{\langle s\rangle} = E$.

(ii) Si $\omega(z) = \alpha z^2 = \operatorname{gen} f$ avec $f \sim P$ alors, on vérifie que $f(z) = z(1-\alpha z)^{-1}$, $f^{\langle s\rangle}(z) = z(1-\alpha s z)^{-1}$

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n}{n!} x(x+1)\cdots(x+n-1), \qquad P_n^{\langle s\rangle}(x) = \frac{\alpha^n s^n}{n!} x(x+1)\cdots(x+n-1). \tag{71}$$

(iii) Un peu plus généralement, si $\omega(z) = \alpha z^{r+1} = \operatorname{gen} f$ (i.e. $\alpha_\nu = 0$ si $\nu \neq r$, $\alpha_r = \alpha$) où $f \sim P$ alors un calcul montre que

$$f(z) = z(1-\alpha r z^r)^{-1/r}, \qquad f^{\langle s\rangle}(z) = z(1-\alpha r s z^r)^{-1/r} \tag{72}$$

$$P_n^{\langle s\rangle}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^k s^k}{k!} x(x+r)\cdots(x+(k-1)r) & \text{si } n = kr \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{73}$$

PROPOSITION 5. *Soient* $f \in \mathbb{S}$ *et* $\omega \in \mathrm{O}(z^2)$ *où* $\omega = \operatorname{gen} f$, *on a alors*

$$[f^{\langle s\rangle}(z)/z]^x = \mathrm{e}^{sz^{-1}\omega(z)(x+z\mathrm{D})}1, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}z \tag{74}$$

Cette identité peut aussi s'écrire sous la forme symbolique

$$[f^{\langle s\rangle}(z)/z]^x = z^{-x}\,\mathrm{e}^{s\omega(z)\mathrm{D}} z^x, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}z. \tag{75}$$

DÉMONSTRATION. Posant $t = s$ dans (54), appliquant l'opérateur $\partial/\partial s$ aux deux membres et utilisant le fait (voir (52)) que

$$\frac{\partial}{\partial s} P_n^{\langle s\rangle}(x) = (P^{\langle s\rangle} \odot \Omega)_n(x) = \sum_{i+j=n} P_i^{\langle s\rangle}(x)\alpha_j(x+i) \tag{76}$$

on arrive, par un réarrangement de termes, à l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial s}[f^{\langle s\rangle}(z)/z]^x = z^{-1}\omega(z)(x+z\mathrm{D})[f^{\langle s\rangle}(z)/z]^x. \tag{77}$$

Résolvant cette dernière (avec la condition initiale $[f^{\langle s\rangle}(z)/z]^x = 1$ si $s = 0$), on trouve (74). La Formule (75) découle de (74) et des identités

$$[z^{-1}\omega(z)(x+z\mathrm{D})]^k 1 = z^{-x}[\omega(z)\mathrm{D}]^k z^x, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{78}$$

démontrables par induction sur k comme suit. Le cas où $k=0$ est évident et le calcul facile

$$z^{-1}\omega(z)(x+z\mathrm{D})\{z^{-x}[\omega(z)\mathrm{D}]^k z^x\}=z^{-x}[\omega(z)\mathrm{D}]^{k+1}z^x$$

montre que si (78) est satisfaite pour k, elle est aussi satisfaite pour $k+1$.

Corollaire 4. *Si $f\in\mathbb{S}$, $\omega=\operatorname{gen} f$ et $\Phi\in\mathbb{C}[\![z]\!]$ alors,*

$$\forall s\in\mathbb{C}\colon \mathrm{e}^{s\omega(z)\mathrm{D}}\Phi(z)=\Phi(f^{\langle s\rangle}(z)). \tag{79}$$

En particulier, si $\Phi=g\in\mathbb{S}$ et $\eta=\operatorname{gen} g$ alors,

$$\mathrm{e}^{\omega\mathrm{D}}\,\mathrm{e}^{\eta\mathrm{D}}z=g\circ f(z). \tag{80}$$

Remarquons que les opérateurs du membre de gauche de (80) sont appliqués dans l'ordre inverse de la composition du membre de droite.

Démonstration. À cause de la linéarité de (79) par rapport à Φ, il suffit de considérer le cas où $\Phi(z)=z^k$, $k\in\mathbb{N}$. Le résultat découle alors de (75) en posant $x=k$. La Formule (80) provient des choix $\Phi=g$, $s=1$ dans (79) et de l'hypothèse $\mathrm{e}^{\eta\mathrm{D}}z=g(z)$.

Les développements précédents nous permettent de considérer formellement $\mathrm{O}(z^2)$ comme l'algèbre de Lie du groupe $\mathbb{S}$ en prenant le "crochet de Lie" donné par $[\omega,\eta]=\omega\eta'-\omega'\eta$. Il en de même pour $\mathbb{V}$ par rapport à $\mathbb{B}^{\odot}$ via le crochet induit.

Corollaire 5. *Soient*

$$f(z)=z(1+a_\mu z^\mu+\cdots)\in\mathbb{S},\qquad \mu\geqslant 1,\qquad a_\mu\neq 0, \tag{81}$$

et

$$\omega(z)=z(\alpha_\nu z^\nu+\cdots)\in\mathrm{O}(z^2),\qquad \nu\geqslant 1,\qquad \alpha_\nu\neq 0, \tag{82}$$

alors la condition $\omega=\operatorname{gen} f$ est équivalente à chacune des quatre conditions (a)–(d) *suivantes*:

(a) $$\frac{\partial}{\partial s}f^{\langle s\rangle}(z)=\omega(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f^{\langle s\rangle}(z). \tag{83}$$

(b) $$\frac{\partial}{\partial s}f^{\langle s\rangle}(z)=\omega(f^{\langle s\rangle}(z)). \tag{84}$$

(c) $$\mu=\nu,\qquad a_\mu=\alpha_\nu\quad\text{et}\quad \omega(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f^{\langle s\rangle}(z)=\omega(f^{\langle s\rangle}(z)). \tag{85}$$

(d) $$\mu=\nu,\qquad a_\mu=\alpha_\nu\quad\text{et}\quad \omega(z)f'(z)=\omega(f(z)). \tag{86}$$

Démonstration. La condition (a) est immédiate à cause des préliminaires de la Proposition 4. La condition (b) provient du calcul suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}f^{\langle s\rangle}(z)&=\omega(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f^{\langle s\rangle}(z)=\omega(z)\mathrm{D}\,\mathrm{e}^{s\omega(z)\mathrm{D}}z\\&=\mathrm{e}^{s\omega(z)\mathrm{D}}\omega(z)\mathrm{D}z=\mathrm{e}^{s\omega(z)\mathrm{D}}\omega(z)=\omega(f^{\langle s\rangle}(z))\end{aligned}$$

basé sur (a) et sur le Corollaire 4 avec $\Phi=\omega$. La condition (c) est nécessaire à cause de (a), (b) et du fait (voir (69)) que

$$z+a_\mu z^{\mu+1}+\cdots=f(z)=z+\omega(z)+\cdots=z+\alpha_\nu z^{\nu+1}+\cdots.$$

La suffisance de (c) se démontre en considérant une solution quelconque $\eta \in O(z^2)$ de l'équation

$$\eta(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f^{\langle s\rangle}(z)=\eta(f^{\langle s\rangle}(z)).$$

Comme ω est aussi une solution de cette équation, une simple division montre que

$$\frac{\eta(z)}{\omega(z)}=\frac{\eta(f^{\langle s\rangle}(z))}{\omega(f^{\langle s\rangle}(z))}$$

Comme $f(z)\neq z$, on trouve que $\eta(z)=c\omega(z)$, où c est une constante. Les conditions supplémentaires $\mu=\nu$ et $a_\mu=\alpha_\nu$ permettent alors d'isoler le générateur particulier ω parmi ces solutions. Comme (c) $\Rightarrow$ (d) (via $s=1$), il ne nous reste qu'à montrer (d) $\Rightarrow$ (c). Remplaçons z par $f(z)$ dans l'équation $\omega(z)f'(z)=\omega(f(z))$. Un court calcul montre qu'on a alors $\omega(z)\mathrm{D}f^{\langle 2\rangle}(z)=\omega(f^{\langle 2\rangle}(z))$. Itérant ce procédé, on aboutit à

$$\omega(z)\mathrm{D}f^{\langle k\rangle}(z)=\omega(f^{\langle k\rangle}(z)),\qquad k=1,2,3,\ldots. \tag{87}$$

Les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres de (87) sont donc des polynômes identiques en k. Il suffit alors de remplacer k par $s\in\mathbb{C}$ pour voir que (c) est bien vérifiée.

REMARQUES. La caractérisation (d) du générateur ω de f contenue dans le Corollaire 5 est particulièrement simple et intéressante. En effet, elle contient une équation différentielle ordinaire qui ne fait *aucunement appel* aux itérées $f^{\langle s\rangle}$ de f.

Utilisant les conditions (c) et (d), le lecteur vérifiera qu'on a aussi

$$\omega=\operatorname{gen} f \Leftrightarrow \int_z^{f^{\langle s\rangle}(z)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\omega(\zeta)}=s,\quad \text{pour tout } s\in\mathbb{C}. \tag{88}$$

$$\omega=\operatorname{gen} f \Leftrightarrow \int_z^{f(z)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\omega(\zeta)}=1. \tag{89}$$

Les intégrales dans (88) et (89) sont évidemment prises au sens formel (i.e. intégration terme-à-terme de la série de Laurent formelle de $1/\omega(\zeta)$ développée autour du "pôle" $\zeta=0$).

Nous allons maintenant énoncer quelques formules à propos du problème de "visée" qui consiste à exprimer explicitement les générateurs ω et Ω en termes de f et P.

PROPOSITION 6
(a) *Si* $\Omega=\operatorname{gen} P$ *où* $P\in\mathbb{B}$ *alors*

$$\begin{aligned}\Omega&=\ln_{\odot}P=\ln_{\odot}(E+(P-E))\\&=\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(P-E)^{\langle k\rangle}.\end{aligned}\tag{90}$$

La composante d'indice n de Ω *est donnée par*

$$\Omega_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(P-E)_n^{\langle k\rangle}(x) \tag{91}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\frac{n^{(\nu)}}{\nu!}P_n^{\langle\nu\rangle}(x). \tag{92}$$

(b) *Si* $\omega = \text{gen}\, f$ *où* $f \in \mathbb{S}$ *alors*

$$\omega(z) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}\, g_k(z) \tag{93}$$

$$= z \sum_{\nu\geq 1} (-1)^{\nu-1} \frac{z^\nu \mathrm{D}^\nu}{\nu \cdot \nu!} \left\{\frac{f^{(\nu)}(z)}{z}\right\} \tag{94}$$

où les $g_k(z)$ *sont donnés par* (47).

Démonstration. On vérifie que parmi tous les $\Lambda \in \mathbb{P}^{\odot +}$ pour lesquels $\Lambda_0(x) = 0$, la condition $\mathrm{e}_\odot^\Lambda = P$ détermine Λ de façon unique. La Formule (90) découle directement de cette unicité ainsi que de la distributivité de $\odot$ sur $+$ et du fait que les séries $v = \ln(1+u)$ et $u = \mathrm{e}^v - 1$ sont inverses l'une de l'autre. La Formule (91) provient de l'identification de la composante d'indice n dans (90). La Formule (92) s'obtient de (91) en remarquant que

$$(P-E)_n^{\langle k\rangle}(x) = P_n^{\langle k\rangle}(x) - \binom{k}{1} P_n^{\langle k-1\rangle}(x) + \cdots + (-1)^k P_n^{\langle 0\rangle}(x)$$

et en réarrangeant les termes de la sommation. Pour montrer (93) il suffit de dériver (47) par rapport à s et de poser $s = 0$. Substituant $x = 1$ dans (92) on arrive à la Formule (94) comme suit:

$$\begin{aligned}\omega(z)/z &= \sum_{n\geq 1} \Omega_n(1) z^n \\ &= \sum_{\nu\geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu\cdot\nu!}\left[\sum_{n\geq\nu} n^{(\nu)} P_n^{\langle\nu\rangle}(1) z^n\right] \\ &= \sum_{\nu\geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu\cdot\nu!} \cdot z^\nu \mathrm{D}^\nu\left\{\frac{f^{\langle\nu\rangle}(z)}{z}\right\}.\end{aligned}$$

Remarques. Par un raisonnement analogue à celui qui nous a permis de démontrer la Formule (47) on peut obtenir l'identité plus générale

$$[f^{\langle s\rangle}(z)/z]^x = \sum_{k\geq 0} \binom{s}{k} u_k(z, x) \tag{95}$$

où

$$u_k(z,x) = [f^{\langle k\rangle}(z)/z]^x - \binom{k}{1}[f^{\langle k-1\rangle}(z)/z]^x + \cdots = \mathrm{O}(z^k). \tag{96}$$

Le lecteur vérifiera que les résultats contenus dans la Proposition 6 peuvent aussi être démontrés par une exploitation systématique de (95) et de (96). La Formule (95) est en fait équivalente à la formule plus compacte

$$P^{\langle s\rangle} = (E + (P-E))^{\langle s\rangle} = \sum_{k\geq 0} \binom{s}{k} (P-E)^{\langle k\rangle} \tag{97}$$

Cette dernière, à cause de l'unicité de $P^{\langle s\rangle}$, peut même être démontrée directement en utilisant la distributivité de $\odot$ sur $+$ et le fait que $(1+u)^s \cdot (1+u)^t = (1+u)^{s+t}$. En posant maintenant $s = -1$ dans (97), on obtient (en plus de (20)) les deux expressions qui suivent pour l'inverse de $P \in \mathbb{B}^\odot$ selon $\odot$:

$$P_n^{\langle -1\rangle}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (P-E)_n^{\langle k\rangle}(x) \tag{98}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu+1} P_n^{\langle\nu\rangle}(x). \tag{99}$$

La Formule (99) découle d'un réarrangement des termes du développement de $(P-E)_n^{\langle k\rangle}(x)$ dans (98). Mentionnons aussi que la formule d'inversion (43) annoncée dans la Proposition 3 découle de (99) en remarquant que si $f\in\mathbb{S}$, $f\sim P\in\mathbb{B}$, alors

$$\begin{aligned}f^{\langle -1\rangle}(z)&=z\sum_{n\geq 0}P_n^{\langle -1\rangle}(1)z^n\\&=\sum_{\nu\geq 0}(-1)^\nu\Big[\sum_{n\geq\nu}\frac{(n+1)^{(\nu+1)}}{(\nu+1)!}P_n^{\langle\nu\rangle}(1)z^{n+1}\Big]\\&=\sum_{\nu\geq 0}\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)!}z^{\nu+1}\mathrm{D}^{\nu+1}f^{\langle\nu\rangle}(z).\end{aligned}$$

Nous allons maintenant profiter de l'équation différentielle (86) pour obtenir cette fois des *récurrences linéaires explicites* permettant de calculer successivement les coefficients du générateur ω à partir de f.

PROPOSITION 7. *Supposons que* $f\in\mathbb{S}$, $\omega=\operatorname{gen}f$, $f\sim P\in\mathbb{B}$ *et*

$$f(z)=z(1+a_\mu z^\mu+a_{\mu+1}z^{\mu+1}+\cdots),\qquad \mu\geq 1,\qquad a_\mu\neq 0. \tag{100}$$

Chacune des récurrences suivantes est alors valable.

$$\text{(a)}\begin{cases}\omega(z)=z(\alpha_\mu z^\mu+\alpha_{\mu+1}z^{\mu+1}+\cdots)\\ \textit{où } \alpha_\mu=a_\mu \textit{ et, pour tout } n>\mu,\\ \alpha_n=\dfrac{1}{(n-\mu)a_\mu}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-\mu}[(\mu+i+1)a_{\mu+i}-P_{\mu+i}(n-i+1)]\alpha_{n-i}.\end{cases} \tag{101}$$

$$\text{(b)}\begin{cases}\omega(z)=a_\mu z^{\mu+1}/(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)\\ \textit{où } c_0=1 \textit{ et pour tout } n>0,\\ c_n=\dfrac{1}{na_\mu}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big[P_{\mu+i}(\mu+2)-\binom{n+2+\mu}{n+2-i}P_{\mu+i}(n+2-i)\Big]c_{n-i}.\end{cases} \tag{102}$$

DÉMONSTRATION. Etablissons d'abord (a). La conclusion $\alpha_\mu=a_\mu$ est triviale. Ecrivons $\omega(z)$ sous la forme auxiliaire

$$\omega(z)=\alpha_\mu z^{\mu+1}(1+\beta_{\mu+1}z+\cdots)=\alpha_\mu z^{\mu+1}\rho(z)\quad\text{où}\quad \beta_i=\alpha_i/\alpha_\mu,\qquad \rho\in\mathbb{U}.$$

Posons $\rho\sim R\in\mathbb{B}$. L'équation différentielle (86) prend alors la forme

$$f'(z)\rho(z)=\left[\frac{f(z)}{z}\right]^\mu\cdot\frac{f(z)\rho(f(z))}{z}. \tag{103}$$

Identifiant les coefficients de z^n dans les deux membres de (103) on trouve

$$\sum_{i+j=n}(i+1)P_i(1)R_j(1)=\sum_{i+j=n}P_i(\mu)(R\odot P)_j(1). \tag{104}$$

Un court calcul montre que le membre de droite de (104) est en fait égal à

$$\sum_{i+j=n}P_i(\mu+j+1)R_j(1). \tag{105}$$

La récurrence (101) découle alors de (104) et (105) en tenant compte du fait que $P_i(x) = 0$ si $0 < i < \mu$, $R_j(1) = \beta_{\mu+j} = \alpha_{\mu+j}/\alpha_\mu$ et en renommant adéquatement les indices en jeu. La récurrence (b) se démontre d'une façon analogue en écrivant cette fois ω sous la forme

$$\omega(z) = \alpha_\mu z^{\mu+1}/\sigma(z) \quad \text{où} \quad \sigma(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \in \mathbb{U}.$$

Posant alors $\sigma \sim S \in \mathbb{B}$, l'équation différentielle (86) peut se réécrire

$$f'(z) \cdot \frac{f(z)\sigma(f(z))}{z} = \left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\mu+2} \cdot \sigma(z). \tag{106}$$

Procédant comme plus haut, on obtient après quelques calculs (qui utilisent l'identité (17))

$$\sum_{i+j=n} \binom{n+2}{j+2} P_i(j+2) S_j(1) = \sum_{i+j=n} P_i(\mu+2) S_j(1). \tag{107}$$

Modulo certaines manipulations d'indices élémentaires et tenant compte du fait que $S_j(1) = c_j$, la récurrence (102) s'ensuit.

Remarque. Même dans les cas très simples la forme du générateur ω est souvent fort complexe. Par exemple, si $f(z) = z(1+z)$ alors $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$ et, pour $n > 1$, la récurrence (101) devient

$$\alpha_n = -\frac{1}{(n-1)}\left\{\binom{n}{2}\alpha_{n-1} + \binom{n-1}{3}\alpha_{n-2} + \binom{n-2}{4}\alpha_{n-3} + \cdots\right\}. \tag{108}$$

Ceci donne

$$\omega(z) = z^2 - z^3 + \frac{3}{2!}z^4 - \frac{16}{3!}z^5 + \frac{124}{4!}z^6 - \frac{1256}{5!}z^7 + \cdots \tag{109}$$

$$f^{\langle s\rangle}(z) = z + sz^2 + s(s-1)z^3 + \tfrac{1}{2}s(s-1)(2s-3)z^4 + \tfrac{1}{3}s(s-1)(s-2)(3s-4)z^5 + \tfrac{1}{12}s(s-1)(s-2)(12s^2-41s+31)z^6 + \cdots.$$

Dans le cas où $f(z) = z\,e^z$ alors $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$ et pour $n > 1$

$$\alpha_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \{(i+2) - (n-i+1)^{i+1}\}\alpha_{n-i}/(i+1)! \tag{108$'$}$$

d'où

$$\omega(z) = z^2 - \tfrac{1}{2}z^3 + \tfrac{5}{12}z^4 - \tfrac{5}{12}z^5 + \tfrac{107}{240}z^6 - \cdots$$

$$f^{\langle s\rangle}(z) = z + sz^2 + s(s-\tfrac{1}{2})z^3 + s(s^2 - \tfrac{5}{4}s + \tfrac{5}{12})z^4 + s(s^3 - \tfrac{13}{6}s^2 + \tfrac{13}{8}s - \tfrac{5}{12})z^5 + s(s^4 - \tfrac{77}{24}s^3 + \tfrac{95}{24}s^2 - \tfrac{35}{16}s + \tfrac{107}{240})z^6 + \cdots \tag{109$'$}$$

La théorie générale que nous avons développée jusqu'ici va maintenant nous permettre d'obtenir facilement des résultats purement algébriques concernant la conjugaison et la commutation des éléments du groupe $\mathbb{S}$. D'abord trois lemmes.

Lemme 4. *Soient $f, g, h \in \mathbb{S}$ et* gen $f = \omega$, gen $g = \eta$. *Les conditions* (a)–(c) *suivantes sont équivalentes.*

(a) $f = h^{\langle -1\rangle} \circ g \circ h$ (110)

(b) $\forall s \in \mathbb{C}$: $f^{\langle s\rangle} = h^{\langle -1\rangle} \circ g^{\langle s\rangle} \circ h$ (111)

(c) $\omega(z)h'(z) = \eta(h(z))$. (112)

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) et (b) est facile. Pour montrer l'équivalence de (a) et (c), on peut appliquer la caractérisation (86) du corollaire 5 ou encore, raisonner comme suit. A cause de (89) les conditions $\operatorname{gen} f = \omega$, $\operatorname{gen} g = \eta$ sont équivalentes à

$$\int_z^{f(z)} \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = 1 = \int_z^{g(z)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\eta(\zeta)} \tag{113}$$

Effectuant le changement de variable $\zeta = h(t)$ dans le membre de droite de (113) et substituant ensuite $h(z)$ à z, on obtient la condition équivalente

$$\int_z^{f(z)} \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = 1 = \int_z^{h^{\langle -1\rangle}\circ g\circ h(z)} \frac{h'(z)\,\mathrm{d}t}{\eta(h(t))}.$$

Cette dernière condition montre bien que (a)$\Leftrightarrow$(c).

LEMME 5. *Soient* $f, g \in \mathbb{S}$ *où* $f(z) \neq z \neq g(z)$ *et* $\operatorname{gen} f = \omega$, $\operatorname{gen} g = \eta$. *Si on pose*

$$\omega(z) = \alpha z^{\mu+1}/(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots), \qquad \alpha \neq 0, \qquad \mu \geq 1 \tag{114}$$

et

$$\eta(z) = \beta z^{\nu+1}/(1 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots), \qquad \beta \neq 0, \qquad \nu \geq 1 \tag{115}$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient conjuguées dans $\mathbb{S}$ *est*

$$\alpha = \beta, \qquad \mu = \nu \quad \text{et} \quad c_\mu = d_\nu. \tag{116}$$

DÉMONSTRATION. À cause du lemme précédent, f et g sont conjuguées si et seulement si $\exists h \in \mathbb{S}$ telle que (112) est satisfaite. Comparant les termes dominants des deux membres de cette équation, on obtient que $\alpha = \beta$ et $\mu = \nu$ sont nécessaires. Supposons donc ces conditions remplies et posons $r = \mu = \nu$. Après simplification par α dans (112), on voit que f et g sont conjuguées si et seulement si $\exists h \in \mathbb{S}$ telle que

$$h'(z) \sum_{i\geq 0} d_i [h(z)]^{i-r-1} = \sum_{j\geq 0} c_j z^{j-r-1}. \tag{117}$$

Par intégration, cette dernière condition est équivalente à l'existence d'un $h \in \mathbb{S}$ tel que

$$d_r \ln(h(z)) + \sum_{k\geq -r}{}^{*}\, d_{r+k}[h(z)]^k/k = c_r \ln(z) + \sum_{k\geq -r}{}^{*}\, c_{r+k} z^k/k + C \tag{118}$$

où $\sum^*$ signifie que l'indice $k = 0$ est omis et où C désigne une constante arbitraire d'intégration. À cause des logarithmes, cette condition implique $d_r = c_r$. D'où la nécessité de (116). Inversement, si (116) est satisfaite, alors (112) peut s'écrire

$$c_r \ln[h(z)/z] + \sum_{k\geq -r}{}^{*}\, d_{r+k}[h(z)]^k/k = \sum_{k\geq -r}{}^{*}\, c_{r+k} z^k/k + C, \qquad r = \mu = \nu. \tag{119}$$

Il s'agit de montrer qu'on peut alors déterminer explicitement les coefficients de la série $h \in \mathbb{S}$ requise. Pour le voir, posons *a priori*,

$$h(z) = z(1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots) \tag{120}$$

Une analyse des coefficients de z^n (pour $n=-r+1, -r+2, \ldots$) dans les deux membres de (119) fournit un système de conditions du type

$$\left.\begin{array}{ll} h_1 - d_1/(r-1) & = -c_1/(r-1) \\ h_2 + P_2(h_1) & = -c_2/(r-2) \\ h_3 + P_3(h_1, h_2) & = -c_3/(r-3) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ h_r + P_r(h_1, \ldots, h_{r-1}) & = C \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ h_{r+i} + P_{r+i}(h_1, \ldots, h_{r+i-1}) & = c_{r+i}/i \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} \tag{121}$$

où $P_j(h_1, \ldots, h_{j-1})$ désigne un polynôme en $h_1, \ldots, h_{j-1}$.

Ceci montre bien qu'on peut résoudre successivement pour $h_1, h_2, h_3, \ldots$ et que $h(z)$ dépend en réalité d'un paramètre dû à la constante arbitraire C entrant en jeu dans (121).

Reformulée dans le langage de la théorie des invariants pour les formes différentielles méromorphes, la preuve que nous venons de donner est essentiellement une version formelle du fait que n, a_{-n}, a_{-1} forment un système complet d'invariants pour les formes différentielles du type

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k \,\mathrm{d}z, \qquad n \geq 2$$

relativement au groupe de tous les changements de variables $z = h(\zeta)$ où $h \in \mathbb{S}$.

La condition (116) du lemme précédent peut se reformuler, à cause de (69), de la façon suivante:

$$\left.\begin{array}{l} f(z)-z \text{ et } g(z)-z \text{ sont ``asymptotiques'' en } z=0 \\ \text{et} \\ 1/\omega(z) \text{ et } 1/\eta(z) \text{ ont même ``résidu'' en } z=0. \end{array}\right\} \tag{122}$$

Etant donné que le résidu en $z=0$ de l'inverse d'un générateur $\omega = \operatorname{gen} f$ joue un rôle primordial devant la conjugaison, il est utile d'en avoir une représentation explicite en termes des coefficients de f. C'est justement le contenu du prochain lemme.

LEMME 6. *Soient $z \neq f(z) \in \mathbb{S}$ et $\omega = \operatorname{gen} f$. Si on écrit f sous la forme $f(z) = z(1 + a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots)$, $r \geq 1$, $a_r \neq 0$, alors le résidu de $1/\omega(z)$ en $z=0$ est donné par la formule*

$$(-1)^r a_r^{-r-1} D_r(a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{2r}) + (r+1)/2 \tag{123}$$

où $D_r = D_r(a_r, \ldots, a_{2r}) = D_r(f)$ désigne le déterminant suivant

$$D_r = \begin{vmatrix} a_{r+1} & a_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{r+2} & a_{r+1} & a_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \\ a_{2r-2} & a_{2r-3} & a_{2r-4} & \ldots & & a_r & 0 \\ a_{2r-1} & a_{2r-2} & a_{2r-3} & \ldots & & a_{r+1} & a_r \\ a_{2r} & a_{2r-1} & a_{2r-2} & \ldots & & a_{r+2} & a_{r+1} \end{vmatrix} \tag{124}$$

En particulier, $D_1 = a_2$, $D_2 = a_3^2 - a_2 a_4$, etc.

DÉMONSTRATION. Posant $\omega(z)=a_rz^{r+1}/(1+c_1z+c_2z^2+\cdots)$ alors le résidu cherché est égal à c_r/a_r. Etant donné que $\omega(z)\omega'(z)=(r+1)a_r^2z^{2r+1}+O(z^{2r+2})$, la Formule (69) peut s'écrire (via $s=1$)

$$f(z)=z+\omega(z)+\tfrac{1}{2}(r+1)a_r^2z^{2r+1}+O(z^{2r+2}).$$

Cette égalité est équivalente à

$$1+c_1z+\cdots=a_r\{a_r+\cdots+a_{2r-1}z^{r-1}+[a_{2r}-\tfrac{1}{2}(r+1)a_r^2]z^r+O(z^{r+1})\}^{-1}. \qquad (125)$$

Ceci fournit un système triangulaire d'équations linéaires en $c_1, c_2, \ldots, c_r$ et (123) s'obtient en résolvant ce dernier pour l'"inconnue" c_r à l'aide de la règle de Cramér habituelle.

REMARQUE. Le lecteur notera que le résidu du Lemme 6 peut aussi être calculé en utilisant la récurrence (b) de la Proposition 7.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une proposition à caractère purement algébrique concernant le groupe $\mathbb{S}$.

PROPOSITION 8. *Soient f, $g\in\mathbb{S}$, alors*
(a) *f et g sont conjuguées si et seulement si $f=g=z$, ou si $\exists r\geqslant 1$ tel que*

$$\left.\begin{aligned} &f(z)=z(1+a_rz^r+a_{r+1}z^{r+1}+\cdots), && a_r\neq 0\\ &g(z)=z(1+b_rz^r+b_{r+1}z^{r+1}+\cdots), && b_r\neq 0\\ &a_r=b_r, \quad D_r(a_r,\ldots,a_{2r})=D_r(b_r,\ldots,b_{2r}) && \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

où D_r est le déterminant défini par (124).
(b) *Soit $h\in\mathbb{S}$ alors h commute avec $f\neq z$ (i.e. $h\circ f=f\circ h$) si et seulement si h est l'une des itérées continues de f (i.e. $\exists s\in\mathbb{C}$ tel que $h=f^{\langle s\rangle}$).*
(c) *Si $h_0\in\mathbb{S}$ satisfait $f=h_0^{\langle -1\rangle}\circ g\circ h_0$ alors, si $g\neq z$,*

$$f=h^{\langle -1\rangle}\circ g\circ h \Leftrightarrow \exists s\in\mathbb{C}\colon h=g^{\langle s\rangle}\circ h_0. \qquad (127)$$

DÉMONSTRATION. La partie (a) découle des Lemmes 5 et 6 et de (122). Pour démontrer la partie (b), prenons $g=f$ dans le Lemme 4. On a alors $h\circ f=f\circ h$ ssi $f=h^{\langle -1\rangle}\circ f\circ h$ et ce, si et seulement si $\omega(z)h'(z)=\omega(h(z))$. Or, à cause du Corollaire 5(d) et de la remarque (68), la solution générale h d'une telle équation différentielle est précisément donnée par les itérées continues de f. La partie (c) s'obtient de (b) en notant que $f=h^{\langle -1\rangle}\circ g\circ h$ si et seulement si $h\circ h_0^{\langle -1\rangle}$ et g commutent.

REMARQUES. La présence de la constante d'intégration entrant en jeu dans la démonstration du Lemme 5 nous assurait d'avance que si f et g étaient conjuguées alors les h tels que $f=h^{\langle -1\rangle}\circ g\circ h$ formaient une famille à un paramètre. La partie (c) de la Proposition 8 a pour effet de préciser la nature de cette famille. La partie (b), quant à elle, met en évidence la possibilité de développer une théorie purement algébrique des itérées continues en utilisant simplement la commutativité dans $\mathbb{S}$. Finalement, la partie (a) nous permet de paramétriser les "classes de conjugaison" (non triviales) du groupe $\mathbb{S}$ à l'aide des trois invariants fondamentaux: r, a_r, D_r. Il est facile de se donner un représentant commode pour chacune de ces classes de conjugaison. Par exemple, la famille de polynômes

$$\pi_{r,\alpha,\beta}(z)=z(1+\alpha z^r+\beta z^{2r}) \qquad (128)$$

où $r \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ constitue un tel système de représentants. On obtient alors de (128) et de la Proposition 8(a) que pour tout $f \in \mathbb{S}$, $f \neq z$, il existe $h \in \mathbb{S}$, $r \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall s \in \mathbb{C}: f^{\langle s \rangle}(z) = h^{\langle -1 \rangle} \circ \pi^{\langle s \rangle}_{r,\alpha,\beta} \circ h(z). \tag{129}$$

Le problème de l'itération continue générale est donc essentiellement ramené à celui de l'itération continue de ces polynômes $\pi_{r,\alpha,\beta}(z)$.

En réalité, il est possible de faire beaucoup mieux en utilisant les séries spéciales contenues dans le corollaire qui suit.

COROLLAIRE 6. *Pour chaque $t \in \mathbb{C}$ désignons par*

$$u_t(z) = z\mu_t(z) \tag{130}$$

l'élément de $\mathbb{S}$ dont le générateur est le polynôme du troisième degré $\theta_t(z)$ défini par

$$\theta_t(z) = z^2 - tz^3 \in \mathrm{O}(z^2). \tag{131}$$

Alors le problème de l'itération continue dans $\mathbb{S}$ est réductible à celui de la simple connaissance des itérées continues $u_t^{\langle s \rangle}(z)$ de $u_t(z)$.

DÉMONSTRATION. Pour $r \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$, désignons par $v_{r,\alpha,\beta}(z)$ l'élément de $\mathbb{S}$ dont le générateur est

$$\omega_{r,\alpha,\beta}(z) = \alpha z(z^r - \beta z^{2r}). \tag{132}$$

Il est immédiat que le résidu de $1/\omega_{r,\alpha,\beta}$ est β/α. Soit maintenant $f \in \mathbb{S}$, $f \neq z$ où

$$f(z) = z(1 + a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots), \qquad a_r \neq 0.$$

Choisissons α et β en posant

$$\alpha = a_r, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}(r+1)a_r + (-1)^r a_r^{-r} \mathrm{D}_r(f). \tag{133}$$

Le Lemme 6, la Proposition 8(a) et (122) nous permettent de conclure à l'existence d'un $h \in \mathbb{S}$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{C}: f^{\langle s \rangle} = h^{\langle -1 \rangle} \circ v^{\langle s \rangle}_{r,\alpha,\beta} \circ h. \tag{134}$$

Nous aurons démontré notre corollaire si nous parvenons à exprimer $v^{\langle s \rangle}_{r,\alpha,\beta}$ en termes des itérées continues de u_t. Posons à cette fin

$$u_t \sim U_t \in \mathbb{B}^{\odot}, \qquad v_{r,\alpha,\beta} \sim V \in \mathbb{B}^{\odot} \tag{135}$$

et

$$U_t = \mathrm{e}_{\odot}^{\Gamma_t}, \qquad V = \mathrm{e}_{\odot}^{\Lambda}, \quad \text{où} \quad \Gamma_t, \Lambda \in \mathbb{V}. \tag{136}$$

Un calcul basé sur (70) montre que

$$\Lambda_n^{\langle k \rangle}(x) = \begin{cases} \alpha^k r^k (\Gamma_\beta)^{\langle k \rangle}_{n/r}(x/r) & \text{si } r \text{ divise } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tenant compte de (136) et du fait que $V^{\langle s \rangle} = \mathrm{e}_{\odot}^{s\Lambda}$, on déduit

$$V_n^{\langle s \rangle}(x) = \begin{cases} (U_\beta)^{\langle \alpha r s \rangle}_{n/r}(x/r) & \text{si } r \text{ divise } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{137}$$

Définissant maintenant $\mu_t(s, z)$ par

$$u_t^{\langle s \rangle}(z) = z\mu_t(s, z) \tag{138}$$

et posant $x = 1$ dans (137) on obtient

$$\begin{aligned} v^{\langle s\rangle}_{r,\alpha,\beta}(z) &= z \sum_{n\geq 0} V^{\langle s\rangle}_n(1)z^n \\ &= z \sum_{m\geq 0} (U_\beta)^{\langle\alpha rs\rangle}_m(1/r)z^{rm} \\ &= z[\mu_\beta(\alpha rs, z^r)]^{1/r}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$v^{\langle s\rangle}_{r,\alpha,\beta}(z) = z\left\{\frac{u_\beta^{\langle\alpha rs\rangle}(z^r)}{z}\right\}^{1/r}. \tag{139}$$

REMARQUE. Les séries $u_t^{\langle s\rangle}(z)$ sont en quelque sorte "universelles" devant l'itération continue dans $\mathbb{S}$. Les cas où $t = 0$ et $\beta = 0$ fournissent les séries particulières

$$u_0(z) = z/(1-z) \quad \text{et} \quad v_{r,\alpha,0}(z) = z/[1-\alpha rsz^r]^{1/r} \tag{140}$$

que nous avons déjà rencontrées dans les Exemples (71) et (72). Le calcul explicite de $u_t^{\langle s\rangle}(z)$ pour le cas $t \neq 0$ peut se faire de plusieurs façons en regard des formules diverses contenues dans le présent travail. Par exemple, la formule (69) prend la forme

$$\begin{aligned} u_t^{\langle s\rangle}(z) &= \mathrm{e}^{sz^2(1-tz)\mathrm{D}}z \\ &= z + \frac{s}{1!}(z^2 - tz^3) + \frac{s^2}{2!}(2z^3 - 5tz^4 + 3t^2z^5) + \cdots. \end{aligned} \tag{141}$$

Mentionnons aussi que l'Équation (84) montre que $y = y(s) = u_t^{\langle s\rangle}(z)$ satisfait l'équation différentielle (en s):

$$y' = (1-ty)y^2, \qquad y(0) = z. \tag{142}$$

Toutes les propriétés des séries universelles $u_t^{\langle s\rangle}(z)$ sont donc renfermées dans cette simple équation.

Pour terminer, mentionnons que les idées contenues dans le présent texte sont susceptibles de développements futurs dans les directions suivantes:

(1) La solution du problème 3 posé dans [12] par Rota, Kahaner et Odlyzko. Dans ce problème on considère d'abord la bijection entre les delta-opérateurs normalisés Q (au sens où $Qx = 1$) et les éléments $f \in \mathbb{S}$ définie par $Q = f(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$. On demande alors d'étudier les delta-opérateurs $Q^{\langle t\rangle}$ définis par $Q^{\langle t\rangle} = f^{\langle t\rangle}(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$, où $f^{\langle t\rangle}$ désigne l'itérée continue d'ordre t de f.

(2) Jusqu'à quel point les idées du présent travail peuvent-elles être adaptées au contexte multidimensionnel et, plus généralement, dans le contexte des catégories de Möbius [11]? En effet, monsieur Pierre Leroux a fait remarquer à l'auteur que les automorphismes de l'algèbre d'incidence $I(C)$ d'une catégorie de Möbius C fournissent un cadre très général pour l'inversion de Lagrange. Pour la relation entre l'inversion et les algèbres d'incidence, voir Rota [12].

(3) Le lecteur vérifiera qu'il est possible d'étendre la notion d'itération continue dans le contexte des séries formelles $f(z)$ où $f(0) = 0 \neq f'(0)$ (i.e. $f'(0)$ n'est plus nécessairement égale à 1) via la formule

$$\int^{f^{\langle s\rangle}_{(z)}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\omega(\zeta)} = s, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

en demandant cette fois que le générateur $\omega(z)$ appartienne à $O(z)$ (au lieu de $O(z^2)$). Que se produit-il si $f(0) \neq 0$? Quelles sont les implications de tout ceci dans le contexte des processus de Galton–Watson (i.e. processus dits "de ramification" ou "en cascade")?

(4) Les suites de type binomial et les séries génératrices sont très utiles en combinatoire. Quelles sont les interprétations combinatoires que l'on pourrait donner aux générateurs ω et Ω?

(5) Il est facile de voir que les ensembles $N_k = z(1+O(z^k))$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ forment des sous-groupes normaux emboîtés du groupe $\mathbb{S}$. Décrire explicitement (par exemple, via des paramétrisations adéquates) la totalité de tous les sous-groupes normaux de $\mathbb{S}$ (et de $\mathbb{B}^{\odot}$). Quelle est la forme précise des groupes-quotients qui en découlent?

(6) Une extension intéressante des diverses formules du présent travail serait de leur trouver des "q-analogues". C'est-à-dire des formules d'"inversion" et d'"itération" dans lesquelles intervient un paramètre supplémentaire q, se spécialisant en les formules habituelles pour $q = 1$.

Remerciements

L'auteur désire remercier particulièrement messieurs André Joyal, Alain Latour, Pierre Leroux et Gian-Carlo Rota pour leurs stimulantes suggestions ainsi que pour leur encouragement. Remerciements aussi pour les améliorations suggérées par l'examinateur.

Références

1. L. Chottin, Une démonstration combinatoire de la formule de Lagrange à deux variables, *Discrete Math.* **13** (1975), 215–224.
2. L. Comtet, *Analyse combinatoire*, tome premier, Presses universitaires de France, Coll. SUP, 1970.
3. J. P. Fillmore and S. G. Williamson, A linear algebra setting for the Rota–Mullin theory of polynomials of binomial type. *Linear and Multilinear Algebra* **1** (1973), 67–80.
4. A. M. Garsia, An exposé of the Mullin–Rota theory of polynomials of binomial type, *Linear and Multilinear Algebra* **1** (1973), 47–65.
5. A. M. Garsia and S. A. Joni, A new expression for umbral operators and power series inversion, *Proceedings of the American Mathematical Society* **64** (1977), 179–185.
6. I. J. Good, Generalisations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes, *Proc. Cambridge Philo. Soc.* **56** (1960), 367–380.
7. H. W. Gould, Coefficient identities for powers of Taylor and Dirichlet series, *American Mathematical Monthly* **81** (1974), 3–14.
8. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique* (en trois tomes), Gauthier–Villars, Paris, cinquième édition, 1956.
9. W. Gröbner, *Monatshefte für Mathematik* (LXVI Bond) 1962.
10. S. A. Joni, Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators, *Linear and Multilinear Algebra* **6** (2) (1978), pp. 111–121.
11. M. Content, F. Lemay, and P. Leroux, Catégories de Möbius et fonctorialités: un câdre général pour l'inversion de Möbius, *J. Combinatorial Th. A* **28** (1980), 169–190.
12. G.-C. Rota, *Finite operator calculus*, Academic Press, New York, 1975.
13. G.-C. Rota and R. Mullin, *On the Foundations of Combinatorial Theory, Graph Theory and Applications*, Academic Press, New York, (1970), pp. 167–213.

Received 3 December 1979 and in revised form 24 March 1980

G. Labelle
Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal,
C.P.8888, Succ. "A", Montréal, Québec, Canada