O Problema de Lucas

Ménage Pròbleme

Francisco Carpegiani Medeiros Borges

Universidade Federal do Piauí
Campus Ministro Reis Velloso - Parnaíba
Curso de Licenciatura Plena em Matemática

28 de setembro de 2010

Sumário

O Problema de Lucas (ou *Ménage Pròbleme*)

Esse problema foi formulado em 1891 por Édouard Lucas e independente, alguns anos antes, por *Peter Guthrie Tait* em conexão com a *Teoria do Nó (Knot Theory)*. Em 1943, Irving Kaplansky publica o artigo *"Solution of the problème des ménages"* em **Bulletin of the American Mathematical Society**, com uma solução para o problema. Neste artigo, Kaplansky cria os *Lemas de Kaplansky* para solucionar o problema.

Problema de Lucas

De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Um pouco de história!

François Édouard Anatole Lucas (1842-1891)

- É conhecido pelos seus estudos na famosa fórmula matemática de Fibonacci, conhecida como Seqüência de Fibonacci. Seus estudos nesta área são conhecidos como Sequência de Lucas.
- Foi um dos maiores estudiosos dos números primos. Foi o matemático que, manualmente, encontrou o maior número primo conhecido, a saber, $2^{127} - 1$
- Inventou vários briquedos. Os mais populares foram o Quebra-cabeças de Baguenaudier, mais conhecido como Anéis Chineses, elaborado a partir de uma solução binária para o problema de mesmo nome, e a Torre de Hanói, que ele comercializou largamente na Europa.

Um pouco de história!

Irving Kaplansky (1917-2006)

- Doutorado na Universidade de Harvard (1941).
- Participou do Grupo de Matemática Aplicada do Conselho de Defesa Nacional (1944-1945).
- Professor da Universidade de Chicago (1945-1984).
- Após a aposentadoria, se tornou diretor do Instituto de Pesquisa de Ciências Matemáticas da Universidade de Chicago (1984).
- Recebeu vários prêmios. Foi eleito para a Academia Americana de Arte e Ciências.
- Seu trabalho na Matemática foi amplo, embora em sua maioria nas áreas de álgebra. Fez grandes contribuições na Teoria de Anéis, Teoria dos Grupos e Teoria dos Corpos.

O Princípio Multiplicativo

Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorre, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes.

O Princípio da Inclusão-Exclusão

Sejam Ω um conjunto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de Ω e sejam

$$\begin{aligned}
S_0 &= |\Omega|\,, \\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} |A_i|\,, \\
S_2 &= \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j|\,, \\
S_3 &= \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|\,, \ldots
\end{aligned}$$

Então:

O Princípio da Inclusão-Exclusão

1. O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k}^{k} S_{p+k} \,.$$

2. O número de elementos de Ω que pertencem a pelo menos p dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k-1}^{k} S_{p+k} \,.$$

3. O número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é

$$S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n \,.$$

Os Lemas de Kaplansky

Primeiro Lema de Kaplansky

O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é

$$f(n,p) = C^p_{n-p+1}\,.$$

Segundo Lema de Kaplansky

O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos,

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C^p_{n-p}\,.$$

Ver as demonstrações em [Morgado, 2006].

Solução do problema

- Numere os lugares de 1 a $2n$.
- Os homens ocupam lugares ímpares e as mulheres os pares ou vice-versa. Isto ocorre porque pessoas do mesmo sexo não podem sentar juntas.
- Modos dos homens sentar $\Rightarrow 2$ modos.
- Escolhido seus lugares, os modos dos homens se sentarem $\Rightarrow n!$ modos.
- Agora é colocar as n mulheres, digamos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, nos n lugares restantes.

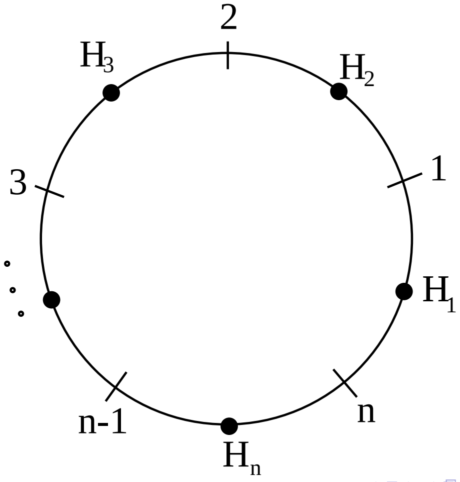
Solução do problema

- Pelo Princípio Multiplicativo, a solução do problema de Lucas é
$$2 \cdot n! \cdot U_n,$$
onde U_n é a quantidade de modos das n mulheres sentarem nos lugares restantes com a restrição de que nenhuma mulher sentar ao lado do seu marido.
- Determinemos U_n.

Solução do problema

- Definamos para $1 \leq i \leq n$,
- $\Omega =$ conjunto das permutações da mulheres.
- $A_i =$ conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o i-ésimo lugar.
- $A_i' =$ conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o $(i-1)$-ésimo lugar.
- Liste os $2n$ conjuntos na seguinte ordem: $A_1', A_1, A_2', A_2, \ldots, A_n', A_n$.

Solução do problema



Solução do problema

Desse modo, U_n é o número de elementos de Ω que não pertencem a nenhum dos $2n$ conjuntos.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$U_n = a_0 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{0+k}^{k} S_{0+k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k S_k \, .$$

Analisemos as interseções entre os A_i's e (A_i')'s.

Solução de problema

- Interseção de k dos conjuntos $A_1', A_1, A_2', A_2, \ldots, A_n', A_n$ que contenha dois conjuntos consecutivos. Neste caso, a interseção é vazia pois nenhuma mulher M_j pode ocupar simultaneamente os lugares j e $j-1$.
- Interseção de k dos conjuntos $A_1', A_1, A_2', A_2, \ldots, A_n', A_n$ que não contenha dois conjuntos consecutivos. Neste caso, são todas as permutações de n mulheres onde k mulheres estão em lugares pré-fixados. Desse modo, possui $(n-k)!$ permutações.

Solução do problema

Assim, pelo Segundo Lema de Kaplansky, existem

$$g(2n,k) = \frac{2n}{2n-k} C^k_{2n-k}$$

interseções do segundo tipo.

Logo,

$$S_k = \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = g(2n,k) \cdot (n-k)!.$$

Solução do problema

Donde,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k S_k = \\ U_n &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot g(2n,k) \cdot (n-k)! \\ U_n &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)! \end{aligned}$$

Solução do problema

Portanto a solução do Problema de Lucas é,

$$\boxed{2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \tfrac{2n}{2n-k} \left(\begin{array}{c} 2n-k \\ k \end{array} \right) (n-k)!.}$$

Bibliografia Consultada

[Morgado, 2006] MORGADO, A. C. O., CARVALHO, J. B. P. de, CARVALHO, P. C., FERNANDEZ, P..
Análise Combinatória e Probabilidade.
Nona Edição, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[Plínio, 2007] SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., MURARI, I. T. C..
Introdução à Análise Combinatória.
4^a Edição revista, Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 2007.

Biografia de Êdouard Lucas.
http://www.nautilus.com.br/clientes/pontes/biografia/lucas.htm
Acesso em: 16 de setembro de 2010.

Biografia de Irving Kaplansky
www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kaplansky.html
Acesso em: 17 de setembro de 2010.

História do Problema de Lucas
http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9nage_problem
Acesso em: 17 de setembro de 2010.