Sur une généralisation des coefficients binomiaux

Fréderic Jouhet, Bodo Lass et Jiang Zeng
Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard (Lyon 1)
43, bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France
{jouhet, lass, zeng}@ euler.univ-lyon1.fr

2000 Mathematics Subject Classification : 05A10, 33C20

Combinatorica lux mea

Abstract

We prove a recent conjecture of Lassalle about positivity and integrality of coefficients in some polynomial expansions. We also give a combinatorial interpretation of those numbers. Finally, we show that this question is closely related to the fundamental problem of calculating the linearization coefficients for binomial coefficients.

1 Introduction

Une partition $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_l > 0)$ de n est une suite décroissante d'entiers strictement positifs de somme $n = |\mu|$. Le nombre $l = l(\mu)$ est appelé la longueur de μ. Pour tout $i \geq 1$, l'entier $m_i(\mu) = \mathrm{card}\{j : \mu_j = i\}$ est la multiplicité de i dans μ. Définissons

$$z_\mu = \prod_{i\geq 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!.$$

Pour $n \geq 1$ les factorielles *montantes* et *descendantes* sont définies comme suit :

$$\langle x\rangle_n = x(x-1)\cdots(x-n+1), \qquad (x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

Notons que $\langle -x\rangle_n = (-1)^n (x)_n$ et que les coefficients binomiaux valent $\binom{x}{n} = \langle x\rangle_n/n!$. Dans ses travaux sur les *polynômes de Jack* [11] Lassalle a récemment posé la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Soit X une indéterminée, m et n deux entier strictement positifs et $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ une suite d'entiers positifs telle que $|\mathbf{r}| = \sum_{i=1}^m r_i > 0$. On a*

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} \prod_{k=1}^{m} \frac{(\mu_i)_{r_k}}{r_k!} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \sum_{k=1}^{\min(n,|r|)} c_k^{(\mathbf{r})} \binom{X+n-1}{n-k}, \tag{1}$$

où les coefficients $c_k^{(\mathbf{r})}$ sont des entiers positifs à déterminer.

Remarquons d'abord que le membre de gauche de (1) est un polynôme en X de degré $n-1$, donc il peut être développé dans la base $\{\binom{X+n-1}{n-k}\}$ $(1 \leq k \leq n)$ d'une seule façon. Ceci implique l'existence et l'unicité des coefficients rationnels $c_k^{(\mathbf{r})}$ au membre de droite de (1).

Comme nous allons le démontrer, les nombres $c_k^{(\mathbf{r})}$ sont en fait des entiers positifs et indépendants de n. Pour $m = 1$ et $m = 2$ les coefficients $c_k^{(\mathbf{r})}$ ont été déterminés et la conjecture a été vérifiée (voir [6, 10, 11, 14]). Dans le premier cas, le nombre $c_k^{(r_1)}$ est un cofficient binomial

$$c_k^{(r_1)} = \binom{r_1}{k},$$

et dans le deuxième cas Lassalle [11] a obtenu plusieurs formules exprimant $c_k^{(r_1,r_2)}$, qui se réduisent au cas précédent lorsque $r_2 = 0$. Donc les coefficients $c_k^{(\mathbf{r})}$ sont des extensions des coefficients binomiaux classiques.

L'objectif de cet article est de donner une solution complète de ce problème, ceci par *trois* approches distinctes utilisant des techniques complètement différentes. Plus précisément, la section 2 donne une réponse analytique à la conjecture 1, ainsi que quelques identités du même type, ceci à l'aide des fonctions génératrices multivariées. Dans la troisième section, nous donnons une interprétation combinatoire de l'identité suivante :

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{n!}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \sum_{i=1}^{l(\mu)} \prod_{k=1}^{m} \mu_i \binom{\mu_i + r_k - 1}{r_k - 1} = \frac{\prod_j r_j}{|\mathbf{r}|} \sum_{k=1}^{\min(n,|r|)} c_k^{(\mathbf{r})} k! \binom{n}{k} (X+k)_{n-k}. \tag{2}$$

Bien que la théorie des espèces (voir [3] pour une introduction) nous ait permis d'imaginer cette démonstration, nous pensons qu'une présentation moins élitiste, plus populaire, accompagnée de calculs explicites, permettra de rendre les idées encore plus accessibles. Dans la dernière section, nous détaillons une troisième démonstration de la conjecture de Lassalle qui utilise le calcul aux différences et le cas particulier $m = 1$, dont on trouve une démonstration dans [10]. Dans ce paragraphe, nous voyons que le problème essentiel soulevé par la conjecture de Lassalle est le calcul de certains coefficients de linéarisation. Malgré l'importance fondamentale de cette question, il semble que, jusqu'à présent, les coefficients de linéarisation ne furent étudiés que pour les polynômes orthogonaux. C'est pourquoi nous ajoutons un traitement combinatoire du problème dans ce paragraphe.

Afin de rendre la lecture la plus autonome possible nous rappelons ici quelques formules fréquemment utilisées dans la suite. D'abord la formule binomiale peut s'écrire :

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n. \tag{3}$$

Nous aurons aussi besoin de la transformation suivante, qui est un cas limite de la formule de Whipple [1, p. 142] :

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, a, b\\ c, d\end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-a)_n}{(c)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, a, d-b\\ d, a+1-n-c\end{matrix}; 1\right], \tag{4}$$

et qui se réduit à la formule de sommation de Chu-Vandermonde lorsque $b = d$:

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, a\\ c\end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}, \tag{5}$$

où

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_p\\ b_1, b_2, \ldots, b_q\end{matrix}; z\right] = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

est la définition des fonctions hypergéométriques classiques.

2 Fonctions génératrices

En multipliant le membre de gauche de (1) par $t^n x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m}$ et en sommant sur $n \geq 1$ et les entiers $r_1, \dots, r_m \geq 0$ tels que $|\mathbf{r}| \neq 0$, par la formule binomiale (3), nous sommes amenés à évaluer l'expression

$$\sum_{|\mu|\geq 1} t^{|\mu|} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \sum_{i=1}^{l(\mu)} \left(\prod_{l=1}^{m} (1-x_l)^{-\mu_i} - 1 \right).$$

Lemme 1. *Soit y une indéterminée, alors*

$$\sum_{|\mu|\geq 1} t^{|\mu|} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \sum_{i=1}^{l(\mu)} (y^{\mu_i} - 1) = \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{k=1}^{n} \binom{X+n-1}{n-k} \frac{(y-1)^k}{k}. \tag{6}$$

Preuve. Toute partition μ non nulle correspond de façon biunivoque à une suite non nulle à support fini $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots)$ telle que $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mu|\geq 1} t^{|\mu|} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \sum_{i=1}^{l(\mu)} y^{\mu_i} &= \sum_{\mathbf{m}} X^{-1} \prod_{j\geq 1} \left(\frac{Xt^j}{j} \right)^{m_j} \frac{1}{m_j!} \sum_{i\geq 1} m_i y^i \\
&= \sum_{i\geq 1} y^i \left(\sum_{m_i \geq 0} m_i \left(\frac{Xt^i}{i} \right)^{m_i} \frac{X^{-1}}{m_i!} \right) \cdot \prod_{j\neq i} \sum_{m_j\geq 0} \left(\frac{Xt^j}{j} \right)^{m_j} \frac{1}{m_j!} \\
&= \sum_{i\geq 1} \frac{(yt)^i}{i} \exp\left(\frac{Xt^i}{i} \right) \prod_{j\neq i} \exp\left(\frac{Xt^j}{j} \right) \\
&= (1-t)^{-X} \log(1-yt)^{-1}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Par soustraction du terme correspondant à $y = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mu|\geq 1} t^{|\mu|} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \sum_{i=1}^{l(\mu)} (y^{\mu_i} - 1) &= (1-t)^{-X} \log \left(1 - \frac{t}{1-t}(y-1) \right)^{-1} \\
&= \sum_{k\geq 1} (1-t)^{-X-k} \frac{t^k (y-1)^k}{k} \\
&= \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{k=1}^{n} \binom{X+n-1}{n-k} \frac{(y-1)^k}{k}, \qquad (8)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Notons, pour toute fonction multivariée f, par $[x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}] f(x_1 \cdots x_m)$ le coefficient de $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}$ dans f. Nous déduisons donc de (8), en posant $y = 1/(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)$, le résultat suivant.

Théorème 1. *Soient $c_k^{(\mathbf{r})}$ les nombres rationnels définis par (1). Alors*

$$\frac{c_k^{(\mathbf{r})}}{|\mathbf{r}|} = [x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}] \, \frac{1}{k} \left(\frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)} - 1 \right)^k. \tag{9}$$

En particulier, $kc_k^{(\mathbf{r})}/|\mathbf{r}|$ est un entier positif et ne dépend pas de n.

Nous en déduisons donc une preuve de la conjecture 1 de Lassalle.

Corollaire 1. *Les nombres* $c_k^{(\mathbf{r})}$ *sont des entiers positifs.*

En effet, le théorème 1 implique que

$$\begin{aligned} c_k^{(\mathbf{r})} &= [x_1^{r_1}\cdots x_m^{r_m}]\,\frac{d}{dz}\bigg|_{z=1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{(1-zx_1)\cdots(1-zx_m)}-1\right)^k \qquad (10)\\ &= [x_1^{r_1}\cdots x_m^{r_m}]\,\left(\frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)}-1\right)^{k-1}\frac{\frac{x_1}{1-x_1}+\cdots+\frac{x_m}{1-x_m}}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)}. \end{aligned}$$

La dernière expression montre clairement que $c_k^{(\mathbf{r})}\in\mathbb{N}$.

Il est aussi possible de déduire le corollaire au moyen des *fonctions symétriques homogènes* sur $\{x_1,\ldots,x_m\}$, qui sont définies [8, 12] par la fonction génératrice :

$$\sum_{n\geq 0} h_n(x_1,\ldots,x_m)z^n=\prod_{i=1}^m(1-zx_i)^{-1},$$

et donc ceci, à l'aide de (10), permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 1}\sum_{r_1,\ldots,r_m\geq 0} c_k^{(\mathbf{r})}t^k x_1^{r_1}\cdots x_m^{r_m} &= -\frac{d}{dz}\bigg|_{z=1}\log\left(1-t\sum_{n\geq 1}h_n(x_1,\ldots,x_m)z^n\right)\\ &= \frac{d}{dz}\bigg|_{z=1}\sum_{n\geq 1}z^n\sum_{|\lambda|=n}t^{l(\lambda)}\binom{l(\lambda)-1}{m_1(\lambda),m_2(\lambda),\ldots}h_\lambda(x_1,\ldots,x_m)\\ &= \sum_{\lambda}t^{l(\lambda)}|\lambda|\binom{l(\lambda)-1}{m_1(\lambda),m_2(\lambda),\ldots}h_\lambda(x_1,\ldots,x_m), \qquad (11) \end{aligned}$$

ce qui montre aussi que $c_k^{(\mathbf{r})}\in\mathbb{N}$. Notons que le membre de droite de (11) s'apparente au développement de la $n$ième fonction symétrique *puissance* $p_n(x_1,\ldots,x_m)$ dans la base des fonctions symétriques homogènes donné par la formule de Waring [8, 13].

D'autre part, en développant le membre de droite de (9) par la formule binomiale, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k}\sum_{i\geq 1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}(1-x_1)^{-i}\cdots(1-x_m)^{-i}\\ =&\sum_{\substack{\mathbf{r}\\|\mathbf{r}|>0}}\sum_{i\geq 1}\frac{(-1)^{k-i}}{i}\binom{k-1}{i-1}\prod_{l=1}^m\binom{r_l+i-1}{r_l}x_l^{r_l}, \end{aligned}$$

ce qui donne, en extrayant le coefficient de $x_1^{r_1}\ldots x_m^{r_m}$, le résultat suivant

Corollaire 2. *On a la formule explicite pour* $c_k^{(\mathbf{r})}$ *:*

$$\begin{aligned} c_k^{(\mathbf{r})} &= |\mathbf{r}|\sum_{i\geq 1}\frac{(-1)^{k-i}}{i}\binom{k-1}{i-1}\prod_{l=1}^m\binom{r_l+i-1}{r_l} \qquad (12)\\ &= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^k(-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}\binom{i+r_j-1}{r_j-1}\prod_{l=1,l\neq j}^m\binom{r_l+i-1}{r_l}. \qquad (13) \end{aligned}$$

En particulier, pour $m=1$ et $m=2$, la formule (12) permet de retrouver les deux expressions explicites de Lassalle [11]. En fait, pour $m=1$ la formule (9) se réduit directement à

$$\frac{k}{r_1}c_k^{(r_1)} = [x_1^{r_1}]\, x_1^k(1-x_1)^{-k} = [x_1^{r_1}] \sum_{l\geq k}\binom{l-1}{k-1}x_1^l \Longrightarrow c_k^{(r_1)} = \binom{r_1}{k}. \tag{14}$$

Pour $m=2$ la formule (12) sécrit

$$\begin{aligned} c_k^{(r_1,r_2)} &= \frac{r_1+r_2}{k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\binom{i+r_1-1}{r_1}\binom{i+r_2-1}{r_2} \\ &= (-1)^{k-1}(r_1+r_2)\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k+1, r_1+1, r_2+1\\ 2,1\end{matrix};1\right]. \end{aligned}$$

Appliquons deux fois la formule (4) à l'expression ci-dessus, ce qui donne bien

$$c_k^{(r_1,r_2)} = \binom{r_1+r_2}{k}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k+1, -r_1, -r_2\\ 1-r_1-r_2, 1\end{matrix};1\right].$$

Remarquons qu'en appliquant une troisième fois (4), on retrouve une autre expression de [11] :

$$\begin{aligned} c_k^{(r_1,r_2)} &= \binom{r_1+r_2}{k}\binom{r_1+r_2}{r_1}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-r_1, -r_2, k-r_1-r_2\\ 1-r_1-r_2, -r_1-r_2\end{matrix};1\right] \\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{r_1+r_2-i}{k}\frac{r_1+r_2}{r_1+r_2-i}\binom{r_1+r_2-i}{i}\binom{r_1+r_2-2i}{r_1-i}. \end{aligned}$$

Remarque. Lorsque tous les r_i sont nuls, le membre de droite de (1) n'a pas de sens. Or il résulte de (8) avec $y=0$ que

$$(1-t)^{-X}\log(1-t)^{-1} = \sum_{n\geq 1}t^n\sum_{k=1}^{n}\binom{X+n-1}{n-k}\frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

ce qui donne le prolongement suivant de (1) pour $\mathbf{r}=0$:

$$\sum_{|\mu|=n}\frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu}l(\mu) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{X+n-1}{n-k}. \tag{15}$$

Cette formule est en fait la *dérivée* d'une formule de Macdonald [12, p. 26] :

$$\sum_{|\mu|=n}\frac{X^{l(\mu)}}{z_\mu} = \binom{X+n-1}{n}.$$

Enfin, en multipliant le membre de gauche de (1) par $t^n x_1^{r_1}\ldots x_m^{r_m}$ et en sommant sur $n\geq 1$ et les entiers $r_1,\ldots,r_m\geq 0$, nous obtenons

$$\sum_{|\mu|\geq 1}t^{|\mu|}\frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu}\sum_{i=1}^{l(\mu)}\prod_{l=1}^{m}(1-x_l)^{-\mu_i},$$

ce qui peut se développer directement à l'aide de (7) comme suit :

$$\sum_{n\geq 0} t^n \frac{(X)_n}{n!} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)} \right)^k = \sum_{n,k\geq 1} \frac{t^n}{k} \binom{X+n-k-1}{n-k} \prod_{l=1}^{m} \sum_{r_l\geq 0} \frac{(k)_{r_l}}{r_l!} x_l^{r_l},$$

et donc nous obtenons l'identité

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \sum_{i=1}^{l(\mu)} \prod_{k=1}^{m} \frac{(\mu_i)_{r_k}}{r_k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \prod_{l=1}^{m} \binom{r_l+k-1}{r_l} \binom{X+n-k-1}{n-k}. \qquad (16)$$

Il est possible d'établir une extension de (16), à l'aide du coefficient $\left\langle \begin{matrix} \mu \\ p \end{matrix} \right\rangle$ introduit par Lassalle dans [10], et qui compte, pour toute partition μ et tout $p \in \mathbb{N}$, le nombre de façons de choisir p éléments dans le diagramme de Ferrers de μ, dont au moins un par ligne.

Proposition 1.

$$\begin{aligned} &\sum_{|\mu|=n} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ p \end{matrix} \right\rangle \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} \prod_{k=1}^{m} \frac{(\mu_i)_{r_k}}{r_k!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\min(p,|r|)} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=k}^{n-p+k} \binom{j-1}{k-1} \binom{n-j-1}{p-k-1} \prod_{l=1}^{m} \binom{r_l+j-1}{r_l} \right) \binom{X+p-k-1}{p-k}. \qquad (17) \end{aligned}$$

Preuve. On a la fonction génératrice suivante [8] :

$$\sum_{p\geq 1} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ p \end{matrix} \right\rangle x^p = \prod_{k\geq 1} \Big((1+x)^k - 1 \Big)^{m_k(\mu)}.$$

Nous pouvons ainsi, comme pour (16), calculer la fonction génératrice du membre de gauche de (17), en le multipliant par $t^n x^p x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m}$ et en sommant sur $n, p \geq 1$ et $r_1, \ldots, r_m \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\sum_{|\mu|\geq 1} t^{|\mu|} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \sum_{p\geq 1} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ p \end{matrix} \right\rangle x^p \sum_{i=1}^{l(\mu)} \prod_{l=1}^{m} (1-x_l)^{-\mu_i} \\ &= \left(1 - \frac{tx}{1-t}\right)^{-X} \left[\log\left(1 - \frac{t}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)}\right) - \log\left(1 - \frac{t(1+x)}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)}\right) \right]. \end{aligned}$$

Développons alors cette dernière expression, ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\sum_{p\geq 0} \left(\frac{tx}{1-t}\right)^p \frac{(X)_p}{p!} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j} \left(\frac{t}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)} \right)^j \left((1+x)^j - 1\right) \\ &= \sum_{j,k\geq 1} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{j} \left(\frac{tx}{1-t}\right)^p \frac{(X)_p}{p!} \left(\frac{t}{(1-x_1)\cdots(1-x_m)} \right)^j \binom{j}{k} x^k \\ &= \sum_{j,k,p\geq 1} \frac{1}{j} \binom{j}{k} \binom{X+p-k-1}{p-k} x^p \left(\prod_{l=1}^{m} \sum_{r_l\geq 0} \frac{(j)_{r_l}}{r_l!} x_l^{r_l} \right) t^{p+j-k} (1-t)^{-p+k}. \end{aligned}$$

Mais en utilisant la formule binomiale sous la forme :

$$(1-t)^{-p+k} = \sum_{n\geq 0} \frac{(p-k)_n}{n!} t^n,$$

en remplaçant n par $n-p-j+k$ et en extrayant le coefficient devant $x^p t^n x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}$, nous obtenons la fonction génératrice du membre de droite. □

Remarque. Pour $p = n$, l'identité (17) donne bien (16).

3 Interprétation en théorie d'espèces

Imaginons que m espèces d'animaux, à savoir r_1 ânes, r_2 belettes, r_3 chevaux, r_4 daims, r_5 écureuils, $\ldots$, r_m mulets organisent une *Table Ronde* sur le thème *Protection des espèces.* Évidemment, l'événement a lieu à Montréal dans la salle de conférence de l'UQAM, où il y a n chaises à la disposition des participants. Le comité d'organisation les place autour de plusieurs tables rondes, et rattache chaque chaise à ses deux voisines à l'aide d'un ruban élastique pour bien fixer l'ordre. Étant donnée une partition μ de n, il est évident que le comité d'organisation a $n!/z_\mu$ possibilités pour placer n chaises données autour de $l = l(\mu)$ tables rondes, à savoir $m_1(\mu)$ tables avec une seule place, $m_2(\mu)$ tables avec deux places, $m_3(\mu)$ tables avec trois places, $\ldots$, $m_n(\mu)$ tables avec n places. Après avoir terminé ce travail, le comité contacte l'âne le plus âgé, pour que celui-ci puisse en choisir une. Les $l(\mu)-1$ autres tables rondes restent donc libres et sont chacune réservées pour l'un des X autres séminaires programmés à Montréal. En fait, c'est le comité d'organisation qui se décide en faveur d'une des $X^{l(\mu)-1}$ réservations possibles.

Puisque l'âne n'a réservé qu'une seule table avec μ_i places, il est déjà assez clair que tout le monde ne pourra pas venir, d'autant plus que les organisateurs n'acceptent pas que deux représentants d'une même espèce s'assoient sur une même chaise. En effet, dans ce cas ils risqueraient de chuchoter l'un avec l'autre tout le temps. Il est cependant tout à fait admissible et même, dans l'esprit de l'entente entre les espèces, désirable, que des représentants de différentes espèces s'installent sur une même chaise. Par ailleurs, toute tentative d'éviter cette cohabitation serait perdue d'avance, parce que chaque espèce tient beaucoup à son indépendance : notamment dans le choix des chaises. Les ânes décident donc d'envoyer l'une des $\binom{r_1}{a}$ délégations possibles, où, évidemment, $1 \leq a \leq r_1$, puisque chaque espèce doit être représentée à Montréal. Après être arrivés dans la salle de conférence, les commissaires choisissent a chaises pour s'y installer dans un ordre linéaire. Autrement dit, l'âne le plus âgé de la commission commence par choisir sa place, et les autres commissaires s'installent, suivant l'âge, l'un après l'autre sur les places choisies à sa gauche jusqu'à ce que le plus jeune âne de la commission s'assoit sur la place choisie à la droite du doyen. Pour les ânes, il y a donc effectivement, en vertu de (5),

$$\sum_{a=1}^{r_1} \binom{r_1}{a} \binom{\mu_i}{a} a = \mu_i \binom{\mu_i + r_1 - 1}{r_1 - 1}$$

manières différentes de prendre leurs fonctions. En résumé nous avons établi le résultat suivant

Lemme 2. *Soit $F_k(r)$ le nombre de façons de choisir des commissaires d'une espèce ayant r représentants et de les installer autour d'une table ayant k chaises, alors*

$$F_k(r) = k\binom{k+r-1}{r-1} = r\binom{k+r-1}{k-1}.$$

Par conséquent, nous avons le résultat explicite suivant :

Proposition 2. *Si $F_k(\mathbf{r})$ (resp. $S_k(\mathbf{r})$) est le nombre de manières de choisir des commissaires de chaque espèce et de les installer autour d'une table avec k places (resp. dont aucune ne doit rester vide), alors on a*

$$F_k(\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^{m} F_k(r_i) = \prod_{l=1}^{m} r_l \binom{k + r_l - 1}{r_l - 1}, \tag{18}$$

et

$$S_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \prod_{l=1}^{m} r_l \binom{i + r_l - 1}{r_l}. \tag{19}$$

En effet, d'après le lemme 2 la formule (18) est évidente, et d'autre part on a l'équivalence suivante :

$$F_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} S_i(\mathbf{r}) \Longleftrightarrow S_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_i(\mathbf{r}),$$

qui permet de déduire (19) par substitution de (18).

Voilà pourquoi le nombre total de scénarios différents est égal à

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{n!}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \sum_{i=1}^{l(\mu)} F_{\mu_i}(\mathbf{r}).$$

La réunion commence bien à l'heure. Hélas, c'est un écureuil qui cause les premiers retards en critiquant la politique des chaises vides. Après un vote, les délégations décident donc que chaque commissaire qui trouve une chaise vide à sa droite éloigne celle-ci et coupe le ruban élastique. Les organisateurs sont dans tous leurs états après avoir appris que des rubans furent coupés. Mais au bout du compte, ils prennent leur parti de la situation et arrangent les chaises vides en plusieurs *queues* derrière les chaises occupées tout en laissant les autres rubans intacts.

Une belette pense qu'il aurait été plus simple de choisir les k chaises réellement occupées d'abord et de les placer autour d'une table ronde plus petite. Le doyen des daims ajoute que cela aurait été possible de $(k-1)!\binom{n}{k}$ manières différentes, mais ensuite il aurait été fort difficile de partitionner les autres $n-k$ chaises en c ordres cycliques et l ordres linéaires, d'autant plus que cette configuration devrait être comptée avec un facteur $X^c \langle k \rangle_l$, puisque il faut bien placer chaque *queue* de chaises derrière une des k places occupées. Rien de plus simple que cela, s'exclame un petit écureuil : on obtient le polynôme de recouvrement $C!(K_{n-k}, X, k)$ du graphe orienté complet K_{n-k} ([5]) ! Et, grâce au théorème de dualité ([4], [9]), le résultat est égal à

$$C!(K_{n-k}, X, k) = (-1)^{n-k} C!(\overline{K_{n-k}}, X, -X-k) = (-1)^{n-k} \langle -X-k \rangle_{n-k} = (X+k)_{n-k},$$

puisque le graphe orienté $\overline{K_{n-k}}$ sans aucun arc n'admet qu'une seule partition en $n-k$ ordres linéaires. Un cheval trouve que ce n'est vraiment pas la peine de renvoyer les lecteurs aux œuvres de ces jeunes vauriens quand, en réalité, on utilise des résultats classiques imaginés par des maîtres tels Berge ([2]), Foata et Strehl ([7]) :

$$\sum_{f:[n-k]\to[n]} X^{\mathrm{cyc}\, f} = (X+k)_{n-k},$$

où la somme porte sur toutes les injections $f : \{1, \ldots, n-k\} \to \{1, \ldots, n\}$ ($\operatorname{cyc} f$ est le nombre de cycles de f). Un grand mulet, cependant, pense qu'il serait souhaitable de présenter une démonstration à la lumière de la théorie des espèces :

$$\exp\left[X\sum_{i\geq 1}(i-1)!\frac{t^i}{i!}\right]\left[1+\sum_{i\geq 1}i!\frac{t^i}{i!}\right]^k = \exp\left[-X\log(1-t)\right]\left[1-t\right]^{-k}$$

$$= [1-t]^{-X-k} = 1+\sum_{i\geq 1}(X+k)_i\frac{t^i}{i!}.$$

Après une halte contemplative, un âne remarque que l'on aurait, par ailleurs, établi deux formules nouvelles pour le nombre de scénarios différents : l'une, plus difficile, correspondant à ce qui vient d'être discuté, et l'autre, plus simple, correspondant au cas où l'on n'aurait pas coupé de ruban élastique.

Théorème 2. *Le nombre total de scénarios différents peut s'exprimer comme suit :*

$$\sum_{|\mu|=n}\frac{n!}{z_\mu}X^{l(\mu)-1}\left(\sum_{i=1}^{l(\mu)}F_{\mu_i}(\mathbf{r})\right) = \sum_{k=1}^{n}F_k(\mathbf{r})(k-1)!\binom{n}{k}(X)_{n-k} \tag{20}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}S_k(\mathbf{r})(k-1)!\binom{n}{k}(X+k)_{n-k}. \tag{21}$$

Les identités (21) et (20) correspondent respectivement aux identités (2) et (16).
On en déduit alors que

$$c_k^{(\mathbf{r})} = \frac{|\mathbf{r}|}{k\cdot\prod_j r_j}S_k(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{S_k(\mathbf{r})\cdot r_j}{k\cdot r_1\cdots r_m}, \tag{22}$$

ce qui montre que $c_k^{(\mathbf{r})}$ est positif et ne dépend pas de n, et par substitution de (19), on retrouve les formules du corollaire 2, dont la dernière, à savoir (13), montre que $c_k^{(\mathbf{r})}$ est un entier.

En fait, nous pouvons renforcer le dernier résultat, c'est-à-dire la conjecture de Lassalle. Supposons que les m espèces d'animaux soient numérotées de 1 à m. La 1ère espèce est donc celle des ânes et nous pouvons parler de la $j$ième espèce avec $1 \leq j \leq m$.

Théorème 3. *Etant données m espèces ayant respectivement $r_1, \ldots, r_m$ représentants et une table entourée de k chaises numérotées de 1 à k, le nombre de façons de choisir des commissaires de chaque espèce et de les installer autour de la table ayant k chaises de sorte qu'aucune chaise ne soit vide et que le doyen de la commission de la $j$ième espèce soit installé sur la chaise numéro k, et que le doyen de toute autre espèce fasse partie de sa propre commision est donné par*

$$T_k(\mathbf{r};j) = \frac{S_k(\mathbf{r})\cdot r_j}{k\cdot r_1\cdots r_m}, \qquad \text{pour} \quad 1\leq j\leq m.$$

Preuve. Evidemment nous pouvons supposer sans perdre de généralité que $j=1$. Il s'agit donc de démontrer que

$$S_k(\mathbf{r}) = kr_2\cdots r_m T_k(\mathbf{r};1).$$

Le doyen de la commission des ânes (ce n'est pas forcément le doyen de tous les r_1 ânes!) choisit, parmi toutes les k chaises (et pas seulement parmi les chaises occupées par les ânes), celle qui porte le plus grand numéro (ici le numéro k) pour présider la séance. Les autres espèces, cependant, sont obligées d'installer le doyen de toute leur espèce (et pas seulement le doyen de leur commission) sur la chaise la plus grande parmi celles occupées par des commissaires de leur espèce (ce n'est pas forcément la plus grande de toutes les k chaises!). $\square$

La formule (22) peut s'interpréter comme suit. Les commissaires des autres espèces approuvent le principe de présidence suggéré par le doyen de la commission des ânes, mais, naturellement, ils insistent sur l'idéal de l'égalité de toutes les espèces. Suivant l'exemple de l'UE, on se décide donc en faveur d'une pratique du tourniquet, ce qui augmente le nombre total de scénarios différents à $c_k^{(\mathbf{r})} = \sum_{j=1}^m T_k(\mathbf{r};j)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Tout le monde est enchanté; seul le jeune mulet revient sur sa question, à savoir comment on pourrait installer les commissaires de façon surjective tout en respectant l'indépendance de toutes les espèces. Un écureuil pense que l'on pourrait utiliser la théorie des espèces virtuelles ([3], sect. 2.5.) pour résoudre ce problème difficile ...

Avant la deuxième conférence, des militants antimondialisation se sont infiltrés dans la salle de conférence pour mettre des graffitis sur p chaises, et notamment sur au moins une chaise à chaque table ronde. Ceci augmente le nombre de scénarios à

$$\sum_{|\mu|=n} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ p \end{matrix} \right\rangle \frac{n!}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} F_{\mu_i}(\mathbf{r}) \right).$$

Le jeune mulet suggère qu'il faudrait commencer par choisir les p chaises dégradées, et noter i (resp. j) le nombre de chaises dégradées (resp. non endommagées) parmi les μ_i chaises autour de la table choisie par le doyen des ânes pour la conférence. Si l'on éloigne les chaises non endommagées de toutes les autres tables, alors il y a

$$\binom{n}{p} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-p} F_{i+j}(\mathbf{r})(i+j-1)! \binom{p}{i} \binom{n-p}{j} (X)_{p-i}$$

possibilités différentes. Comme il y a $(p-i)(p-i+1)(p-i+2)\cdots(n-i-j-1) = (p-i)_{n-p-j}$ manières différentes de réintroduire les $n-p-j$ chaises, on a démontré l'identité suivante

$$\sum_{|\mu|=n} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ p \end{matrix} \right\rangle \frac{n!}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} F_{\mu_i}(\mathbf{r}) \right)$$

$$= \binom{n}{p} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-p} F_{i+j}(\mathbf{r})(p-i)_{n-p-j}(i+j-1)! \binom{p}{i} \binom{n-p}{j} (X)_{p-i},$$

qui est exactement l'identité (17).

4 Liens avec les coefficients de linéarisations

Remarquons d'abord qu'en posant $X = 0$ dans l'équation (1) nous obtenons

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{(n)_{r_i}}{r_j!} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}|} k\, c_k^{(\mathbf{r})} \frac{\langle n \rangle_k}{k!}. \tag{23}$$

Comme $c_k^{(\mathbf{r})}$ est indépendant de n, la détermination de $c_k^{(\mathbf{r})}$ apparaît donc comme le calcul des coefficients de développement du polynôme $(x)_{r_1}\dots(x)_{r_m}$ dans la base $(\langle x\rangle_k)_{k\geq 0}$. De plus, si nous pouvons démontrer autrement que les nombres $c_k^{(\mathbf{r})}$ sont indépendants de n, cette approche fournirait une nouvelle preuve de la conjecture de Lassalle.

Comme dans le paragraphe précédent, nous considérons r_1 ânes, r_2 belettes, …, r_m mulets, qui veulent s'asseoir sur x chaises. De nouveau, deux représentants d'une même espèce ne sont pas autorisés à choisir la même chaise. Il est cependant admissible que des représentants de différentes espèces s'installent sur une même chaise. En fait, ceci est, en général, même inévitable puisque les espèces sont indépendantes dans leur choix des chaises. Voilà pourquoi le nombre de scénarios possibles est égal à $\langle x\rangle_{r_1}\langle x\rangle_{r_2}\cdots\langle x\rangle_{r_m}$.

Soit $E=[r_1]\uplus[r_2]\uplus\cdots\uplus[r_m]$ l'union disjointe des représentants de toutes les espèces. Appelons un sous-ensemble $T\subseteq E$ *transversal* si $\mathrm{card}(T\cap[r_i])\in\{0,1\}$ pour tout $i\in\{1,2,\dots,m\}$. Les transversaux de E sont évidemment les sous-ensembles qu'on peut installer sur une seule chaise. Ceci démontre le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit $d_k(r_1,\dots,r_m)$ le nombre de manières différentes de partitionner E en k transversaux non-vides, alors*

$$\langle x\rangle_{r_1}\cdots\langle x\rangle_{r_m}=\sum_{k\geq 0}d_k(\mathbf{r})\langle x\rangle_k, \tag{24}$$

En particulier, nous avons la formule de linéarisation classique :

$$\langle x\rangle_{r_1}\langle x\rangle_{r_2}=\sum_{k\geq 0}\binom{r_1}{k}\binom{r_2}{k}k!\langle x\rangle_{r_1+r_2-k} \tag{25}$$

En effet, pour $m=2$, s'il y a k transversaux de cardinal deux et si le nombre total de transversaux vaut r_1+r_2-k, alors nous pouvons les choisir de $\binom{r_1}{k}\binom{r_2}{k}k!$ façons distinctes, c'est-à-dire

$$d_{r_1+r_2-k}(r_1,r_2)=\binom{r_1}{k}\binom{r_2}{k}k!.$$

Il est encore plus simple de choisir directement, de façon indépendante, m sous-ensembles de $[x]$ de cardinaux r_1, …, r_m, respectivement. Ceci est possible de $\binom{x}{r_1}\cdots\binom{x}{r_m}$ manières distinctes et montre le théorème suivant.

Théorème 5. *Soit $\tilde{d}_k(\mathbf{r})$ le nombre de manières différentes de choisir m sous-ensembles de $[k]$ de cardinaux r_1, …, r_m, respectivement, de sorte que chaque élément de $[k]$ soit choisi au moins une fois. Alors*

$$\binom{x}{r_1}\cdots\binom{x}{r_m}=\sum_{k\geq 0}\tilde{d}_k(\mathbf{r})\binom{x}{k},\qquad \tilde{d}_k(\mathbf{r})=\frac{k!\,d_k(\mathbf{r})}{r_1!\cdots r_m!}, \tag{26}$$

En particulier, on a

$$\tilde{d}_{r_1+r_2-k}(r_1,r_2)=\binom{r_1+r_2-k}{k,r_1-k,r_2-k}.$$

On peut aussi donner une preuve directe de ce dernier résultat. En effet, choisir deux sous-ensembles E_1 et E_2 de $[x]$ tels que $|E_1| = r_1$, $|E_2| = r_2$ et $|E_1 \cap E_2| = k$ équivaut à choisir un sous-ensemble de $[x]$ de cardinal $r_1 + r_2 - k$ et puis le partitionner en trois blocs de cardinaux k, $r_1 - k$, $r_2 - k$, respectivement. D'où $\tilde{d}_{r_1+r_2-k}(r_1, r_2) = \binom{r_1+r_2-k}{k, r_1-k, r_2-k}$.

Au lieu de choisir, de façon indépendante, $r_1, \ldots, r_m$ éléments de $[x]$ sans répétition, choisissons-les maintenant avec des répétitions possibles. Comme le nombre de façons de choisir n éléments dans $[x]$ avec des répétitions possibles est

$$\left(\!\binom{x}{n}\!\right) = \binom{x+n-1}{n} = \frac{(x)_n}{n!},$$

le nombre de scénarios distincts est donc égal à $\left(\!\binom{x}{r_1}\!\right) \cdots \left(\!\binom{x}{r_m}\!\right)$. Une comparaison avec (23) montre le théorème suivant.

Théorème 6. *Soit $\tilde{c}_k(\mathbf{r})$ le nombre de manières différentes de choisir $r_1, \ldots, r_m$ éléments de $[k]$ avec des répétitions possibles, de sorte que chaque élément de $[k]$ soit choisi au moins une fois, alors*

$$\left(\!\binom{x}{r_1}\!\right) \cdots \left(\!\binom{x}{r_m}\!\right) = \sum_{k \geq 0} \tilde{c}_k(\mathbf{r}) \binom{x}{k}. \tag{27}$$

En particulier on a

$$\tilde{c}_k(r_1, r_2) = \sum_{l+k_1+k_2=k} \binom{k}{l, k_1 - l, k_2 - l} \binom{r_1 - 1}{k_1 - 1} \binom{r_2 - 1}{k_2 - 1}. \tag{28}$$

Il est évident que (27) et (9) fournissent exactement les mêmes interprétations combinatoires pour les nombres $c_k^{(\mathbf{r})}$ introduits par Lassalle.

Notons que l'identité (25) s'écrit encore

$$\frac{(x)_{r_1}}{r_1!} \frac{(x)_{r_2}}{r_2!} = \sum_{l \geq 0} (-1)^l \binom{r_1 + r_2 - l}{l, r_1 - l, r_2 - l} \frac{(x)_{r_1+r_2-l}}{(r_1 + r_2 - l)!}. \tag{29}$$

En utilisant (29) dans (1) nous déduisons le résultat suivant :

Lemme 3. *Les coefficients $c_k^{(\mathbf{r})}$ satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$\frac{c_k^{(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m)}}{r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_m} = \sum_{l \geq 0} (-1)^l \binom{r_1 + r_2 - l}{l, r_1 - l, r_2 - l} \frac{c_k^{(r_1+r_2-l, r_3, \ldots, r_m)}}{r_1 + r_2 - l + r_3 + \cdots + r_m}. \tag{30}$$

En particulier, comme $c_k^{(r_1)} = \binom{r_1}{k}$ (voir (14)), les coefficients $c_k^{(\mathbf{r})}$ sont indépendants de n.

Par comparaison de (23) et (27) il en résulte que

$$\tilde{c}_k(\mathbf{r}) = k\, c_k^{(\mathbf{r})} / |\mathbf{r}|.$$

En vue de déduire une nouvelle preuve de la conjecture de Lassalle, nous introduisons quelques notations supplémentaires. Pour tout polynôme $P(x)$ définissons les opérateurs E, I et Δ comme suit :

$$EP(x) = P(x+1), \quad IP(x) = P(x) \quad \text{et} \quad \Delta = E - I.$$

Pour tout $k \geq 0$ posons $\Delta^0(P(x)) = P(x)$ et $\Delta^{k+1} = \Delta(\Delta^k)$. La formule binomiale implique que

$$\Delta^n P(x) = (E-I)^n P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(x+n-k), \tag{31}$$

et d'autre part nous avons le développement de Taylor suivant :

$$P(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} \langle x\rangle_k. \tag{32}$$

En vertu de la formule de Chu-Vandermonde (5) on a

$$(x)_n = \sum_{j\geq 0} \binom{n}{j} (j)_{n-j} \langle x\rangle_j.$$

Ainsi

$$\prod_{i=1}^{m} (x)_{r_i} = \sum_{j_1,\ldots,j_m\geq 0} \prod_{i=1}^{m} \binom{r_i}{j_i} (j_i)_{r_i-j_i} \langle x\rangle_{j_i}. \tag{33}$$

Substituons (24) dans (33) :

$$\prod_{i=1}^{m} (x)_{r_i} = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}|} \sum_{j_1,\ldots,j_m\geq 0} \left(\prod_{i=1}^{m} \binom{r_i}{j_i} (j_i)_{r_i-j_i} \right) d_k(\mathbf{j}) \langle x\rangle_k. \tag{34}$$

D'autre part, en appliquant directement (31) et (32) avec $P(x) = (x)_{r_1} \cdots (x)_{r_m}$ nous obtenons

$$\prod_{i=1}^{m} (x)_{r_i} = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}|} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \prod_{i=1}^{m} (k-j)_{r_i} \right) \langle x\rangle_k. \tag{35}$$

Grâce au lemme 3 la comparaison de (23) avec (34) et (35) montre le théorème suivant.

Théorème 7. *On a d'une part*

$$c_k^{(\mathbf{r})} = \frac{r_1 + \cdots + r_m}{r_1! \cdots r_m!} \sum_{j_1,\ldots,j_m\geq 0} \left(\prod_{i=1}^{m} \binom{r_i}{j_i} (j_i)_{r_i-j_i} \right) \frac{d_k(\mathbf{j})}{k}, \tag{36}$$

et d'autre part la formule explicite (13), c'est-à-dire,

$$c_k^{(\mathbf{r})} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i-1} \binom{i+r_j-1}{r_j-1} \prod_{l=1, l\neq j}^{m} \binom{r_l+i-1}{r_l}. \tag{37}$$

Il résulte respectivement de (36) et (37) que $c_k^{(\mathbf{r})}$ est entier et positif.

Remarque. Un q-analogue des résultats de cette dernière section sera traité dans un article ultérieur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Andrews, R. Askey et R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Math. and its Applications, **71** (2000).

[2] C. Berge, *Chemins hamiltoniens*, ICC Research Report n^o 67/2 (1967).

[3] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, Publ. LACIM, vol. 19, Montréal (1994).

[4] T. Chow, *The path-cycle symmetric function of a digraph*, Advances in Mathematics, **118** (1996), 71-98.

[5] F. R. K. Chung et R. L. Graham, *On the cover polynomial of a digraph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **65** (1995), 273-290.

[6] T. Eisenkolbl, *Proof of a partition identity conjectured by Lassalle*, arXiv: math.CO/9903019.

[7] D. Foata et V. Strehl, *Combinatorics of Laguerre polynomials*, Enumeration and design (Waterloo, Ont., 1982), 123–140, Academic Press, Toronto, ON, 1984.

[8] F. Jouhet et J. Zeng, *Généralisation de formules de type Waring*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **44**, 2000.

[9] B. Lass, *Variations sur le thème $E+\overline{E} = XY$*, Advances in Applied Mathematics, **29** (2002), 215-242.

[10] M. Lassalle, *Une identité en théorie des partitions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **89** (2000), 270–288.

[11] M. Lassalle, *A new family of positive integers*, arXiv:math.CO/0210208.

[12] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Oxford Science Publications, 1995.

[13] M.P. MacMahon, *Combinatory analysis*, reprinted by Chelsea Publ. Company, 1960.

[14] J. Zeng, *A bijective proof of Lassalle's partition identity*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **89** (2000), 289–290.