Europ. J. Combinatorics (1998) **19**, 507–518
Article No. ej980207

Moments des Polynômes Orthogonaux Unitaires de Sheffer Généralisés et Spécialisations†

ARTHUR RANDRIANARIVONY

Recently, Zeng has given a combinatorial interpretation of the moments of q-Laguerre and q-Charlier polynomials. On the other hand, generalizations of Laguerre polynomials have been studied by A. de Médicis and Viennot, Simion and Stanton. In the present paper, by using the same methods, we propose to answer the question of finding a combinatorial interpretation of the moments of a sequence of some orthogonal polynomials, which was originally raised by Zeng in his unpublished note in 1992.

1. INTRODUCTION

Le principal résultat de cet article est de proposer deux interprétations combinatoires, en termes de statistiques sur les permutations, des moments des polynômes orthogonaux unitaires

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x) \quad (n \geq 0) \tag{1}$$

avec les conditions initiales $P_{-1}(x) = 0,\ P_0(x) = 1$.

Dans la formule ci-dessus,

$$b_n = (a[n+1; \alpha]_{r,s} + b[n; \beta]_{t,u})x^n, \quad \lambda_n = cd[n; \gamma]_{p,q}[n; \mu]_{v,w}x^{2n-1} \tag{2}$$

où $[n; a]_{p,q} = ap^{n-1} + p^{n-2}q + \cdots + pq^{n-2} + q^{n-1}$.

Rappelons [4] que, si $\mathcal{L}$ est la fonctionnelle linéaire définie par $\mathcal{L}(1) = 1$ et $\mathcal{L}(P_n(x)P_m(x)) = 0$ pour $n \neq m$, alors $\mu_n = \mathcal{L}(x^n)$ est le moment d'ordre n de ces polynômes orthogonaux.

Selon les méthodes classiques, développées particulièrement par Flajolet [8] et Viennot [19], les moments sont des fonctions génératrices des valuations des chemins de Motzkin où chaque pas Nord-Est (resp. Sud-Est, Est bleu, Est rouge) de niveau k a pour valuation α_k (resp. β_k, γ'_k, γ''_k) de telle sorte que $b_k = \alpha_{k-1}\beta_k$ et $\lambda_k = \gamma'_k + \gamma''_k$; la valuation d'un chemin étant le produit des valuations de ses pas.

Le problème est alors équivalent à la donnée d'une interprétation des coefficients du développement de Taylor de la J-fraction continue avec les paramètres b_n et λ_n.

Le problème a été antérieurement étudié par plusieurs auteurs [1, 2, 6, 12, 14, 17, 18, 21, 22] dans divers cas. En 1989, Zeng [21] a dérivé un q-analogue des moments des polynômes de Laguerre en combinant un q-analogue de la formule de Gauss et une bijection de Dumont–Kreweras. Plus récemment, de Médicis et Viennot [2], d'une part, Simion et Stanton [17], d'autre part, ont appliqué les bijections de Françon–Viennot et de Biane–Foata–Zeilberger, qui sont équivalents selon la bijection de Clarke–Steingrímsson–Zeng, pour obtenir des résultats analogues. De plus, Dumont [7] a donné une preuve combinatoire du résultat de Zeng en utilisant la bijection de Biane.

Dans sa note non publiée en 1992, Zeng avait soulevé la question de trouver une interprétation combinatoire des moments des polynômes orthogonaux unitaires avec les paramètres (2).

†Cet article est dédié à D. Stanton.

0195-6698/98/040507 + 12 $25.00/0

Le principal objectif de cet article est donc de répondre à cette question, en utilisant les mêmes méthodes que celles de ces susdits auteurs.

Dans [17], Simion et Stanton ont étudié le même problème pour une suite de polynômes orthogonaux avec les paramètres

$$b_n = (a[n+1]_{r,s} + b[n]_{t,u}), \quad \lambda_n = ab[n]_{p,q}[n]_{v,w}. \tag{3}$$

Ceci est équivalent à (2) pour $a = c$, $b = d$ et $\alpha = \beta = \gamma = \mu = 1$. Pour cela, en faisant la substitution suivante dans (3):

$$b \leftarrow bx, \ \theta \leftarrow \theta x \quad \text{pour } \theta \in \{r, s, t, u, p, q, v, w\},$$

les coefficients deviennent

$$b_n = (a[n+1]_{r,s} + b[n]_{t,u})x^n, \quad \lambda_n = cd[n]_{p,q}[n]_{v,w}x^{2n-1}. \tag{4}$$

Ils ont montré que les moments des polynômes orthogonaux avec les paramètres (3) ont pour interprétation

$$\begin{aligned}\mu_n(SS) = \sum_{\pi \in S_n} & a^{\mathrm{run}(\pi)} b^{n-\mathrm{run}(\pi)} r^{\mathrm{lsg(sing)}(\pi)} t^{\mathrm{lsg(cont)}(\pi)} p^{\mathrm{lsg(op)}(\pi)} v^{\mathrm{lsg(clos)}(\pi)} \\ & s^{\mathrm{rsg(sing)}(\pi)} u^{\mathrm{rsg(cont)}(\pi)} q^{\mathrm{rsg(op)}(\pi)} w^{\mathrm{rsg(clos)}(\pi)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Ces statistiques sont définies [17, 18] comme suit.

Soient π une permutation de $[n]$, considérée comme un mot de n lettres, et $S_1 S_2 \cdots S_r$ sa décomposition en une suite de séquences croissantes maximales. On note $r = \mathrm{run}(\pi)$. Si la séquence S_i $(1 \le i \le r)$ ne contient qu'une seule lettre, cette lettre est appelée *double descente* de π (ou 'singleton'); si elle est de longueur ≥ 2, ses première et dernière lettres sont dites respectivement *creux* (ou 'opener') et *pic* de π (ou 'closer') et les autres lettres *doubles montées* de π (ou 'continuation elements').

On note $\mathrm{sing}(\pi)$ le nombre de doubles descentes de π; on définit de même $\mathrm{op}(\pi)$, $\mathrm{clos}(\pi)$ et $\mathrm{cont}(\pi)$.

Pour tout $i \in [n]$, $\mathrm{lsg}(\pi; i)$ (resp. $\mathrm{rsg}(\pi; i)$) désigne le nombre de séquences de π embrassant i et situées à sa gauche (resp. à sa droite), c'est-à-dire, si i est dans la séquence S_l, alors $\mathrm{lsg}(\pi; i) = \#\{j < l/ \ \min S_j < i < \max S_j\}$, (resp. $\mathrm{rsg}(\pi; i) = \#\{j > l/ \ \min S_j < i < \max S_j\}$).

On pose

$$\mathrm{lsg}(\pi) = \sum_{i \in [n]} \mathrm{lsg}(\pi; i), \quad \mathrm{rsg}(\pi) = \sum_{i \in [n]} \mathrm{rsg}(\pi; i).$$

$\mathrm{lsg(sing)}(\pi)$ désigne la somme des $\mathrm{lsg}(\pi; i)$ sur toutes les doubles descentes de π. On définit de même les statistiques $\mathrm{lsg(op)}(\pi)$,..., $\mathrm{rsg(sing)}(\pi) \cdots$.

Nous notons $\mathrm{Orsg}(\pi)$ le nombre des i tels que $\mathrm{rsg}(\pi; i) = 0$, et par analogie, $\mathrm{Orsg(sing)}$ (π), par exemple, désigne le nombre de doubles descentes i de π telles que $\mathrm{rsg}(\pi; i) = 0$.

Dans [2], de Médicis et Viennot ont défini les statistiques 'croisement' et 'paire imbriquée' sur les involutions sans point fixe. Nous gardons ces appellations mais en modifiant leurs définitions sur les permutations quelconques.

Nous appelons *croisement* d'une permutation σ tout couple (i, j) vérifiant $i < j < \sigma(i) < \sigma(j)$ ou $\sigma(i) < \sigma(j) \le i < j$. De même, une *paire imbriquée* de σ est un couple (i, j) tel que $i < j < \sigma(j) < \sigma(i)$ ou $\sigma(j) < \sigma(i) \le i < j$. On note respectivement $\mathrm{cr}(\sigma)$ et $\mathrm{pbr}(\sigma)$ le nombre de croisements et le nombre de paires imbriquées de σ.

Si (i, j) est un croisement ou une paire imbriquée de σ, l'élément $\sigma(k)$ tel que $i < j < \sigma(k) < \sigma(l)$ ou $\sigma(l) < \sigma(k) \le i < j$, avec $k, l \in \{i, j\}$, est dit *élément distingué* de σ pour (i, j).

Par analogie aux précédentes, on note $\mathrm{cr(cc)}(\sigma)$ le nombre de croisements de σ pour lesquels les éléments distingués sont des creux de cycle de σ. On définit également les autres statistiques: par exemple, $\mathrm{pbr(dmc)}(\sigma)$ désigne le nombre de paires imbriquées de σ pour lesquelles les éléments distingués sont des doubles montées de cycle de σ.

Dans ce présent article, notre but est d'établir les deux théorèmes suivants et d'étudier quelques spécialisations.

THÉORÈME 1. *Les moments μ_n $(n \ge 1)$ des polynômes orthogonaux unitaires de Sheffer généralisés dont les coefficients de la récurrence linéaire* (1) *sont définis par la relation* (2) *ont l'interprétation:*

$$\begin{aligned}\mu_n = \sum_{\sigma\in S_n} & a^{\mathrm{ddc}(\sigma)} b^{\mathrm{dmc}(\sigma)} c^{\mathrm{cc}(\sigma)} d^{\mathrm{pc}(\sigma)} \alpha^{\mathrm{sid(ddc)}(\sigma)} \beta^{\mathrm{ssg(dmc)}(\sigma)} \gamma^{\ sid\mathrm{(cc)}(\sigma)} \\ & \times \mu^{\mathrm{ssg(pc)}(\sigma)} r^{\mathrm{cr(ddc)}(\sigma)} t^{\mathrm{cr(dmc)}(\sigma)} p^{\mathrm{cr(cc)}(\sigma)} v^{\mathrm{cr(pc)}(\sigma)} \\ & \times s^{\mathrm{pbr(ddc)}(\sigma)} u^{\mathrm{pbr(dmc)}(\sigma)} q^{\mathrm{pbr(cc)}(\sigma)} w^{\mathrm{pbr(pc)}(\sigma)} x^{\mathrm{D}(\sigma)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dans cette relation (6), $\mathrm{dmc}(\sigma)$ est le nombre de doubles montées de cycle de $\sigma, \ldots,$ $\mathrm{D}(\sigma)$ est la somme des pics de cycle de σ moins la somme des creux de cycle de σ, $\mathrm{sid}(\pi)$ (resp. $\mathrm{ssg}(\pi)$) désigne le nombre de saillants inférieurs droits (resp. le nombre de saillants supérieurs gauches) de π, c'est-à-dire le nombre des i tels que, pour tout $j > i$ (resp. $j < i$), $\pi(j) > \pi(i)$ (resp. $\pi(j) < \pi(i)$). Les statistiques $\mathrm{sid(ddc)}(\pi)$, $\mathrm{ssg(pc)}(\pi), \ldots$ sont donc définies de la même manière que précédemment.

Par la bijection de Clarke–Steingrímsson–Zeng [5], on a le théorème équivalent suivant.

THÉORÈME 2. *Les moments μ_n $(n \ge 1)$ des polynômes orthogonaux unitaires de Sheffer généralisés dont les coefficients de la récurrence linéaire* (1) *sont définis par la relation* (2) *ont l'interprétation:*

$$\begin{aligned}\mu_n = \sum_{\pi\in S_n} & a^{\mathrm{sing}(\pi)} b^{\mathrm{cont}(\pi)} c^{\mathrm{op}(\pi)} d^{\mathrm{clos}(\pi)} \alpha^{\mathrm{Orsg(sing)}(\pi)} \beta^{\mathrm{Orsg(cont)}(\pi)} \\ & \times \gamma^{\mathrm{Orsg(op)}(\pi)} \mu^{\mathrm{Orsg(clos)}(\pi)} r^{\mathrm{lsg(sing)}(\pi)} t^{\mathrm{lsg(cont)}(\pi)} p^{\mathrm{lsg(op)}(\pi)} v^{\mathrm{lsg(clos)}(\pi)} \\ & \times s^{\mathrm{rsg(sing)}(\pi)} u^{\mathrm{rsg(cont)}(\pi)} q^{\mathrm{rsg(op)}(\pi)} w^{\mathrm{rsg(clos)}(\pi)} x^{\mathrm{D}'(\pi)} \end{aligned} \tag{7}$$

où $\mathrm{D}'(\pi)$ *est la somme des pics de π moins la somme des creux de π.*

La démonstration du Théorème 1 est basée sur la bijection de Foata–Zeilberger dont nous rappelons l'énoncé dans la Section 2. Nous énonçons dans la Section 3 la bijection de Clarke–Steingrímsson–Zeng qui nous conduira au Théorème 2.

La Section 4 est consacrée à l'étude de quelques spécialisations telles que les q-polynômes d'Hermite, les q-polynômes de Charlier et les q-polynômes de Laguerre. Nous terminons ce travail par des remarques.

2. BIJECTION DE FOATA–ZEILBERGER ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On doit à Foata et Zeilberger [9] d'avoir construit une bijection entre le groupe symétrique et les chemins de Motzkin valués appelés *histoires de Laguerre*. Rappelons qu'un *chemin* *de Motzkin* de longueur n est un mot $c = c_1c_2\cdots c_n$ de l'alphabet $\{\,—,\ \text{- - -},\ \diagup,\ \diagdown\}$ tel que, si l'on pose

$$h_i(c) = \#\{j \le i;\ c_j = \diagup\} - \#\{j \le i;\ c_j = \diagdown\} \text{ pour tout } i \in [n],$$

alors $h_i(c) \ge 0$ pour tout i et $h_n(c) = 0$. On convient que $h_0(c) = 0$.

$h_{i-1}(c)$ est appelé *niveau* du i-ème pas c_i du chemin c. Un pas $\diagup$ (resp. $\diagdown$, - - -, $—$) correspond à un pas Nord-Est (resp. Sud-Est, Est-bleu, Est-rouge).

Un chemin de Motzkin sans pas Est est appelé *chemin de Dyck*.

Une *histoire de Laguerre* de longueur n est par définition un couple (c, p) où $c = c_1\cdots c_n$ est un chemin de Motzkin de longueur n et $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une suite de n entiers tels que $0 \le p_i \le h_{i-1}(c) - 1$ si $c_i = \text{- - -}$ ou $\diagdown$, et $0 \le p_i \le h_{i-1}(c)$ si $c_i = —$ ou $\diagup$.

La bijection de Foata–Zeilberger se traduit par le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Il existe une bijection ψ_{FZ} de S_n sur l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur n telle que, si $(c, p) = \psi_{\mathrm{FZ}}(\sigma)$, on a les équivalences suivantes:*

$c_i = \diagup$ *si et seulement si i est un creux de cycle de σ;*
$c_i = \text{- - -}$ *si et seulement si i est une double montée de cycle de σ;*
$c_i = —$ *si et seulement si i est une double descente de cycle de σ;*
$c_i = \diagdown$ *si et seulement si i est un pic de cycle de σ.*

De plus,

$$p_i = \begin{cases} \#\{j < \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) > i\} & \textit{si } \sigma^{-1}(i) < i; \\ \#\{j > \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) < i\} & \textit{si } \sigma^{-1}(i) \ge i. \end{cases} \tag{8}$$

Si $c = c_1\cdots c_n$ est le chemin associé à σ, on a nécessairement

$$h_{i-1}(c) = \#\{j < i;\ \sigma(j) \ge i\} = \#\{j < i;\ \sigma^{-1}(j) \ge i\},\ \forall i \in [n]. \tag{9}$$

D'après ce que nous avons rappelé au début, si on associe à chaque pas Nord-Est (resp. Sud-Est, Est bleu, Est rouge) de niveau k la valeur α_k (resp. β_k, γ'_k, γ''_k) telle que $b_k = \alpha_{k-1}\beta_k$ et $\lambda_k = \gamma'_k + \gamma''_k$, alors le moment d'ordre n des polynômes orthogonaux définis par (1) est

$$\mu_n = \sum_c \prod_{c_i = /} \alpha_{h_{i-1}(c)} \prod_{c_i = \text{- - -}} \gamma'_{h_{i-1}(c)} \prod_{c_i = -} \gamma''_{h_{i-1}(c)} \prod_{c_i = \backslash} \beta_{h_{i-1}(c)} \tag{10}$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Motzkin de longueur n.

Notons que, si $\gamma'_n = \gamma''_n = 0$ pour tout n, la sommation est étendue à tous les chemins de Dyck de longueur n. Dans ce dernier cas, $\mu_{2n-1} = 0$.

PROPOSITION 4. *Soient $\sigma \in S_n$ et $(c, p) = \psi_{\mathrm{FZ}}(\sigma)$. On a:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{cr(ddc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = -} h_{i-1}(c) - p_i; & \mathrm{pbr(ddc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = -} p_i;\\
\mathrm{cr(dmc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = \text{- - -}} h_{i-1}(c) - 1 - p_i; & \mathrm{pbr(dmc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = \text{- - -}} p_i;\\
\mathrm{cr(cc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = /} h_{i-1}(c) - p_i; & \mathrm{pbr(cc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = /} p_i;\\
\mathrm{cr(pc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = \backslash} h_{i-1}(c) - 1 - p_i; & \mathrm{pbr(pc)}(\sigma) &= \sum_{c_i = \backslash} p_i;
\end{aligned}$$

$$D(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} h_{i-1}(c).$$

DÉMONSTRATION. Soient $\sigma \in S_n$ et $(c, p) = (c_1 \cdots c_n, (p_1, p_2, \ldots, p_n)) = \psi_{\mathrm{FZ}}(\sigma)$. Utilisons la bijection de Foata–Zeilberger et les relations (8) et (9). On a:

$$
\begin{aligned}
\sum_{c_i = \text{- - -}} h_{i-1}(c) - 1 - p_i &= \sum_{\sigma^{-1}(i) < i < \sigma(i)} \#\{j < i;\ \sigma(j) \geq i\} - \#\{j \leq \sigma^{-1}(i); \sigma(j) \geq i\} \\
&= \#\{(j, i);\ \sigma^{-1}(i) < j < i \leq \sigma(j),\ i < \sigma(i)\} \\
&= \#\{(l, j);\ l < j < \sigma(l) < \sigma(j),\ \sigma(l) < \sigma^2(l)\};
\end{aligned}
$$

d'où la première égalité.

Les sept égalités suivantes se démontrent de la même manière. Quant à la dernière, on utilise l'identité $\mathrm{D}(\sigma) = \mathrm{cr}(\sigma) + \mathrm{pbr}(\sigma) + \mathrm{exc}(\sigma)$ qui a été démontrée dans [15, Proposition 2.4]; $\mathrm{exc}(\sigma)$ étant le nombre d'excédences de σ. $\square$

Par ailleurs, le Théorème 3 implique que, si $\sigma \in S_n$ et $(c, p) = \psi_{\mathrm{FZ}}(\sigma)$, alors on a, pour $1 \leq i \leq n$,

- i est à la fois une double montée (resp. un pic) de cycle et un élément saillant supérieur gauche de σ si et seulement si $c_i = \text{- - -}$ (resp. $c_i = \diagdown$) et $p_i = 0$;
- i est à la fois une double descente (resp. un creux) de cycle et un élément saillant inférieur droit de σ si et seulement si $c_i = -$ (resp. $c_i = \diagup$) et $p_i = 0$.

Il résulte de la Proposition précédente que le second membre de la relation (6) est égal à

$$
\begin{aligned}
\sum_c \prod_{c_i = -} \sum_{p_i = 0}^{h_{i-1}(c)} a\alpha^{\delta_{0,p_i}} r^{h_{i-1} - p_i} s^{p_i} x^{h_{i-1}} \prod_{c_i = \text{- - -}} \sum_{p_i = 0}^{h_{i-1}(c) - 1} b\beta^{\delta_{0,p_i}} t^{h_{i-1} - 1 - p_i} u^{p_i} x^{h_{i-1}} \\
\prod_{c_i = /} \sum_{p_i = 0}^{h_{i-1}(c)} c\gamma^{\delta_{0,p_i}} p^{h_{i-1} - p_i} q^{p_i} x^{h_{i-1}} \prod_{c_i = \backslash} \sum_{p_i = 0}^{h_{i-1}(c) - 1} d\mu^{\delta_{0,p_i}} v^{h_{i-1} - 1 - p_i} w^{p_i} x^{h_{i-1}}
\end{aligned}
$$

soit, après simplification,

$$
\begin{aligned}
\sum_c \prod_{c_i = -} a[h_{i-1}(c) + 1; \alpha]_{r,s} x^{h_{i-1}} \prod_{c_i = \text{- - -}} b[h_{i-1}(c); \beta]_{t,u} x^{h_{i-1}} \\
\prod_{c_i = /} c[h_{i-1}(c) + 1; \gamma]_{p,q} x^{h_{i-1}} \prod_{c_i = \backslash} d[h_{i-1}(c); \mu]_{v,w} x^{h_{i-1}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, en prenant

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= c[n + 1; \gamma]_{p,q} x^n, & \beta_n &= d[n; \mu]_{v,w} x^n, \\
\gamma_n' &= b[n; \beta]_{t,u} x^n, & \gamma_n'' &= a[n + 1; \alpha]_{r,s} x^n,
\end{aligned}
$$

on obtient le Théorème 1 en utilisant la relation (10). $\square$

3. BIJECTION DE CLARKE–STEINGRÍMSSON–ZENG ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

On doit également à Clarke *et al.* [5] d'avoir construit une bijection Φ de S_n sur S_n telle que, si $\sigma = \Phi(\pi)$, alors Φ possède les propriétés suivantes:

(P1) On a les équivalences:

- i est un pic de cycle de σ si et seulement si i est un pic de π;
- i est un creux de cycle de σ si et seulement si i est un creux de π;

– i est une double montée de cycle de σ si et seulement si i est une double montée de π;
– i est une double descente de cycle de σ si et seulement si i est une double descente de π;

(P2) Si $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ sont les doubles montées et creux de π, $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k)$ sont les doubles montées et pics de π, et de plus $\operatorname{rsg}(\pi; \sigma(i_1))$ $\operatorname{rsg}(\pi; \sigma(i_2)) \cdots \operatorname{rsg}(\pi; \sigma(i_k))$ est la table d'inversion à gauche de $\sigma(i_1)\sigma(i_2 \cdots \sigma(i_k)$;

(P3) Si $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k})$ sont les doubles descentes et pics de π, $\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_{n-k})$ sont les doubles descentes et creux de π, et de plus $\operatorname{rsg}(\pi; \sigma(j_1))\operatorname{rsg}(\pi; \sigma(j_2)) \cdots \operatorname{rsg}(\pi; \sigma(j_{n-k}))$ est la table d'inversion à droite de $\sigma(j_1)\ \sigma(j_2 \cdots \sigma(j_{n-k})$.

PROPOSITION 5. *Pour toute permutation π de $[n]$, on a:*

$$\begin{array}{llllll}
\operatorname{lsg}(\mathrm{sing})(\pi) & = & \operatorname{cr}(\mathrm{ddc})(\Phi(\pi)), & \operatorname{rsg}(\mathrm{sing})(\pi) & = & \operatorname{pbr}(\mathrm{ddc})(\Phi(\pi)),\\
\operatorname{lsg}(\mathrm{cont})(\pi) & = & \operatorname{cr}(\mathrm{dmc})(\Phi(\pi)), & \operatorname{rsg}(\mathrm{cont})(\pi) & = & \operatorname{pbr}(\mathrm{dmc})(\Phi(\pi)),\\
\operatorname{lsg}(\mathrm{op})(\pi) & = & \operatorname{cr}(\mathrm{cc})(\Phi(\pi)), & \operatorname{rsg}(\mathrm{op})(\pi) & = & \operatorname{pbr}(\mathrm{cc})(\Phi(\pi)),\\
\operatorname{lsg}(\mathrm{clos})(\pi) & = & \operatorname{cr}(\mathrm{pc})(\Phi(\pi)), & \operatorname{rsg}(\mathrm{clos})(\pi) & = & \operatorname{pbr}(\mathrm{pc})(\Phi(\pi)).
\end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit π une permutation de $[n]$, $\sigma = \Phi(\pi)$ et $(c, p) = \psi_{\mathrm{FZ}}(\sigma)$ avec $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

La relation (8) et les propriétés de Φ impliquent que, pour tout $i \in [n]$, $p_i = \operatorname{rsg}(\pi, i)$. Compte-tenu [16] de l'égalité

$$h_{i-1}(c) = \begin{cases} \#\{\text{séquences de } \pi \text{ qui embrassent } i\} \text{ si } i \text{ n'est pas un pic de } \pi;\\ \#\{\text{séquences de } \pi \text{ qui embrassent } i\}+1 \text{ si } i \text{ est un pic de } \pi,\end{cases}$$

la Proposition 5 se déduit alors de la Proposition 4. □

PROPOSITION 6. *Pour toute permutation π de $[n]$, on a:*

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{D}'(\pi) & = & \mathrm{D}(\Phi(\pi)), & & & \\
\operatorname{Orsg}(\mathrm{sing})(\pi) & = & \operatorname{sid}(\mathrm{ddc})(\Phi(\pi)), & \operatorname{Orsg}(\mathrm{op})(\pi) & = & \operatorname{sid}(\mathrm{cc})(\Phi(\pi)),\\
\operatorname{Orsg}(\mathrm{cont})(\pi) & = & \operatorname{ssg}(\mathrm{dmc})(\Phi(\pi)), & \operatorname{Orsg}(\mathrm{clos})(\pi) & = & \operatorname{ssg}(\mathrm{pc})(\Phi(\pi)).
\end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit π une permutation de $[n]$, $\sigma = \Phi(\pi)$ et $(c, p) = \psi_{\mathrm{FZ}}(\sigma)$ avec $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

La première égalité est évidente d'après la propriété (P1). D'autre part, la relation (8) nous montre également que

(i) $\operatorname{sid}(\mathrm{ddc})(\sigma)$ (resp. $\operatorname{sid}(\mathrm{cc})(\sigma)$) est égal au nombre de doubles descentes (resp. de creux) de cycle i de σ telles que $p_i = 0$;

(ii) $\operatorname{ssg}(\mathrm{dmc})(\sigma)$ (resp. $\operatorname{ssg}(\mathrm{pc})(\sigma)$) est égal au nombre de doubles montées (resp. de pics) de cycle i de σ telles que $p_i = 0$.

Or,

$$p_i = \operatorname{rsg}(\pi, i) \quad \text{pour tout } i.$$

Donc on obtient la proposition. □

Par suite, le Théorème 2 résulte du Théorème 1 et des Propositions 5 et 6. □

REMARQUE. On peut démontrer le Théorème 2 à partir de la bijection de Françon–Viennot [10].

4. Spécialisations

4.1. q-polynômes d'Hermite de 1-ère et 2-ème espèces. On sait que ces q-polynômes satisfont la relation de récurrence (1) avec les paramètres respectifs

$$b_n = 0, \quad \lambda_n = [n]_q \tag{11}$$

et

$$b_n = 0, \quad \lambda_n = [n]_q q^{n-1}. \tag{12}$$

Dans [2], de Médicis et Viennot ont interprété combinatoirement leurs moments en termes de croisements et de paires imbriquées sur l'ensemble des involutions sans point fixe.

Nous nous proposons d'interpréter ces moments en termes d'inversions. Notons que les moments d'ordre impair sont nuls.

Soit INV$[n]$ l'ensemble des involutions sans point fixe de $[2n]$, $\mathrm{inv}_p(\sigma)$ le nombre des inversions $(2i, 2j)$ d'une permutation σ, et t la première transformation fondamentale de Foata [3, 13], i.e la bijection $\sigma \mapsto \tau$ définie comme suit: on décompose σ en produit de cycles, on place en tête de chaque cycle son plus petit élément, puis on ordonne ses cycles selon l'ordre décroissant de leurs plus petits éléments et enfin on supprime les parenthèses pour avoir τ écrite sous sa forme linéaire.

Théorème 7. *Les moments d'ordre pair des q-polynômes d'Hermite de* 1*-ère et* 2*-ème espèces ont pour interprétations respectives:*

$$\mu_{2n}^{(1)}(H) = \sum_{\tau \in \mathrm{INV}[n]} q^{n(n-1)/2 - \mathrm{inv}_p(t(\tau))}$$
$$\mu_{2n}^{(2)}(H) = \sum_{\tau \in \mathrm{INV}[n]} q^{2n(n-1) - \mathrm{inv}(t(\tau))}.$$

Démonstration. On tire du Théorème 2 l'égalité

$$\mu_{2n}^{(1)}(H) = \sum_{\pi \in \mathcal{A}_{2n}} q^{\mathrm{rsg(clos)}(\pi)}$$

où $\mathcal{A}_{2n}$ désigne l'ensemble des permutations alternantes montantes $\pi = \pi(1)\pi(2)\cdots\pi(2n)$ telles que $\mathrm{lsg(op)}(\pi) = 0$.

Or, $\mathrm{lsg(op)}(\pi) = 0$ implique que $\pi(1) > \pi(3) > \cdots > \pi(2n-1)$. Donc t est une bijection de INV$[n]$ sur $\mathcal{A}_{2n}$.

D'autre part,

$$\mathrm{rsg(clos)}(\pi) = \#\{(2i, 2j);\, 2i < 2j, \pi(2i) < \pi(2j)\} = \binom{n}{2} - \mathrm{inv}_p(\pi).$$

D'où la 1-ère égalité.

De même, on a

$$\mu_{2n}^{(2)}(H) = \sum_{\pi \in \mathcal{A}_{2n}} q^{\mathrm{rsg}(\pi)}.$$

Comme $\pi(2i-1) < \pi(2i)$ pout tout i, $\pi(2i-1) > \pi(2j-1)$ $(i < j)$ et

$$\mathrm{rsg}(\pi) = \#\{(2i-1, 2j);\ 2i < 2j, \pi(2i-1) < \pi(2j)\} + \#\{(2i, 2j);\ 2i < 2j, \pi(2i) < \pi(2j)\},$$

alors

$$\mathrm{rsg}(\pi) = \binom{2n}{2} - n - \mathrm{inv}(\pi).$$

D'où la 2-ème égalité. □

4.2. q-polynômes de Laguerre et de Charlier. Il est bien connu que les q-polynômes de Laguerre et les q-polynômes de Charlier sont définis respectivement par les paramètres

$$b_n = ([n+1;a]_q + [n]_q)q^n, \quad \lambda_n = [n;a]_q [n]_q q^{2n-1} \tag{13}$$

et

$$b_n = aq^n + [n]_q, \quad \lambda_n = a[n]_q q^{n-1}. \tag{14}$$

Dans son article [22], Zeng a montré que ces q-polynômes ont pour moments respectifs

$$\mu_n(L) = \sum_{1\le k\le n} s_q(n,k)a^k \qquad \text{et} \qquad \mu_n(C) = \sum_{1\le k\le n} S_q(n,k)a^k$$

où $s_q(n,k)$ et $S_q(n,k)$ sont les q-analogues des nombres de Stirling de 1-ère et 2-ème espèces [11, 22]. Rappelons que ces q-analogues sont définis respectivement par:

$$\begin{cases} s_q(n,k) = s_q(n-1,k-1) + q[n-1]_q s_q(n-1,k); \\ S_q(n,k) = S_q(n-1,k-1) + [k]_q S_q(n-1,k); \end{cases} \qquad (n>1)$$

avec les conditions initiales $s_q(1,k) = \delta_{1k}$ et $S_q(1,k) = \delta_{1k}$. Notons que les $s_q(n,k)$ ont été introduits et étudiés par Zeng [22]. On sait que $\mu_n(C)$ a été interprété en termes de partitions de $[n]$. Dans cette partie, nous nous proposons d'interpréter également $\mu_n(C)$ et $\mu_n(L)$ en termes de partitions selon les statistiques définies ci-après.

Notons Π_n l'ensemble des partitions $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de $[2n]$ en n blocs ordonnés selon l'ordre croissant de leurs plus petits éléments et telles que le plus grand élément de chaque bloc est pair, et $\overline{\Pi}_n$ l'ensemble des éléments $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de Π_n vérifiant $\max(B_i) < \min(B_j)$ ou $\max(B_i) > \max(B_j)$ pour tous i, j tels que $i < j$.

Une inversion d'une partition $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ est un couple (B_i, b_j) tel que $i < j$, $b_j \in B_j$ et $b_j < \max(B_i)$. Un record de π est un $\max(B_j)$ tel que $\max(B_i) < \max(B_j)$ pour tout $i < j$. On note respectivement $\mathrm{inv}(\pi)$ et $\mathrm{rec}(\pi)$ le nombre d'inversions et le nombre de records de π. On note $\overline{\mathrm{inv}}(\pi)$ le nombre d'inversions (B_i, b_j) de π telles que $b_j \ne \min(B_j)$, et $\mathrm{bl}(\pi)$ (resp. $\mathrm{bl}_{\ge 2}(\pi)$) le nombre de blocs de π (resp. de longueur ≥ 2).

THÉORÈME 8. *On a les interprétations suivantes:*

$$\sum_{1\le k\le n} s_q(n,k)a^k = \sum_{\pi\in\Pi_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} a^{\mathrm{rec}(\pi)};$$
$$\sum_{1\le k\le n} S_q(n,k)a^k = \sum_{\pi\in\overline{\Pi}_n} q^{\overline{\mathrm{inv}}(\pi)} a^{\mathrm{bl}_{\ge 2}(\pi)}.$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de la bijection entre les histoires de Genocchi et l'ensemble $\mathcal{G}_{2n}$ des permutations de Genocchi [15].

Rappelons qu'une *permutation de Genocchi* est une permutation σ vérifiant $\sigma(2i-1) > 2i-1$ et $\sigma(2i) \le 2i$ pour tout i, et une *histoire de Genocchi* de longueur $2n$ est un couple (γ, p) où $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_{2n}$ est un chemin de Dyck de longueur $2n$, et $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{2n})$ une suite de $2n$ entiers tels que

$0 \le p_i \le \left\lceil \frac{h_{i-1}(\gamma)}{2} \right\rceil$ si $\gamma_i = \nearrow$ et $0 \le p_i \le \left\lceil \frac{h_{i-1}(\gamma)}{2} \right\rceil - 1$ si $\gamma_i = \searrow$, $\lceil x \rceil$ désignant le plus petit entier $\ge x$.

Il existe une bijection ψ de $\mathcal{G}_{2n}$ sur l'ensemble des histoires de Genocchi de longueur $2n$ telle que, si $\psi(\sigma) = (\gamma, p)$,

$$\gamma_i = \searrow \iff \sigma^{-1}(i) < i.$$

D'après la construction de cette bijection, on a

$$\begin{cases} h_{2i-1}(\gamma) & = & 2\#\{j \le 2i-1;\ \sigma(j) > 2i-1\} - 1 \\ & = & 2\#\{j \le 2i-1;\ \sigma^{-1}(j) > 2i-1\} - 1; \\ h_{2i}(\gamma) & = & 2\#\{j \le 2i;\ \sigma(j) > 2i\} = 2\#\{j \le 2i;\ \sigma^{-1}(j) > 2i\}; \\ p_i & = & \begin{cases} \#\{j < i;\ \sigma^{-1}(j) > \sigma^{-1}(i)\} & \text{si } \gamma_i = / ; \\ \#\{j < \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) > i\} & \text{si } \gamma_i = \backslash . \end{cases} \end{cases}$$

En faisant une démonstration analogue à celle de la Proposition 4, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 9. *Soient $\sigma \in \mathcal{G}_{2n}$ et $(\gamma, p) = \psi(\sigma)$. On a:*

$$\begin{aligned} \mathrm{cr(ddc)}(\sigma) + \mathrm{cr(cc)}(\sigma) &= \sum_{\gamma_i = /} \left\lceil \frac{h_{i-1}(\gamma)}{2} \right\rceil - p_i; \\ \mathrm{cr(pc)}(\sigma) &= \sum_{\gamma_{2i} = \backslash} \frac{1}{2}(h_{2i-1}(\gamma) - 1) - p_{2i}; \\ \mathrm{pbr(dmc)}(\sigma) + \mathrm{pbr(pc)}(\sigma) &= \sum_{\gamma_i = \backslash} p_i; \\ \mathrm{pbr(ddc)}(\sigma) + \mathrm{pbr(cc)}(\sigma) &= \sum_{\gamma_i = /} p_i. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les polynômes orthogonaux dont les coefficients de la récurrence linéaire sont

$$b_n = 0, \quad \lambda_{2n-1} = a[n; b]_{r,u} v^{n-1}, \quad \lambda_{2n} = [n]_u v^n.$$

Il est clair que leur moment d'ordre $2n-1$ est nul.

PROPOSITION 10. *Le $2n$-ième moment $\mu_{2n}(a, b, r, u, v)$ de ces polynômes a pour interprétation*

$$\mu_{2n}(a, b, r, u, v) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} a^{\mathrm{bl}_{\ge 2}(\pi)} b^{\mathrm{rec}(\pi)} r^{\alpha(\pi)} u^{\overline{\mathrm{inv}}(\pi)} v^{\mathrm{inv}(\pi) - \overline{\mathrm{inv}}(\pi)} \tag{15}$$

où $\alpha(\pi)$ est le nombre de couples (i, j) tels que $i < j$ et $\min(B_j) < \max(B_i) < \max(B_j)$ *avec $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$.*

DÉMONSTRATION. Soit le polynôme générateur

$$\nu_n := \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{G}_{2n} \\ \mathrm{cr(ddc)}(\sigma) = \mathrm{cr(cc)}(\sigma) = 0}} a^{\mathrm{pc}(\sigma)} b^{\mathrm{ssg(pc)}(\sigma)} r^{\mathrm{cr(pc)}(\sigma)(\sigma)} u^{\mathrm{pbr(dmc)}(\sigma) + \mathrm{pbr(pc)}(\sigma)} v^{\mathrm{pbr(ddc)}(\sigma) + \mathrm{pbr(cc)}(\sigma)}.$$

La Proposition 9 implique que ce polynôme est égal à

$$\sum_{\gamma} \prod_{\gamma_{2i-1} = /} v^{\frac{(h_{2i-2}(\gamma)}{2}} \prod_{\gamma_{2i} = /} v^{\frac{(h_{2i-1}(\gamma)+1}{2}} \prod_{\gamma_{2i-1} = \backslash} \left[\frac{(h_{2i-2}(\gamma)}{2} \right]_u \prod_{\gamma_{2i} = \backslash} a[\tfrac{1}{2}(h_{2i-1}(\gamma) + 1); b]_{r,u},$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Dyck de longueur $2n$; soit

$$\nu_n = \sum_{\gamma} \prod_{\gamma_i = /} \alpha_{h_{i-1}(\gamma)} \prod_{\gamma_i = \backslash} \beta_{h_{i-1}(\gamma)}$$

où $\alpha_{2k-1} = \alpha_{2k} = v^k$, $\beta_{2k-1} = a[k; b]_{r,u}$ et $\beta_{2k} = [k]_u$. On déduit alors de la relation (10) que ν_n est le $2n$-ième moment des polynômes orthogonaux dont les coefficients sont

$$b_n = 0, \quad \lambda_{2n-1} = a[n; b]_{r,u} v^{n-1}, \quad \lambda_{2n} = [n]_u v^n,$$

i.e.,

$$\nu_n = \mu_{2n}(a, b, r, u, v).$$

La bijection Φ et ses propriétés nous permettent ainsi d'écrire que

$$\mu_{2n}(a, b, r, u, v) = \sum_{\tau\in\Delta_n} a^{\mathrm{clos}(\tau)} b^{\mathrm{Orsg(clos)}(\tau)} r^{\mathrm{lsg(clos)}(\tau)} u^{\mathrm{rsg(clos)}(\tau)+\mathrm{rsg(cont)}(\tau)} v^{\mathrm{rsg(op)}(\tau)+\mathrm{rsg(sing)}(\tau)}$$

où Δ_n est l'ensemble des permutations τ de $[2n]$ vérifiant

- $\mathrm{lsg(op)}(\tau) = \mathrm{lsg(sing)}(\tau) = 0$;
- Pour tout i, i est un pic ou une double descente de τ si et seulement si i est pair.

Notons que tout élément de Δ_n peut être décomposé en n séquences croissantes maximales $S_1, S_2, \ldots, S_n$ telles que $\max(S_i)$ est pair et $\min(S_i) > \min(S_{i+1})$ pour tout i. Par conséquent, l'application $\varphi : \tau = S_1S_2\cdots S_n \mapsto \pi = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ telle que B_i est formé des termes de la séquence S_{n-i+1} pour tout $i \in [n]$, est une bijection de Δ_n sur Π_n. On a, en outre, $\mathrm{clos}(\tau) = \mathrm{bl}_{\geq 2}(\pi)$, $\mathrm{Orsg(clos)}(\tau) = \mathrm{rec}(\pi)$, $\mathrm{lsg(clos)}(\tau) = \alpha(\pi)$,
$\mathrm{rsg(clos)}(\tau) + \mathrm{rsg(cont)}(\tau) = \overline{\mathrm{inv}}(\pi)$,
$\mathrm{rsg(cc)}(\tau) + \mathrm{rsg(sing)}(\tau) = \mathrm{inv}(\pi) - \overline{\mathrm{inv}}(\pi)$. □

On est donc en mesure de démontrer le Théorème 8.

D'après le lemme 3 [22], on a:

$$\sum_{1\leq k\leq n} s_q(n, k)a^k = \mu_{2n}(1, a, 1, q, q), \quad \sum_{1\leq k\leq n} S_q(n, k)a^k = \mu_{2n}(a, 1, 0, q, 1);$$

d'où le résultat. □

5. Deux Remarques pour Conclure

(1) Simion et Stanton ont montré dans leur article [18] (Théorème 2) que la statistique s, définie par

$$s(\pi) := n - \mathrm{run}(\pi) + 2\,\mathrm{lsg}(\pi) + \mathrm{rsg}(\pi)$$

pour toute permutation π de $[n]$, est mahonienne, i.e.,

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{s(\pi)} = [1]_q[2]_q\cdots[n]_q.$$

Dans leur article [5], Clarke *et al.* ont donné une preuve bijective de ce résultat en utilisant la bijection Φ. Notons que le corollaire 2.3, la Proposition 2.4 de [15] et la proposition 5 de ce présent article nous donne également ce résultat.

(2) Désignons par P_n l'ensemble des partitions de $[n]$ dont les blocs sont ordonnés selon l'ordre croissant de leurs plus petits éléments. La statistique 'inv' introduite dans la sous-section 4.2 et définie sur P_n a été déjà introduite par Wachs et White [20] et étudiée par de Médicis *et al.* [1]. Wachs et White ont montré que

$$\sum_{1\leq k\leq n} S_q(n, k)a^k = \sum_{\pi\in\mathrm{P}_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)}a^{\mathrm{bl}(\pi)}. \tag{16}$$

On peut déduire ce résultat du Théorème 2. En effet, en comparant la relation (14) avec la relation (2), on a:

$$\sum_{1\leq k\leq n} S_q(n, k)a^k = \sum_{\tau\in\nabla_n} q^{\mathrm{rsg}(\tau)}a^{\mathrm{sing}(\tau)+\mathrm{op}(\tau)}$$

où ∇_n est l'ensemble des permutations τ de $[n]$ vérifiant

$$\mathrm{lsg}(\mathrm{op})(\tau) = \mathrm{lsg}(\mathrm{sing})(\tau) = 0.$$

Comme, pour tout $\tau \in \nabla_n$, $\tau(i) > \tau(i+1)$ si $i \in [n-1]$ et i une double descente ou un creux de τ, alors l'application φ définie dans la dernière section est une bijection de ∇_n sur P_n. On a, de plus,

$$\mathrm{sing}(\tau) + \mathrm{op}(\tau) = \mathrm{bl}(\pi), \quad \mathrm{rsg}(\tau) = \mathrm{inv}(\pi).$$

La relation 16 en résulte. □

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au référé anonyme pour l'amélioration qu'il a apportée à cet article.

Références

1. A. de Médicis, D. Stanton et D. White, The Combinatorics of q-Charlier polynomials, *J. Comb. Theory, Series A* **69** (1995), 87–114.
2. A. de Médicis et X.G. Viennot, Moments des q-polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger, *Adv. Appl. Math.* **15** (1994), 262–304.
3. M. Cartier et D. Foata, *Problèmes Combinatoires de Communication et de Réarrangements (LNM* **85***)*, Springer, Berlin, 1969.
4. T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
5. R.J. Clarke, E. Steingrímsson et J. Zeng, New Euler–Mahonian statistics on permutations, Séminaire Lotharingien de Combinatoire (4–6 octobre 1995, Hesselberg, Germany), B35c, 36e session, 1996, disponible à http://www.cartan.u-strasbg.fr/˜slc/.
6. J. Désarménien, Les q-analogues des polynômes d'Hermite, 6-ème session du Séminaire Lotharingien, *Pub. IRMA* 1982, 39–56.
7. D. Dumont, note non publiée, 1993.
8. P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discr. Math.* **32** (1980), 125–161.
9. D. Foata et D. Zeilberger, Denert's Permutation Statistic is indeed Euler–Mahonian, *Stud. Appl. Math.* **83** (1990), 31–59.
10. J. Françon et X.G. Viennot, Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler, nombres de Genocchi, *Disc. Math.* **28** (1979), 21–35.
11. H. Gould, The q-Stirling numbers of the first and seconds kinds, *Duke Math. J.* **28** (1961), 281–289.
12. M. Ismail, D. Stanton et X.G. Viennot, The combinatorics of q-Hermite polynomials and the Askey–Wilson integral, *Eur. J. Comb.* **8** (1987), 379–392.
13. M. Lothaire, Combinatorics on words, in *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 17, Addison Wesley, Reading, MA, 1983.
14. J.G. Penaud, *Une preuve combinatoire d'une formule de Touchard-Riordan*, Comptes Rendus du 4-ème Colloque 'Séries formelles et Combinatoire algébrique', Publ. LACIM, no. 11, UQAM, Montréal, 1992, pp. 313–325.
15. A. Randrianarivony, q, p-analogues des nombres de Catalan, à paraître dans *Discrete Math.* (1997).
16. A. Randrianarivony, Correspondances entre les différents types de bijections entre le groupe symétrique et les chemins de Motzkin valués, Séminaire Lotharingien de Combinatoire (4–6 octobre 1995, Hesselberg, Germany), B35h, 36e session, 1996, disponible à http://www.cartan.u-strasbg.fr/˜slc/.

17. R. Simion et D. Stanton, Octabasic Laguerre polynomials and permutation statistics, *J. Computational Appl. Math.* **68** (1996), 297–329.
18. R. Simion et D. Stanton, Specializations of generalized Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **25** (1994), 712–719.
19. X.G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux, Notes de Conférences, UQAM, 1983.
20. M. Wachs et D. White, p, q-Stirling numbers and set partition statistics, *J. Combin. Theory, Series A* **56** (1991), 27–46.
21. J. Zeng, Records, antirecords et permutations discordantes, *Eur. J. Comb.* **10** (1989), 103–109.
22. J. Zeng, The q-Stirling numbers, continued fractions and the q-Charlier and q-Laguerre polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **28** (1995), 413–424.

Received 25 August 1997 and accepted 23 January 1998

A. RANDRIANARIVONY
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques et Informatique,
BP. 906 Antananarivo Madagascar
E-mail: `arthur@syfed.refer.mg`