ELSEVIER

Discrete Mathematics 153 (1996) 319–333

DISCRETE MATHEMATICS

Sur quelques propriétés de symétrie des nombres de Genocchi

Jiang Zeng*

Département de Mathematiques, Université Louis-Pasteur, 7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France

Received 31 August 1993; revised 21 July 1994

Abstract

In [2] Dumont stated several conjectures about some symmetric polynomial sequences which are the refinements of the Genocchi numbers. In this paper we shall prove all of his conjectures. We first show that some special cases of his main conjecture can be readily derived from a result of Wall and then give a complete proof of this conjecture by computing some Hankel determinants. Finally, we present a new symmetric model for the Dumont–Foata polynomials in terms of Motzkin paths.

1. Introduction

Un *escalier* F de taille $2n (n \geqslant 1)$ est le graphe $\{(k, f(k)) \mid 1 \leqslant k \leqslant 2n\}$ d'une application *surjective* f de $[2n] := \{1, 2, \ldots, 2n\}$ sur $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ telle que pour tout k, $f(k) \geqslant k$. Pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-2$, un point $(k, f(k))$ de F est dit *maximal* si $f(k) = 2n$, est dit *point fixe* si $f(k) = k$ (ce qui implique que k est pair), est dit *surfixe* si $f(k) = k+1$ (ce qui implique que k est impair). Soit E_{2n} l'ensemble des escaliers sur $[2n]$. Étant donné un escalier F, on note $\max(F)$ le nombre de ses points maximaux, $\mathrm{fix}(F)$ le nombre de ses points fixes, et $\mathrm{sur}(F)$ le nombre de ses points surfixes. Il est bien connu (voir [2, 3, 7, 9]) que le cardinal de E_{2n} est les nombres de Genocchi G_{2n+2}, qui peuvent être définis par leur fonction génératrice exponentielle:

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - 3\frac{t^6}{6!} + 17\frac{t^8}{8!} + \cdots + (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

En 1976, Dumont et Foata [3] ont introduit une suite de polynômes $F_n(x, y, z)$ qui sont définis par $F_1(x, y, z) = 1$ et

$$F_n(x, y, z) = (x + y)(x + z)F_{n-1}(x + 1, y, z) - x^2 F_{n-1}(x, y, z).$$

* E-mail: jzeng@math.u-strasbg.fr.

SSDI 0012-365X(95)00145-X

Ils ont montré que ces polynômes sont symétriques en les variables x, y, z et raffinent les nombres de Genocchi en ce sens que $F_n(1,1,1) = G_{2n+2}$. Bien qu'on connait aujourd'hui plusieurs interprétations combinatoires pour $F_n(x,y,z)$ (cf. [2, 3, 7, 9]), il semble que celle la plus simple, c'est-à-dire que la vérification de la récurrence est la plus facile, est le résultat de Han [7] suivant:

$$F_n(x,y,z) = \sum_{F \in E_{2n}} x^{\max(F)} y^{\mathrm{fix}(F)} z^{\mathrm{sur}(F)}. \tag{1.1}$$

De plus, l'interprétation (1.1) a permis Dumont [2] de proposer récemment une extension combinatoire des polynômes $F_n(x,y,z)$ de la façon suivante.

Soit F un escalier de taille $2n$, un point $(k, f(k))$ de F est dit *doublé* s'il n'est pas seul sur sa ligne, c'est-à-dire s'il existe $j \neq k$ tel que $f(j) = f(k)$. On note fd F (resp. fnd F) le nombre de ses points *fixes doublés* (resp. *fixes non-doublés*) et sd F (resp. snd F) le nombre de ses points *surfixes doublés* (resp. *surfixes non doublés*). On note également mp F (*resp.* mi F) le nombre de ses points maximaux d'abcisses *paires* (*resp. impaires*).

L'extension proposée par Dumont [2] est définie par

$$\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{F \in E_{2n}} x^{\mathrm{mi}\,F} y^{\mathrm{fd}\,F} z^{\mathrm{snd}\,F} \bar{x}^{\mathrm{mp}\,F} \bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F} \bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}. \tag{1.2}$$

Dumont [2] a conjecturé plusieurs formules remarquables sur les polynômes Γ_n. Le but principle de cet article est de démontrer toutes ces conjectures. En effet, le problème central dans toutes ces études est d'établir le résultat suivant.

Théorème 1 (Dumont [2, Conjecture 2]). *On a l'identité*

$$\sum_{n \geqslant 1} \Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) t^n = \cfrac{t}{1 - (x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x})t - \cfrac{(\bar{x}+y)(\bar{y}+z)(\bar{z}+)t^2}{\ddots}}$$

où le coefficient situé sous le $(n+1)$-ième trait de fraction est

$$1 - [(x+n)(\bar{y}+n) + (y+n)(\bar{z}+n) + (z+n)(\bar{x}+n) - n(n+1)]t$$
$$- \cfrac{(n+1)(\bar{x}+y+n)(\bar{y}+z+n)(\bar{z}+x+n)t^2}{\ddots}.$$

Comparant (1.1) et (1.2), on voit que $F_n(x,y,z) = \Gamma_n(x,y,z,x,y,z)$, $n \geqslant 1$, et déduit immédiatement du Théorème 1 le résultat suivant.

Corollaire 2 (Dumont [2, Conjecture 1]). *On a l'identité*

$$\sum_{n \geqslant 1} F_n(x,y,z) t^n = \cfrac{t}{1 - (xy + yz + zx)t - \cfrac{(x+y)(y+z)(z+x)t^2}{\ddots}}$$

dont le coefficient situé sous le $(n+1)$-ième trait de fraction est

$$1-[(x+n)(y+n)+(y+n)(z+n)+(z+n)(x+n)-n(n+1)]t$$
$$-\frac{(n+1)(x+y+n)(y+z+n)(z+x+n)t^2}{\ddots}.$$

Par ailleurs, d'après la formule de Rogers–Stieltjes (cf. [Go-Ja, p. 306]), on dédéuit du Corollaire 2 une formule explicite et polynômiale pour $F_n(x,y,z)$, qui est différente de celle de Carlitz [1] et qui met en évidence la symétrie de $F_n(x,y,z)$.

Corollaire 3. *Les polynômes de Dumont-Foata ont pour l'expression symétrique suivante:*

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x,y,z) = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{m_0,\dots,m_k\geqslant 0\\ n_1,\dots,n_k\geqslant 1}} \prod_{i=1}^{k} &\times [i(x+y+i-1)(y+z+i-1)(z+x+i-1)]^{n_i}\\ &\times\prod_{j=0}^{k}[(x+j)(y+j)+(y+j)(z+j)+(z+j)(x+j)-j(j+1)]^{m_j}\\ &\times\prod_{j=0}^{k}\frac{(m_j+n_{j+1}+n_j-1)!}{m_j!n_{j+1}!(n_j-1)!}\end{aligned}$$

où la seconde somme est assujettie à la condition $2(n_1+\cdots+n_k)+(m_0+\cdots+m_k)=n$ avec $n_0=1$ et $n_{k+1}=0$.

On remarque que Viennot [9] a déjà donné une démonstration bijective du Théorème 1 dans le cas particulier où $x=y=z=\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=1$. Notre preuve du Théorème 1 repose sur le fait que le développement en fraction continue de la fonction génératrice ordinaire d'une suite équivaut au calcul de deux déterminants de Hankel construits sur cette suite (cf. Section 4). Enfin, lors de la rédaction de cet article, l'auteur a appris que Randrianarivony [8] a aussi démontré toutes les conjectures de Dumont en établissant le *tableau de Stieltjes* associé à la fraction continue en question.

Cet article est organisé de la façon suivante. En Section 2, on détermine la relation de récurrence de $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ et en déduit la fonction génératrice ordinaire des Γ_n. En Section 3, on montre comment un résultat de Wall [10] permet d'établir immédiatement le Théorème 1 dans les cas particuliers où $z=\bar{z}=0$ ou $z=\bar{z}=1$. On présente ensuite une preuve complète du Théorème 1 en Section 4 dans le cas général par le calcul de deux déterminants de Hankel. Enfin, en Section 5 on déduit un nouveau modèle combinatoire pour les polynômes $F_n(x,y,z)$ qui rend leurs propriétés de symétries *évidentes*.

2. La relation de récurrence de $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

Pour tout ensemble fini $X \subset \mathbb{N}$, on note respectivement $I(X)$ et $P(X)$ le nombre des entiers impairs et pairs de X.

Théoréme 4. *On a* $\Gamma_1(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 1$ *et*

$$\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (x+\bar{z})(y+\bar{x})\Gamma_{n-1}(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z}) + [x(\bar{y}-y) - \bar{x}(\bar{z}-z) - x\bar{x}]\Gamma_{n-1}(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}). \tag{2.1}$$

Démonstration. Il est évident que $\Gamma_1(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 1$. On appelle *escalier coloré* de taille $2n$ tout couple (F,X) où $F = \{(k,f(k)) \mid 1 \leqslant k \leqslant 2n\}$ est un escalier de taille $2n$ et X un *sous-ensemble strict* de $f^{-1}(2n) = \{i \in [2n] \mid f(i) = 2n\}$. On note qu'il exist une bijection naturelle φ entre les escaliers colorés sur $[2n]$ et les escaliers sur $[2n+2]$, qui à tout escalier coloré (F,X) taille $2n$ associe un escalier $F' = \{(k,f'(k)) \mid k \in [2n+2]\} = \varphi(F,X)$ de taille $[2n+2]$ de la façon suivante:

$$f'(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \notin X \cup \{2n+1, 2n+2\}, \\ 2n+2 & \text{si } i \in X \cup \{2n+1, 2n+2\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

On remarque que le fait que X est un sous-ensemble strict assure la surjectivité de f'. On se propose de calculer le polynôme générateur des escaliers de taille $2n+2$ à l'aide de celui des escaliers colorés de taille $2n$. Rappelons que le poids de chaque escalier $F' = \varphi(F,X)$ est défini par

$$w(F') = x^{\mathrm{mi}\, F'} y^{\mathrm{fd}\, F'} z^{\mathrm{snd}\, F'} \bar{x}^{\mathrm{mp}\, F'} \bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F'} \bar{z}^{\mathrm{sd}\, F'}.$$

On distingue les 4 cas suivants de $X \subseteq f^{-1}(2n)$.

(i) Cas où $2n-1$, $2n \in X$. D'après (2.2) on voit que

$$w(F') = x^{I(X)} \bar{x}^{P(X)} z^{\mathrm{snd}\, F} y^{\mathrm{fd}\, F} \bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F} \bar{z}^{\mathrm{sd}\, F}.$$

Comme

$$\sum_{X \subsetneq f^{-1}(2n)} x^{I(X)-1} \bar{x}^{P(X)-1} = (x+1)^{\mathrm{mi}\, F} (\bar{x}+1)^{\mathrm{mp}\, F} - x^{\mathrm{mi}\, F} \bar{x}^{\mathrm{mp}\, F},$$

le polynôme générateur correspondant est donc

$$x\bar{x}\Gamma_n(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z}) - x\bar{x}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}). \tag{2.3}$$

(ii) Cas où $2n-1 \in X$ et $2n \notin X$. (a) Si $X = f^{-1}(2n) \backslash \{2n\}$, alors $2n$ est un point fix non doublé de F'. D'où le poids associé:

$$w(F') = x^{I(f^{-1}(2n))} \bar{x}^{P(f^{-1}(2n))-1} z^{\mathrm{snd}\, F} y^{\mathrm{fd}\, F} \bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F+1} \bar{z}^{\mathrm{sd}\, F}.$$

Par suite, le polynôme générateur de tous ces escaliers est $x\bar{y}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

(b) Si $X \subsetneq f^{-1}(2n)\backslash\{2n\}$, alors $2n$ est un point fixe doublé de F'. D'où le poids associé:

$$w(F') = x^{I(X)}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\, F}y^{\mathrm{fd}\, F+1}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F+1}\bar{z}^{\mathrm{sd}\, F}.$$

Par suite, le polynôme générateur correspondant est

$$\begin{aligned} &xy \sum_{F \in E_{2n}} \sum_{X \subsetneq f^{-1}(2n)\backslash\{2n\}} x^{I(X)-1}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\, F}y^{\mathrm{fd}\, F}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\, F}\\ &\quad = xy \sum_{F \in E_{2n}} ((x+1)^{\mathrm{mi}\, F}(\bar{x}+1)^{\mathrm{mp}\, F} - x^{\mathrm{mi}\, F}\bar{x}^{\mathrm{mp}\, F})z^{\mathrm{snd}\, F}y^{\mathrm{fd}\, F}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\, F}\\ &\quad = xy\Gamma_n(x+1, y, z, \bar{x}+1, \bar{y}, \bar{z}) - xy\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Compte tenu de (a) et (b), on obtient le polynôme générateur correspondant au cas (ii):

$$xy\Gamma_n(x+1, y, z, \bar{x}+1, \bar{y}, \bar{z}) + x(\bar{y}-y)\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \tag{2.4}$$

(iii) Cas où $2n-1 \notin X$ et $2n \in X$. Un argument analogue à celui du cas précédent montre que le polynôme générateur correspondant est

$$x\bar{z}\Gamma_n(x+1, y, z, \bar{x}+1, \bar{y}, \bar{z}) + \bar{x}(z-\bar{z})\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \tag{2.5}$$

(iv) Cas où $2n-1, 2n \notin X$. On voit que $2n-1$ (resp. $2n$) est un point surfixe (resp. fixe) doublé de F'. Par suite, le poids associé est

$$w(F') = x^{I(X)}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\, F}y^{\mathrm{fd}\, F+1}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\, F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\, F+1}.$$

Comme

$$\sum_{X \subsetneq f^{-1}(2n)\backslash\{2n-1, 2n\}} x^{I(X)}\bar{x}^{P(X)} = (x+1)^{\mathrm{mi}\, F}(\bar{x}+1)^{\mathrm{mp}\, F},$$

le polynôme générateur correspondant est donc

$$y\bar{z}\Gamma_n(x+1, y, z, \bar{x}+1, \bar{y}, \bar{z}). \tag{2.6}$$

En récapitulant les 4 cas ci-dessus, on voit que $\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, étant la somme des quatre polynômes (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6), satisfait la récurrence (2.1). □

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $(x)_n = (x+1)\cdots(x+n-1)$ et $(x)_0 = 1$. Le résultat suivant confirme et généralise la Conjecture 3 de [2].

Théoréme 5. *On a*

$$\begin{aligned} &\sum_{n>1} \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})t^n\\ &\quad = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(x+\bar{z})_{n-1}(y+\bar{x})_{n-1}t^n}{\prod_{k=0}^{n-1}\{1 - [(x+k)(\bar{y}-y) - (\bar{x}+k)(\bar{z}-z) - (x+k)(\bar{x}_k+k)]t\}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\Gamma(x,\bar{x};\ t)=\sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})t^n$. La récurrence (2.1) entraîne immédiatement que

$$\Gamma(x,\bar{x};\ t)=t+(x+\bar{z})(y+\bar{x})t\Gamma(x+1,\bar{x}+1;\ t)$$
$$+[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]t\Gamma(x,\bar{x};\ t).$$

D'où il vient

$$\Gamma(x,\bar{x};\ t)=\frac{t}{1-[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]t}$$
$$+\frac{(x+\bar{z})(y+\bar{x})t}{1-[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]t}\Gamma(x+1,\bar{x}+1;\ t).$$

Ceci achève la démonstration par itération. □

Proposition 6. *Pour $n\geq 1$, le polynôme $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est de degré total $2n-2$ en les variables x, y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$, de degré $n-1$ en les variables x et $\bar{x}$ (resp. y et $\bar{y}$, z et $\bar{z}$) et en la seule variable x (resp. y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$). D'autre part, pour toute permutation circulaire (u,v,w) de (x,y,z), on a les propriérés symétrique suivantes:*

$$\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\Gamma_n(u,v,w,\bar{u},\bar{v},\bar{w})=\Gamma_n(\bar{u},\bar{w},\bar{v},u,w,v).$$

Démonstration. La vérification est facile d'après la récurrence (2.1) et laissée au lecteur. □

3. Un lemme de Wall et ses applications

Nous montrons dans cette partie comment un résultat de Wall permet de démontrer facilement certains cas particuliers du Théorème 1.

Lemme 1 (Wall [10, p. 281]). *On a*

$$\cfrac{1+t}{1-\cfrac{(g_1-1)t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_1t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}}=1+\cfrac{g_1t}{1-\cfrac{(g_1-1)g_2t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_3t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_4t}{\ddots}}}}$$

Proposition 7. *Le Théoréme 1 est vrai pour $z=\bar{z}=0$ et $z=\bar{z}=1$.*

Démonstration. Soit $\Gamma(x,y,\bar{x},\bar{y};\ t)=\sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,0,\bar{x},\bar{y},0))t^n$. De (2.1) on déduit aisément l'identité:

$$[1+x(y+\bar{x}-\bar{y})t]\Gamma(x,y,\bar{x},\bar{y};\ t)=t+x(y+\bar{x})t\Gamma(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y};\ t). \quad (3.1)$$

On cherche une suite $\{g_n := g_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})\}$ telle que

$$\Gamma(x, y, \bar{x}, \bar{y}; t) = \cfrac{t}{1 - \cfrac{x(y + \bar{x} - \bar{y})(g_1 - 1)t}{1 - \cfrac{x(y + \bar{x} - \bar{y})(g_2 - 1)g_1 t}{1 - \cfrac{x(y + \bar{x} - \bar{y})(g_3 - 1)g_2 t}{\ddots}}}}. \tag{3.2}$$

En reportant l'expression ci-dessus dans (3.1) et en substituant $x(y + \bar{x} - \bar{y})t$ par t, on obtient:

$$\cfrac{1 + t}{1 - \cfrac{(g_1 - 1)t}{1 - \cfrac{(g_2 - 1)g_1 t}{1 - \cfrac{(g_3 - 1)g_2 t}{\ddots}}}} = 1 + \cfrac{\frac{y + \bar{x}}{y + \bar{x} - \bar{y}}\, t}{1 - \cfrac{\frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}(g'_1 - 1)t}{1 - \cfrac{\frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}(g'_2 - 1)g'_1 t}{1 - \cfrac{\frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}(g'_3 - 1)g'_2 t}{\ddots}}}},$$

où $g'_n := g_n(x + 1, y, \bar{x} + 1, \bar{y})$. En comparant le membre de droite ci-dessus avec celui du Lemme 1, on obtient successivement

$$g_1 = \frac{y + \bar{x}}{y + \bar{x} - \bar{y}},$$

$$g_2 = \frac{(x + 1)(y + \bar{x} + 1 - \bar{y})}{x(y + \bar{x} - \bar{y})} \frac{g'_1 - 1}{g_1 - 1} = 1 + \frac{1}{x},$$

$$g_3 = \frac{(x + 1)(y + \bar{x} + 1 - \bar{y})}{x(y + \bar{x} - \bar{y})} \frac{g'_2 - 1}{g_2 - 1} g'_1 = \frac{y + \bar{x} + 1}{y + \bar{x} - \bar{y}},$$

$$g_4 = \frac{(x + 1)(y + \bar{x} + 1 - \bar{y})}{x(y + \bar{x} - \bar{y})} \frac{g'_3 - 1}{g_3 - 1} g'_2 = 1 + \frac{2}{x}.$$

On trouve facilement par récurrence l'expression générale:

$$g_{2n-1} = \frac{y + \bar{x} + n - 1}{y + \bar{x} - \bar{y}}, \qquad g_{2n} = 1 + \frac{n}{x}, \quad n \geqslant 1.$$

En reportant ces valeurs dans (3.2), on obtient

$$\Gamma(x, y, \bar{x}, \bar{y}; t) = \cfrac{t}{1 - \cfrac{x\bar{y}t}{1 - \cfrac{(y + \bar{x})t}{1 - \cfrac{(x + 1)(\bar{y} + 1)t}{1 - \cfrac{2(y + \bar{x} + 1)t}{\cfrac{\ddots}{1 - \cfrac{\ddots}{1 - \cfrac{(x + n - 1)(\bar{y} + n - 1)t}{1 - \cfrac{n(y + \bar{x} + n - 1)t}{\ddots}}}}}}}}}. \tag{3.3}$$

Ceci établit le Théoréme 1 pour $z = \bar{z} = 0$ en contractant la fraction continue de (3.3) à partit du $2^{\text{ème}}$ trait. D'autre part, comme

$$\Gamma_n(x, y, 0, \bar{x}, \bar{y}, 0) = x\bar{y}\Gamma_{n-1}(x, y, 1, \bar{x}, \bar{y}, 1), \quad n \geqslant 2,$$

on retrouve le Théorème 1 pour $z = \bar{z} = 1$ en contractant la fraction continue de (3.3) à partir du 1^{er} trait. □

Un autre cas particulier intéressant est la suite des polynômes $B_n(x, y) = \Gamma_n(x, y, 1, 1, 1, 1)$ définis par la récurrence:

$$B_n(x, y) = (x + 1)(y + 1)B_{n-1}(x + 1, y + 1) - xyB_{n-1}(x, y) \tag{3.4}$$

avec $B_1(x, y) = 1$. On déduit alors de la Proposition 7 un résultat déjà établi dans Dumont et Randrianarivony [4] par d'autre moyen.

Corollaire 8. *On a l'identité*

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{yt}{1 - \cfrac{(x+1)t}{1 - \cfrac{2(y+1)t}{1 - \cfrac{2(x+2)t}{1 - \cfrac{3(y+2)t}{\ddots}}}}}} = 1 + y \sum_{n \geqslant 1} B_n(x, y)t^n.$$

Les polynômes $B_n(x, y)$ peuvent en effet être considérés comme une extension commune des nombres de Genocchi G_{2n} et Genocchi médians H_{2n+1} (cf. [4]) en ce sens que

$$B_n(0, 1) = H_{2n+1} \quad \text{et} \quad B_n(1, 1) = G_{2n+2}. \tag{3.5}$$

Par ailleurs, les formules (3.5) peuvent aussi se déduire du Corollaire 8 et des développements en fractions continues des fonctions génératrices des nombres de Genocchi et Genocchi médians (cf. [9, 5]).

4. Déterminants de Hankel et fractions continues

Rappelons qu'un déterminant de Hankel construit sur une suite $\{\mu_n\}_{n \geqslant 0}$ avec $\mu_0 = 1$ est tout simplement un mineur de la matrice infinie $H = (\mu_{i+j})_{0 \leqslant i, j}$. Un tel déterminant sera noté

$$H\begin{pmatrix} \beta_1, & \ldots, & \beta_k \\ \alpha_1, & \ldots, & \alpha_k \end{pmatrix},$$

où on désigne par $0 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ et $0 \leqslant \beta_1 < \cdots < \beta_k$ les indices respectifs des lignes et colonnes du mineur extrait. En particulier, on pose

$$\Lambda_n = H\begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots, & n \\ 0, & 1, & \ldots, & n \end{pmatrix}, \qquad \Xi_n = H\begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots, & n-1, & n \\ 0, & 1, & \ldots, & n-1, & n+1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\Lambda_0 = \mu_0 = 1$ et $\Xi_0 = \mu_1$. D'autre part, on convient que $\Lambda_{-1} = 1$ et $\Xi_{-1} = 0$. Le résultat suivant est classique, voir par exemple [10, p. 206].

Lemme 2. *Si $\Lambda_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 0$, alors la série génératrice ordinaire $\sum_{n \geqslant 0} \mu_n t^n$ admet le développement en J-fraction continue suivant:*

$$\sum_{n \geqslant 0} \mu_n t^n = \cfrac{1}{1 - b_0 t - \cfrac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t - \cfrac{\lambda_2 t^2}{\ddots \atop 1 - b_n t - \cfrac{\lambda_{n+1} t^2}{\ddots}}}},$$

où les coefficients b_n et λ_{n+1} sont donnés par

$$\lambda_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n^2} \quad \textit{et} \quad b_n = \frac{\Xi_n}{\Lambda_n} - \frac{\Xi_{n-1}}{\Lambda_{n-1}}, \qquad n \geqslant 0,$$

Par conséquent, pour démontrer le Théorème 1, il suffit d'évaluer les deux déterminants Λ_n et Ξ_n avec $\mu_n = \Gamma_{n+1}(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $n \geqslant 0$. Par commodité, on pose

$$\Gamma_n^{(k)} := \Gamma_n(x + k, y, z, \bar{x} + k, \bar{y}, \bar{z}), \quad k \geqslant 0,$$

et $\Gamma_n := \Gamma_n^{(0)}$. On définit l'*opérateur de différence Δ* dans l'anneau des polynômes $P(x, \bar{x})$ en $x, \bar{x}$ par $\Delta P(x, \bar{x}) = P(x + 1, \bar{x} + 1) - P(x, \bar{x})$. Ainsi la récurrence (2.1) peut s'écrire

$$\Gamma_{n+1}(x, \bar{x}) = (x\bar{x} + xy + \bar{x}\bar{z} + y\bar{z})\Delta\Gamma_n(x, \bar{x}) + (x\bar{y} + \bar{x}z + y\bar{z})\Gamma_n(x, \bar{x}). \tag{4.1}$$

Plus généralement, on définit $\Delta^0 P(x, \bar{x}) = P(x, \bar{x})$ et

$$\Delta^m P(x, \bar{x}) = \Delta\{\Delta^{m-1} P(x, \bar{x})\}, \quad m \geqslant 1.$$

Il est clair que si $P(x, \bar{x})$ est un polynôme de degré n en les variables x et $\bar{x}$, alors $\Delta^m P(x, \bar{x}) = 0$ pour $m > n$. On a également une formule analogue de celle de Leibniz pour la dérivée.

Lemme 3. *Soit $u(x, \bar{x})$ et $v(x, \bar{x})$ deux polynômes en x, $\bar{x}$. Alors*

$$\Delta^n(u(x, \bar{x})v(x, \bar{x})) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k}(u(x + k, \bar{x} + k))\Delta^k(v(x, \bar{x})), \quad n \geqslant 0.$$

Démonstration. La vérification par récurrence est laissée au lecteur. □

Lemme 4. *On a pour tout $n \geqslant 0$ l'identité:*

$$\Delta^n \Gamma_{n+1}(x, \bar{x}) = n!(\bar{y} + z)_n. \tag{4.2}$$

Démonstration. L'identité (4.2) est évidemment vraie pour $n = 0$. Supposons Eq. (4.2) vraie pour $n = m - 1$. Appliquons Δ^m à (4.1), il vient

$$\Delta^m \Gamma_{m+1}(x, \bar{x}) = \Delta^m[(x\bar{x} + xy + \bar{x}\bar{z} + y\bar{z})\Delta \Gamma_m(x, \bar{x})] + \Delta^m[(x\bar{y} + \bar{x}z + y\bar{z})\Gamma_m(x, \bar{x})].$$

D'après le Lemme 3 et compte tenu de l'hypothèse de récurrence, qui implique en particulier que $\Delta^l \Gamma_m(x, \bar{x}) = 0$ pour tout $l \geqslant m$, on trouve après simplification l'équation (4.2) pour $n = m$. $\square$

Lemme 5. *On a pour tout $n \geqslant 0$ l'identité:*

$$\Delta^n \Gamma_{n+2}(x, \bar{x}) = (n+1)!(\bar{y} + z)_n \times \left[x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x} + \frac{n}{2}(x + \bar{x} + y + \bar{y} + z + \bar{z}) + \frac{n(4n-1)}{6} \right]. \tag{4.3}$$

Démonstration. Comme $\Gamma_2(x, \bar{x}) = x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x}$, Eq. (4.3) est donc vraie pour $n = 0$. Supposons (4.3) vraie pour $n = m - 1$. De même, d'après (4.1) on obtient, grace aux Lemmes 3 et 4, l'identité

$$\Delta^m \Gamma_{m+2}(x, \bar{x}) = m(\bar{y} + z + m - 1)\Delta^{m-1}\Gamma_{m+1}(x, \bar{x}) + [x\bar{y} + z\bar{x} + y\bar{z} + m(x + \bar{x} + y + \bar{y} + z + \bar{z} + 2m - 1)] \times \Delta^m \Gamma_{m+1}(x, \bar{x}),$$

ce qui établit, par l'hypothèse de récurrence et le Lemme 4, l'identité (4.3) pour $n = m$. $\square$

Lemme 6. *On a*

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_n & \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \cdots & \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n-1} & \Gamma_{2n} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} & \cdots & \Gamma_{2n} & \Gamma_{2n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [(k+1)(x + \bar{z} + k)(\bar{y} + z + k)(y + \bar{x} + k)]^{n-k}.$$

Démonstration. A chaque colonne du déterminant Δ_n, on ajoute successivement de droite à gauche celle de sa gauche multipliée par $x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}$. Comme $\Gamma_n+[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]\Gamma_{n-1}=(x+\bar{z})(y+\bar{x})\Gamma_{n-1}^{(1)}$, cette opération implique immédiatement que

$$\Delta_n=[(x+\bar{z})(y+\bar{x})]^n\begin{vmatrix}\Gamma_1 & \Gamma_1^{(1)} & \cdots & \Gamma_{n-1}^{(1)} & \Gamma_n^{(1)}\\ \Gamma_2 & \Gamma_2^{(1)} & \cdots & \Gamma_n^{(1)} & \Gamma_{n+1}^{(1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \Gamma_n & \Gamma_n^{(1)} & \cdots & \Gamma_{2n-2}^{(1)} & \Gamma_{2n-1}^{(1)}\\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+1}^{(1)} & \cdots & \Gamma_{2n-1}^{(1)} & \Gamma_{2n}^{(1)}\end{vmatrix}.$$

En procédant de la même manière, on obtient finalement

$$\Delta_n=\prod_{k=0}^{n-1}[(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k}$$

$$\times\begin{vmatrix}\Gamma_1 & \Gamma_1^{(1)} & \cdots & \Gamma_1^{(n-1)} & \Gamma_1^{(n)}\\ \Gamma_2 & \Gamma_2^{(1)} & \cdots & \Gamma_2^{(n-1)} & \Gamma_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \Gamma_n & \Gamma_n^{(1)} & \cdots & \Gamma_n^{(n-1)} & \Gamma_n^{(n)}\\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+1}^{(1)} & \cdots & \Gamma_{n+1}^{(n-1)} & \Gamma_{n+1}^{(n)}\end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Par ailleurs, on vérifie sans peine que

$$\Delta^m\Gamma(x,\bar{x})=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\Gamma(x+m-i,\bar{x}+m-i).$$

Donc, par des opérations élémentaires sur les colonnes du déterminant de (4.4), on peut transformer chaque $\Gamma_n^{(k)}$ en $\Delta^k\Gamma_n$. Or, d'après la Proposition 6, le polynôme Γ_n est de degré $n-1$ en les variables x et $\bar{x}$, donc $\Delta^k\Gamma_n=0$ si $k\geqslant n$. Par suite,

$$\Delta_n=\prod_{k=0}^{n-1}[(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k}$$

$$\times\begin{vmatrix}\Gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \Gamma_2 & \Delta\Gamma_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \Gamma_{n+1} & \Delta\Gamma_{n+1} & \cdots & \Delta^{n-1}\Gamma_n & 0\\ \Gamma_{n+1} & \Delta\Gamma_{n+1} & \cdots & \Delta^{n-1}\Gamma_{n+1} & \Delta^n\Gamma_{n+1}\end{vmatrix}.$$

Ce qui achève la démonstration en vertu du Lemme 4. $\square$

Lemme 7. *Soit*

$$\Xi_n = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_n & \Gamma_{n+2} \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \cdots & \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n-1} & \Gamma_{2n+1} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} & \cdots & \Gamma_{2n} & \Gamma_{2n+2} \end{vmatrix}.$$

Alors

$$\frac{\Xi_n}{\Lambda_n} = (n+1)\left[x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x} + \frac{n}{2}(x + \bar{x} + y + \bar{y} + z + \bar{z}) + \frac{n(4n-1)}{6}\right].$$

Démonstration. Par un raisonnement analogue à celui du Lemme 6, mais en manipulant les lignes au lieu de colonnes de déterminants, on obtient

$$\Xi_n = \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_n & \Gamma_{n+2} \\ \Gamma_1^{(1)} & \Gamma_2^{(1)} & \cdots & \Gamma_n^{(1)} & \Gamma_{n+2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_1^{(n-1)} & \Gamma_n^{(n-1)} & \cdots & \Gamma_n^{(n-1)} & \Gamma_{n+2}^{(n-1)} \\ \Gamma_1^{(n)} & \Gamma_n^{(n)} & \cdots & \Gamma_n^{(n)} & \Gamma_{n+2}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_n & \Gamma_{n+2} \\ 0 & \Delta\Gamma_2 & \cdots & \Delta\Gamma_n & \Delta\Gamma_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta^{n-1}\Gamma_n & \Delta^n\Gamma_{n+2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta^n\Gamma_{n+2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \Delta^n\Gamma_{n+2} \prod_{k=0}^{n-1} \Delta^k\Gamma_{k+1}.$$

Ceci achève la démonstration en vertu des Lemmes 5 et 6. □

Le Théorème 1 en résulte finalement en tenant compte des Lemmes 2, 6 et 7.

5. Un modèle symétrique ternaire pour $F_n(x,y,z)$

Plusieurs auteurs (cf. [3, 9, 7]) ont proposé de trouver un modèle combinatoire pour les polynômes $F_n(x,y,z)$ de sorte que la symétrie ternaire soit évidente. L'expression symétrique polynomiale de $F_n(x,y,z)$ du Corollaire 3 nous ouvre en effet une nouvelle voie pour une telle interprétation en termes de chemins de Motzkin valués (cf. [6, 9]).

Definition 5.1. Un chemin de Motzkin en n pas est une application ω de $\{0,1,\dots,n\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$ telle que $\omega(0)=\omega(n)=0$ et $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, on $a|\omega(i)-\omega(i-1)|\leqslant 1$, autrement dit les pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ sont, soit des montées de $+1$, soit des paliers, soit des descentes de -1. On appelle $\omega(i)$ le niveau du i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ de ω.

Soient a_k, b_k, c_{k+1} $(k\geqslant 0)$ des variables commutatives. Pour tout chemin de Motzkin ω, on définit la valuation d'un palier situé au niveau k par b_k, d'une descente du niveau $k+1$ vers le niveau k par c_{k+1} vers le niveau k par c_{k+1} et d'une montée du niveau k vers le niveau $k+1$ par a_k. On définit la valuation $w(\omega)$ de ω par le produit des valuations de tous ses pas.

En particulier, si l'on pose pour tout $k\geqslant 0$,

$$a_k=k+1,$$

$$b_k=(x+2k)y+(y+2k)z+(z+2k)x+k(2k-1),$$

$$c_{k+1}=(x+y+k)(y+z+k)(z+x+k),$$

alors d'après Flajolet [6], le Corollaire 2 donne immédiatement l'équation suivante:

$$F_{n+1}(x,y,z)=\sum_{\omega\in\Gamma(n)} w(\omega),\quad n\geqslant 1, \tag{5.1}$$

où $\Gamma(n)$ désigne l'ensemble des chemins de Motzkin en n pas.

Définition 5.2. Un chemin de Motzkin coloré en n pas est la donnée d'un chemin de Motzkin ω en n pas et d'un coloriage en quatre couleurs x, y, z, 1 des paliers de ω. Un palier de couleur x (resp. y, z, 1) s'appelle ainsi x-palier (resp. y-palier, z-palier, 1-palier).

Définition 5.3. Un complexe de Genocchi sur $[n]$ est un quadruple (ω,f,g,h) où γ est un chemin de Motzkin coloré de n pas et où f, g, h sont des applications de $[n]$ dans $\mathbb{Z}$ telles que pour tout i, $1\leqslant i\leqslant n$, soit $k=\omega(i-1)$ le niveau du i^e pas, si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une montée alors

$$0\leqslant f(i)=g(i)=h(i)\leqslant k;$$

si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une descente alors

$$0\leqslant f(i)\leqslant k,\quad 0\leqslant g(i)\leqslant k,\quad 0\leqslant h(i)\leqslant k;$$

si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un x-palier (resp. y-palier, z-palier), alors

$$-\omega(i-1)\leqslant f(i)=g(i)=h(i)\leqslant \omega(i-1);$$

si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un 1-palier, alors

$$1\leqslant f(i)=g(i)=h(i)\leqslant k(2k-1).$$

Soit $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des complexes de Genocchi sur $[n]$. De (14), on déduit immédiatement que le cardinal de $\mathscr{C}_n$ est $F_{n+1}(1,1,1) = G_{2n+4}$ pour $n \geqslant 1$. Afin de trouver une interprétation combinatoire pour voir la symétrie de $F_{n+1}(x,y,z)$, on va introduire quelques statistiques appropriées sur les complexes de Genocchi.

Soit $\pi = (\omega, f, g, h) \in \mathscr{C}_n$. On désigne par fmin π (resp. gmin π, hmin π) le nombre des entiers i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que $f(i) = 0$ (resp. $g(i) = 0$, $h(i) = 0$) et le pas $(\omega(i-1), \omega(i))$ est une descente. On désigne par fmax π (resp. gmax π, hmax π) le nombre des entiers i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que $f(i) = \omega(i-1)$ (resp. $g(i) = \omega(i-1)$, $h(i) = \omega(i-1)$) et le pas $(\omega(i-1))$ et le pas $(\omega(i-1), \omega(i))$ est une descente. On note xpal π (resp. ypal π, zpal π) le nombre des x-paliers (resp., y-paliers, z-paliers) de ω et xmoy π (resp. ymoy π, zmoy π) le nombre des entiers i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que $f(i) = g(i) = h(i) = 0$ et le i^e pas $(\omega(i-1), \omega(i))$ est un x-palier (resp. y-palier, z-palier). Posons

$$\begin{aligned} \alpha(\pi) &= \mathrm{fmin}\,\pi + \mathrm{hmax}\,\pi + \mathrm{xpal}\,\pi + \mathrm{ymoy}\,\pi, \\ \beta(\pi) &= \mathrm{gmin}\,\pi + \mathrm{fmax}\,\pi + \mathrm{ypal}\,\pi + \mathrm{zmoy}\,\pi, \\ \gamma(\pi) &= \mathrm{hmin}\,\pi + \mathrm{gmax}\,\pi + \mathrm{zpal}\,\pi + \mathrm{xmoy}\,\pi, \end{aligned} \tag{5.2}$$

On déduit donc du Corollaire 2 et de (5.1)

$$F_{n+1}(x,y,z) = \sum_{\pi \in \mathscr{C}_n} x^{\alpha(\pi)} y^{\beta(\pi)} z^{\gamma(\pi)}. \tag{5.3}$$

Montrons maintenant que la symétrie ternaire de $F_{n+1}(x,y,z)$ est facile à voir selon l'interprétation combinatoire (5.3), c'est-à-dire qu'il est aisé exhiber deux inovlutions sur $\mathscr{C}_n$, l'une échangeant les paramètres α et β en conservant γ, l'autre échangeant β et γ en conservant α.

Voici une involution φ sur $\mathscr{C}_n$ telle que

$$\alpha(\pi) = \beta(\pi'), \quad \beta(\pi) = \alpha(\pi'), \quad \gamma(\pi) = \gamma(\pi'), \qquad \forall \pi \in \mathscr{C}_n, \tag{5.4}$$

où $\pi' = \varphi(\pi)$.

Etant donné $\pi = (\omega, f, g, h) \in \mathscr{C}_n$, on construit $\pi' = (\omega', f', g', h') = \varphi(\pi) \in \mathscr{C}_n$ comme suit:

(i) si $(\omega(i-1), \omega(i))$ est un x-palier (resp. z-palier) et $f(i) = g(i) = h(i) = 0$, alors $(\omega'(i-1), \omega'(i))$ est un z-palier (resp. x-palier) et $f'(i) = g'(i) = h'(i) = 0$;

(ii) si $(\omega(i-1), \omega(i))$ est un x-palier (resp. y-palier) et $f(i) = g(i) = h(i) = k \neq 0$, alors $(\omega'(i-1), \omega'(i))$ est un y-palier (resp. x-palier) et $f'(i) = g'(i) = h'(i) = k$;

(iii) si $(\omega(i-1), \omega(i))$ est une descente et $f(i) = 0$ (resp. $\omega(i-1)$), alors $(\omega'(i-1), \omega'(i)) = (\omega(i-1), \omega(i))$ et $f'(i) = \omega(i-1)$ (resp. 0), $g'(i) = \omega(i-1) - g(i)$, $h'(i) = \omega(i-1) - h(i)$;

(iv) dans tous les autres cas, on définit $((\omega'(i-1), \omega'(i)), f'(i), g'(i), h'(i)) = ((\omega(i-1), \omega(i)), f(i), g(i), h(i))$.

Il est clair que φ est une involution sur $\mathscr{C}_n$ satisfaiant (5.4).

Dans l'involution ci-dessus, si l'on substitute respectivement x, y, z par y, z, x dans (i), (ii) et f, g, h par g, h, f dans (iii), on obtient une involution sur $\mathscr{C}_n$ qui echange β et γ en conservant α.

Remerciement

L'auteur tient à remercier les deux arbitres anonymes pour leurs remarques précieuses sur une version antérieure de cet article.

Bibliographie

[1] L. Carlitz, Explicit formulas for the Dumont–Foata polynomials, Discrete Math. 30 (1980) 211–225.
[2] D. Dumont, Conjectures sur des symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi, Discrete Math. 139 (1995) 469–472.
[3] D. Dumont et D. Foata, Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, Bull. Soc. Math. France 104 (1976) 433–451.
[4] D. Dumont et A. Randrianarivony, Sur une extension des nombres de Genocchi, Europ. J. Combin. 132 (1994) 141–151.
[5] D. Dumont et J. Zeng, Further results on the Euler and Genocchi numbers, Aequat. Math. 47 (1994) 31–42.
[6] Ph. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, Discrete Math. 32 (1980) 125–161.
[7] G. Han, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi et propriétés de symétrie, in: Actes de l'atelier de combinatoire franco-québecois, Publ. du LACIM, Vol. 10 (1992) 119–133.
[8] A. Randrianarivony, Sur une extension des polynômes de Dumont-Foata, manuscript, 1992.
[9] G. Viennot, Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi, Séminaire de Théorie des nombres, exposé $n^\circ 11$, Publ. de l'Université de Bordeaux I, 1980.
[10] H.S. Wall, Continued fractions and totally monotone sequences, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) 165–184.