

Appunti di Controllo Lineare Robusto

PATRIZIO COLANERI
POLITECNICO DI MILANO, ITALIA

Appunti di Controllo Lineare Robusto

PATRIZIO COLANERI
POLITECNICO DI MILANO, ITALIA

Ai miei figli Marta e Francesco
e alla memoria di mia madre

Indice

1	Stabilità e altre proprietà	3
1.1	Norma dello stato	4
1.2	Disequazione di Lyapunov	5
1.3	BIBO Stabilità	9
2	Segnali nel tempo e nella frequenza	13
2.1	Segnali nel tempo	13
2.1.1	Norma \mathcal{L}_2 del movimento libero dello stato	15
2.1.2	Norma \mathcal{L}_∞ del movimento forzato dello stato	16
2.1.3	Norma \mathcal{L}_1 della risposta forzata	20
2.2	Segnali in frequenza	21
3	Fattorizzazioni	25
3.1	Sistema aggiunto	30
3.2	Fattorizzazione canonica	30
3.3	La matrice Hamiltoniana	31
3.4	Fattorizzazione e equazione di Riccati	32
3.4.1	Fattorizzazione R -spettrale	34
3.4.2	Fattorizzazione spettrale	36
3.4.3	Fattorizzazione J -spettrale	38
3.5	Sistemi all pass e fattorizzazione Inner-Outer	39
3.6	Passività	41
4	Norme	45
4.1	Norma \mathcal{L}_1	45
4.2	Norma \mathcal{L}_2	45
4.3	Norma \mathcal{L}_∞	48
4.4	Norma di Hankel	53
4.5	Entropia	57
4.6	Confronti	59
5	Stabilità robusta	61
5.1	Stabilità dei sistemi retroazionati	61
5.2	Raggio Complesso	65
5.3	Raggio reale	67
5.4	Stabilità politopica	69
5.5	Stabilizzazione robusta	70

Capitolo 1

Stabilità e altre proprietà

In questo capitolo sono brevemente richiamati alcuni risultati sulla stabilità e stabilizzazione dei sistemi lineari (invarianti e a dimensione finita):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

dove $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $u(t) \in \mathcal{R}^m$, and $y(t) \in \mathcal{R}^p$. I movimenti dello stato e dell'uscita a partire da un certo stato iniziale x_0 al tempo t_0 sono espressi dalle *formule di Lagrange*

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\end{aligned}$$

dove la matrice esponenziale $e^{A\tau}$ è la *matrice di transizione* del sistema, definita come

$$e^{A\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^k}{k!}$$

e soddisfa l'equazione matriciale differenziale

$$\frac{d}{d\tau} e^{A\tau} = Ae^{A\tau} = e^{A\tau}A$$

Indicando con $\delta(t)$ la funzione ¹ impulso, si ha che il movimento dell'uscita si può anche scrivere come:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$$

Il termine tra parentesi quadre è la cosiddetta *risposta all'impulso*

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

¹In vero, tale oggetto non è una funzione ma una distribuzione, chiamata anche distribuzione di Dirac.

ed esprime la risposta forzata all'impulso in forma di prodotto di convoluzione con la funzione di ingresso:

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

In effetti, la colonna i -esima della matrice $g(t-t_0)$ rappresenta il movimento forzato dell'uscita quando la componente i -esima dell'ingresso è un impulso al tempo t_0 .

La funzione complessa di variabile complessa s :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è la funzione di trasferimento del sistema, e corrisponde alla trasformata (monolatera) di Laplace della risposta forzata all'impulso $g(t)$. E' una matrice di funzioni razionali con p righe e m colonne, che rappresentano le funzioni di trasferimento tra le varie componenti del vettore di ingresso e le varie componenti del vettore di uscita.

La stabilità è la proprietà più importante e più studiata di un sistema dinamico. Essa trae la sua origine dalla più generale nozione di stabilità (in piccolo) di un movimento di un sistema dinamico, e studia il comportamento della differenza tra tale movimento e i movimenti perturbati generati dalla variazione del solo stato iniziale. Grazie alla linearità del sistema si può parlare di stabilità del sistema prescindendo dal particolare movimento considerato. Il sistema è *asintoticamente stabile* se e solo se il movimento libero dello stato

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

tende asintoticamente a zero per ogni stato iniziale x_0 e ogni istante di tempo iniziale t_0 . Analogamente, il sistema è *semplicemente stabile* se e solo se tale movimento libero rimane limitato per $t \geq 0$ per qualunque stato iniziale e tempo iniziale. La struttura lineare di tale movimento rende subito evidente che l'asintotica stabilità e la semplice stabilità sono equivalenti alla convergenza a zero o alla limitatezza di tutti gli elementi della matrice di transizione e^{At} .

Esistono diversi concetti di stabilità di un sistema. Tra questi, riveste particolare importanza la nozione di stabilità esterna (ingresso-uscita) di un sistema con condizioni iniziali nulle. Dati due spazi vettoriali \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , la proprietà di stabilità esterna assicura che l'uscita forzata per $t > 0$ appartenga a \mathcal{X}_1 qualunque sia l'ingresso in \mathcal{X}_2 per $t \geq 0$. Considerando \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 come gli spazi vettoriali delle funzioni limitate per $t > 0$ la nozione di stabilità esterna coincide con quella di stabilità BIBO (bounded input bounded output). E' possibile dimostrare che il sistema (A, B, C, D) è BIBO stabile se e solo se la funzione delle risposte all'impulso $g(t)$ tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

1.1 Norma dello stato

Una matrice A associata ad sistema asintoticamente stabile si dice essere una *matrice di Hurwitz*. La matrice di transizione associata ad A è la matrice esponenziale e^{At} . Se A è di Hurwitz, e ragionando sulla forma di Jordan, è facile capire ² che esistono

²Infatti, si consideri la forma di Jordan $A_J = T^{-1}AT$ e il miniblocco generico J_{ij} . Si ha $\|e^{J_{ij}t}\| = e^{Re(\lambda_i)t}\|P_{ij}(t)\|$. Si prenda allora un numero positivo ϵ_i tale che $\epsilon + Re(\lambda_i) > 0$ e sia $\alpha_{ij} = \max_t e^{-\epsilon_i t}\|P_{ij}(t)\|$, $\beta_i = -Re(\lambda_i) - \epsilon_i$. Quindi $\|e^{J_{ij}t}\| \leq \alpha_i e^{-\beta_i t}$. In conclusione $\|e^{At}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$ dove $\alpha = \|T\|\|T^{-1}\| \max_{ij} \alpha_{ij}$ e $\beta = \min_i \beta_i$.

sempre due costanti positive α e β tale che

$$\|e^{At}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Il numero β deve essere scelto appartenere all'intervallo $(0, \Lambda)$ dove Λ è il valore assoluto della parte reale dell'autovalore di A con parte reale più grande. Una conseguenza del valore inferiore alla norma della matrice esponenziale è che la norma del movimento libero dello stato è limitata inferiormente come segue:

$$\|x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0\|, \quad t \geq 0$$

che significa che lo stato di un sistema asintoticamente stabile tende a zero in modo esponenziale. Se la matrice A non è di Hurvitz è ancora possibile caratterizzare l'andamento esponenziale della norma dello stato. Infatti,

$$\frac{\|x(t+dt)\| - \|x(t)\|}{dt} \leq \left(\frac{\|e^{Adt}\| - 1}{dt} \right) \|x(t)\|$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\|x(t)\|}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\|x(t+dt)\| - \|x(t)\|}{dt} \\ &\leq \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\|e^{Adt}\| - 1}{dt} \right) \|x(t)\| = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\|I + Adt\| - 1}{dt} \right) \|x(t)\| \end{aligned}$$

Definendo la cosiddetta misura di Lozinski della matrice A

$$\mu(A) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\|I + Adt\| - 1}{dt} \right)$$

si ha in generale che

$$\frac{d\|x(t)\|}{dt} \leq \mu(A) \|x(t)\|$$

cioè

$$\|x(t)\| \leq e^{\mu(A)t} \|x_0\|, \quad t \geq 0$$

Si noti che la misura di Lozinski coincide con la metà del massimo autovalore di $A + A'$ se la norma utilizzata è quella spettrale. Infatti, sfruttando il Teorema di de L'Hopital, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\|I + Adt\| - 1}{dt} \right) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{max}[I + Adt + A'dt + AA'dt^2]} - 1}{dt} \right) \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda_{max}(A + A')dt} - 1}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{max}(A + A') \end{aligned}$$

1.2 Disequazione di Lyapunov

Il risultato seguente è un classico della teoria della stabilità dei sistemi lineari, conosciuto come Lemma di Lyapunov.

Teorema 1.1 Una matrice A è di Hurwitz se e solo se la disequazione matriciale

$$A'P + PA < 0$$

è verificata per una certa matrice reale, simmetrica e definita positiva P .³

Prova. Supponiamo che tale $P > 0$ esista. Per assurdo sia $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$ e $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$. Allora:

$$2\operatorname{Re}(\lambda)x^*Px < 0$$

conduce all'assurdo. Viceversa, si supponga che A sia di Hurwitz. Allora esiste

$$\bar{P} = \int_0^\infty e^{A't} Q e^{At} dt$$

per ogni matrice simmetrica e definita positiva Q . Infatti

$$\|\bar{P}\| \leq \int_0^\infty \|e^{A't}\| \|Q\| \|e^{At}\| dt \leq \alpha^2 \|Q\| \int_0^\infty e^{-2\beta t} dt = 0.5\alpha^2\beta^{-1} \|Q\| < \infty$$

Inoltre

$$A'\bar{P} + \bar{P}A = \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A't} Q e^{At}] dt = -Q < 0$$

che è la tesi. ■

La disequazione di Lyapunov genera anche un valore inferiore alla norma⁴ della matrice di transizione di un sistema asintoticamente stabile. Infatti, se A è di Hurwitz, allora esiste $P > 0$ tale che $A'P + PA < 0$. Moltiplicando a sinistra per $e^{A't}$ e a destra per e^{At} si ha $e^{A't} A' P e^{At} + e^{A't} P A e^{At} < 0$, per ogni $t \geq 0$, che implica che $\frac{d}{dt} [e^{A't} P e^{At}] < 0$ per ogni $t \geq 0$. La quantità tra parentesi quadre vale P per $t = 0$ e decresce (nell'ordinamento parziale delle matrici definite positive) per $t > 0$. In conclusione

$$P > e^{A't} P e^{At}, \quad t > 0$$

Questa disequazione implica $\lambda_{\max}(P) > \|e^{At}\|^2 \lambda_{\min}(P)$ e quindi

$$\max_{t>0} \|e^{At}\|^2 < \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}$$

dove λ_{\min} rappresenta l'autovalore più piccolo di P . Il significato di quest'ultima disequazione è evidente. Per ogni valore del tempo t positivo, la norma della matrice di transizione è limitata dal *numero di condizionamento* della soluzione P della disequazione di Lyapunov, e quindi il movimento libero dello stato è limitato in norma da tale valore che moltiplica la norma dello stato iniziale. Se ora si prende $\beta > 0$ tale che $A + \beta I$ sia ancora asintoticamente stabile, seguendo il ragionamento precedente si ha che:

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &\leq \alpha e^{-\beta t}, \quad t \geq 0 \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \\ 0 &> (A + \beta I)' P + P(A + \beta I), \quad P > 0 \end{aligned}$$

³Una matrice reale e simmetrica Q è definita positiva se la forma quadratica $x'Qx$ è positiva per ogni vettore non nullo x . Si dice definita negativa se $-Q$ è definita positiva.

⁴I valori singolari $\sigma_i(F)$ di una matrice F sono definiti come le radici degli autovalori di FF' . Il più grande di tali valori singolari, spesso indicato con $\bar{\sigma}(F)$ è una norma di F , chiamata anche *norma spettrale*. Essa è dunque definita come la radice quadrata dell'autovalore più grande di $F'F$ (o anche, che è la stessa cosa, di FF'): $\|F\| = \lambda_{\max}(FF')^{1/2}$.

Si noti che la disuguaglianza di cui sopra vale anche se A non è Hurwitz e $\beta > 0$ è tale che $A + \beta I$ sia Hurwitz.

Osservazione 1.1 *Il Teorema sulla disequazione di Lyapunov ammette una forma duale che fa riferimento alla disequazione*

$$AS + SA' < 0$$

E' infatti evidente che esiste $S > 0$ di questa disequazione se e solo se esiste $P > 0$ di quella precedente. La ovvia corrispondenza è $S = P^{-1}$.

Osservazione 1.2 *Dal teorema precedente si evince una facile condizione sufficiente perchè una matrice sia di Hurwitz. Infatti, se la misura di Lozinski è negativa, allora si ha $A + A' < 0$ col che la disequazione di Lyapunov è soddisfatta con $P = I$. In conclusione possiamo dire che A è di Hurwitz se $\mu(A) < 0$. Questa condizione è peraltro solo sufficiente. Infatti è facile verificare che la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è di Hurwitz per ogni α , ma la sua misura di Lozinski è positiva solo se $\alpha^2 > 4$.

La disequazione di Lyapunov può essere caratterizzata in termini frequenziali come segue. Infatti, per ogni numero complesso s la disequazione si può scrivere come $(-sI - A')P + P(sI - A) > 0$ e quindi, ponendo $s = j\omega$ e moltiplicando a sinistra per $(-j\omega I - A')^{-1}$ e a destra per $(j\omega I - A)^{-1}$ si ha:

$$P(j\omega I - A)^{-1} + (-j\omega I - A')^{-1}P > 0, \quad \forall \omega$$

Un altro modo di guardare alla stabilità asintotica fa dunque riferimento al concetto di funzione *strettamente reale positiva*⁵. Da ciò segue che una matrice A è di Hurwitz se e solo se esiste una matrice reale, simmetrica e definita positiva P tale che la matrice complessa $P(sI - A)^{-1}$ è *strettamente reale positiva*. Uno dei problemi più importanti

della teoria del controllo è il cosiddetto problema della stabilizzazione dallo stato, cioè se sia possibile o no, data una coppia (A, B) , trovare una legge di controllo dallo stato capace di rendere il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile. Si può dimostrare che non è lesivo della generalità limitare l'attenzione a leggi di controllo statiche, lineari e invarianti nel tempo del tipo:

$$u = Kx$$

dove K è una matrice, di ovvie dimensioni, che renda $A + BK$ asintoticamente stabile (se possibile).

E' molto interessante osservare che è possibile parametrizzare tutte le soluzioni K del problema della stabilizzazione, facendo riferimento alla disequazione di Lyapunov. Si

⁵Una matrice $\Psi(s)$ della variabile complessa s si dice essere strettamente reale positiva se

$$\Psi(j\omega) + \Psi(-j\omega)' > 0, \quad \forall \omega$$

ricordi infatti (Osservazione 1.1) che $A + BK$ è asintoticamente stabile se e solo se esiste $S > 0$ soluzione di

$$(A + BK)S + S(A + BK)' = AS + SA' + BKS + SK'B' < 0$$

Si noti che, nel problema di sintesi di K , questa disequazione ha due incognite $S > 0$ e K che appaiono bilinearmente nella disequazione stessa. Possiamo affermare che l'insieme di tutti i K che rendono $A + BK$ di Hurwitz non è convesso in generale. E' però possibile sovrapparametrizzare la soluzione rendendo il problema della stabilizzazione un problema tipicamente convesso. A tale scopo si definisca la variabile:

$$W = KS$$

e si riscriva la disequazione di Lyapunov nel modo seguente:

$$AS + SA' + BW + W'B' < 0$$

Si noti che tale disequazione è lineare nella coppia (S, W) . Allora:

Tutte le soluzioni K del problema della stabilizzazione si possono scrivere come $K = WS^{-1}$ dove W e $S > 0$ soddisfano la disequazione lineare

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & W' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} < 0$$

Affrontiamo ora il problema della *ricostruzione asintotica dello stato*, cioè se sia possibile o no, trovare un sistema dinamico alimentato dalle misure y ed eventualmente dagli ingressi u , che fornisca asintoticamente una ricostruzione dello stato (e dell'uscita) indipendentemente dall'errore commesso sulla conoscenza dello stato iniziale. Si può dimostrare che per affrontare questo problema non è lesivo della generalità limitarsi ai ricostruttori asintotici in forma di osservatore, cioè a sistemi dinamici del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= Ax(t) + L(C\hat{x}(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

dove L deve essere progettata in maniera da assicurare che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$$

per qualunque $\hat{x}(0), x(0)$. Un semplice conto dimostra che, indicando con

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

la differenza tra lo stato vero $x(t)$ e quello ricostruito $\hat{x}(t)$, si ha

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t) \tag{1.1}$$

e quindi per risolvere il problema basta ed occorre che $A + LC$ sia di Hurwitz. Si dirà che un sistema (una coppia (A, C)) è rivelabile se e solo se è possibile trovare L tale che $A + LC$ è asintoticamente stabile. Sappiamo che ciò è possibile se e solo se la parte non osservabile (che non è influenzata da L) è asintoticamente stabile.

E' interessante osservare (come fatto per la stabilizzabilità) che è possibile parametrizzare tutte le soluzioni L del problema della ricostruzione asintotica, facendo riferimento alla disequazione di Lyapunov. Si ricordi infatti (Osservazione 1.1) che $A+LC$ è asintoticamente stabile se e solo se esiste $P > 0$ soluzione di

$$(A+LC)'P + P(A+LC) = A'P + PA + C'L'P + PLC < 0$$

Questa disequazione ha due incognite $P > 0$ e L che appaiono bilinearmente nella disequazione stessa. Possiamo affermare che l'insieme di tutti i L che rendono $A+LC$ di Hurwitz non è convesso in generale. E' però ancora possibile sovrapparametrizzare la soluzione rendendo il problema della ricostruzione asintotica un problema tipicamente convesso. A tale scopo si definisca la variabile:

$$\Omega = PL$$

e si riscriva la disequazione di Lyapunov nel modo seguente:

$$A'P + PA + \Omega C + C'\Omega' < 0$$

Si noti che tale disequazione è lineare nella coppia (S, Ω) Allora:

Tutte le soluzioni L del problema della stabilizzazione si possono scrivere come $L = P^{-1}\Omega$ dove Ω e $S > 0$ soddisfano la disequazione lineare

$$\begin{bmatrix} P & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A' & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \Omega' \end{bmatrix} < 0$$

Va da sé che il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= Ax(t) + L(C\hat{x}(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \\ u(t) &= K\hat{x}(t) \end{aligned}$$

è un regolatore (ingresso y e uscita u) che stabilizza il sistema di partenza.

1.3 BIBO Stabilità

In questa sezione si mettono in luce le relazioni esistenti tra asintotica stabilità e BIBO stabilità, per un sistema lineare e invariante nel tempo del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3)$$

Alla luce di tutte le discussioni fatte, sappiamo già che la stabilità asintotica dipende solo dalla matrice A ed è assicurata se e solo se essa è di Hurwitz. Viceversa, la stabilità BIBO riguarda il rapporto tra la risposta forzata dell'uscita e l'ingresso. Come già anticipato, si ha stabilità BIBO se qualunque sia la funzione di ingresso $u(t)$ limitata per $t \geq 0$, la risposta forzata dell'uscita, data da

$$y_f(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

è limitata per $t > 0$. D'altra parte la funzione delle risposte all'impulso si può sempre scrivere come

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = \hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B} + D\delta(t)$$

dove (A, B, C, D) è il sistema dato e $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$ è una realizzazione minima di $g(t)$ (o della funzione di trasferimento $G(s)$, sua trasformata di Laplace). Quindi, (si ricordi la forma di Jordan) ogni elemento $g_{ij}(t)$ della matrice delle risposte all'impulso è una combinazione di termini esponenziali, cioè:

$$g_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{g_k-1} \alpha_{kp} t^p e^{\lambda_k t} \quad (1.4)$$

dove μ è il numero di autovalori distinti di \hat{A} , λ_k sono gli autovalori di \hat{A} e g_k è l'indice (dimensione del più grande miniblocco di Jordan) relativo all'autovalore λ_k . Si ha il seguente risultato.

Teorema 1.2 *Il sistema (1.2), (1.3) è BIBO stabile se e solo se vale una delle due condizioni equivalenti:*

(i)

$$\int_0^{\infty} \|g(\tau)\| d\tau < \infty$$

(ii)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$$

Prova.

(i) \rightarrow BIBO stabilità. E' evidente che se vale la condizione (i) allora, per ogni funzione di ingresso limitata, cioè $\|u(r)\| < M, \forall r \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \|y_f(t)\| &= \left\| \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|g(\tau)\| \|u(t-\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} \|g(\tau)\| \|u(t-\tau)\| d\tau \leq M \int_0^{\infty} \|g(\tau)\| d\tau < \infty \end{aligned}$$

(ii) \rightarrow (i). Se vale la condizione (ii), la matrice \hat{A} è di Hurwitz. Quindi $\|e^{\hat{A}t}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$ con α e β positivi. Quindi

$$\int_0^{\infty} \|g(\tau)\| d\tau \leq \|C\| \|B\| \alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} d\tau + \|D\| \leq \frac{\|C\| \|B\| \alpha}{\beta} + \|D\|$$

BIBO stabilità \rightarrow (ii). Se la condizione (ii) non vale, allora esiste un elemento $g_{ij}(t)$ di $g(t)$ tale che

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |g_{ij}(\tau)| \neq 0$$

Prendiamo allora $T > 0$ e un segnale di ingresso del tipo:

$$u(t) = e_j \operatorname{sgn}[g_{ij}(T-t)]$$

dove e_j è il vettore j -esimo della matrice unitaria di dimensione m . Se denotiamo con $y_{fi}(t)$ la componente i -esima della risposta forzata, si ha, per $t \geq 0$:

$$y_{fi}(T) = \int_0^T e_i' g(\tau) u(T-\tau) d\tau = \int_0^T |g_{ij}(\tau)| d\tau$$

Ci si rende conto facilmente che essendo $|g_{ij}(t)|$ non asintotico a zero, la risposta $y_{fi}(T)$ non è limitata per T che tende all'infinito. ■

Si noti che l'equivalenza tra le condizioni (i) e (ii) vale per la classe di sistemi considerati e non può essere estesa, ad esempio, ai sistemi lineari varianti nel tempo. Infatti, si consideri il sistema scalare

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{t+1}x(t) + u(t), \quad y(t) = x(t)$$

E' facile riconoscere che la funzione della risposta all'impulso a partire dall'istante iniziale $t = 0$ è

$$g(t) = \frac{1}{t+1}$$

Tale funzione soddisfa la condizione (ii) ma non la condizione (i) in quanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t |g(\tau)| d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \log(|t+1|) = \infty$$

Capitolo 2

Segnali nel dominio del tempo e della frequenza

In questo capitolo affrontiamo il problema della rappresentazione dei segnali, sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. Parte di questi argomenti sono stati già sviluppati in corsi precedenti: lo scopo, in questo contesto, è quello di integrare le conoscenze al fine da acquisire le capacità necessarie per affrontare proficuamente gli argomenti successivi.

2.1 Segnali nel tempo

Definiamo con t la variabile temporale e assumiamo che essa appartenga all'insieme dei numeri reali \mathcal{R} . Un segnale $v(t)$ è una funzione misurabile (secondo Lebesgue) che mappa i numeri reali \mathcal{R} in \mathcal{R}^n . L'insieme dei segnali è

$$\mathcal{S} = \{v : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n\}$$

I segnali così definiti formano uno spazio vettoriale rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per uno scalare. Importanti per le applicazioni in problemi tipici dell'ingegneria, sono i due sottospazi

$$\mathcal{S}_+ = \{v : v(t) = 0, t < 0\}, \quad \mathcal{S}_- = \{v : v(t) = 0, t > 0\}$$

La grandezza di un segnale può essere misurata attraverso la definizione di opportune norme:

Norma in \mathcal{L}_2

La norma \mathcal{L}_2 , su un intervallo di tempo finito o infinito. La norma \mathcal{L}_2 sull'intervallo finito di tempo $[0, T]$ è definita nel modo seguente:

$$\|v\|_{2, [0, T]} = \left\{ \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$$

L'insieme dei segnali per cui questa norma è finita si indica con il simbolo $\mathcal{L}_2[0, T]$ e comprende ovviamente i segnali continui e limitati in $[0, T]$.

Per affrontare più avanti i problemi di stabilità, occorre considerare i segnali in un intervallo infinito. La norma \mathcal{L}_2 su un intervallo di tempo infinito è definita nel modo seguente:

$$\|v\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$$

e lo spazio vettoriale corrispondente è indicato con il simbolo $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$. Tale spazio è costituito dalla somma diretta di $\mathcal{L}_2(-\infty, 0] = S_- \cap \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ e $\mathcal{L}_2[0, \infty) = S_+ \cap \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$.

Per stabilire se un segnale è in $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ si può procedere per passi, definendo lo spazio esteso \mathcal{L}_{2e} definito come

$$\mathcal{L}_{2e} = \{v \in \mathcal{L}_2[0, T], \forall T < \infty\}.$$

Nello spazio (di Hilbert) $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ il *prodotto interno* tra due funzioni v_1 e v_2 è definito come:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)' v_2(t) dt$$

e, come ogni prodotto interno, soddisfa la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \|v_1\|_2 \|v_2\|_2$$

I due segnali si dicono *ortogonali* se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Ovviamente risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|_2^2$.

Norma in \mathcal{L}_∞

Riveste notevole interesse anche lo spazio \mathcal{L}_∞ delle funzioni di variabile reale tale che

$$\text{ess sup}_t \|f(t)\| < \infty$$

Sullo spazio \mathcal{L}_∞ la norma è definita come segue:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t \|f(t)\|$$

E' facile osservare che lo spazio così integrato di norma è completo e quindi di Banach.

Norma in \mathcal{L}_1

Mentre la norma \mathcal{L}_2 di un segnale scalare $f(t)$ misura l'energia totale, quella \mathcal{L}_1 misura il suo consumo totale, ed è definita nel modo seguente:

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)| dt$$

L'estensione al caso vettoriale o matriciale è semplice:

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty \|f(t)\| dt$$

¹La notazione ess sup indica l'estremo superiore essenziale della funzione $\|f(t)\|$, cioè l'estremo superiore a meno di un insieme di misura nulla:

$$\text{ess sup}_t \|f(t)\| = \inf\{c : \{\|f(x)\| > c\} \text{ ha misura nulla}\}$$

Per le funzioni continue a tratti, l'estremo superiore essenziale coincide con l'estremo superiore.

dove $\|f(t)\|$ rappresenta una qualsiasi norma del vettore (o matrice) numerica $f(t)$. In particolare, se si considera la norma uno, si ha

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty \max_j \sum_i |f_{ij}(t)|$$

2.1.1 Norma \mathcal{L}_2 del movimento libero dello stato

Consideriamo ora un segnale x generato dalle equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

dove la matrice A ha dimensioni opportune. Notiamo che il segnale x rappresenta l'evoluzione libera, per $t \geq 0$, di un sistema lineare e invariante nel tempo a partire da un certo stato iniziale x_0 al tempo zero. Scriviamo intanto la soluzione formale:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

dove e^{At} è la *matrice di transizione* dello stato. Allora

$$\|x\|_{2[0,T]}^2 = \int_0^T x(t)' x(t) dt = x_0' \left\{ \int_0^T e^{A't} e^{At} dt \right\} x_0$$

Definiamo ora la matrice:

$$M(\tau) = \int_\tau^T e^{A'(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} dt$$

e notiamo che

$$\frac{d}{dt} M(t) = -I - A(t)' M(t) - M(t) A(t), \quad M(T) = 0$$

col che la norma di x si ottiene risolvendo all'indietro l'equazione differenziale matriciale precedente e risulta:

$$\|x\|_{2[0,T]}^2 = x_0' M(0) x_0$$

Poichè, com'è ovvio, tale norma è finita qualunque sia T finito, si ha che $x \in \mathcal{L}_{2e}$. Possiamo ora domandarci cosa succede se $T \rightarrow \infty$. Risulta subito chiaro che $M(\tau)$ potrebbe non esistere se $T \rightarrow \infty$. D'altra parte sappiamo dalla teoria dei sistemi lineari che la norma di $e^{A(t-\tau)}$ è esponenzialmente tendente a zero, per $t \rightarrow \infty$, se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale minore di zero (la matrice A è di *Hurwitz*). In tale caso, come abbiamo già affermato nel capitolo precedente, esiste un numero positivo α e un numero positivo β (che può essere scelto di poco superiore al valore assoluto della parte reale dell'autovalore di A più vicino all'asse immaginario), tale che:

$$\|e^{A(t-\tau)}\| \leq \alpha e^{\beta(t-\tau)}, \quad t \geq \tau$$

Quindi, per $T \geq \tau$ si ha

$$\|M(\tau)\| = \left\| \int_\tau^T e^{A'(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} dt \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\tau}^T \|e^{A(t-\tau)}\|^2 dt \\
&\leq \int_{\tau}^T \alpha^2 e^{2\beta(t-\tau)} dt \\
&= \frac{\alpha^2}{2\beta} (1 - e^{2\beta(T-\tau)}) \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2\beta}
\end{aligned}$$

Allora esiste il limite di $M(\tau)$ per $T \rightarrow \infty$ e risulta:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{A'(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} dt$$

Tale limite non dipende da τ , è indicato con M , e si può scrivere

$$M = \int_0^{\infty} e^{A't} e^{At} dt$$

E' immediato poi verificare che M è una matrice simmetrica e definita positiva, unica soluzione della cosiddetta *equazione di Lyapunov*:

$$A'M + MA + I = 0$$

In conclusione, il movimento libero dello stato $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ se e solo se A è di Hurwitz. In tale caso, $\|x\|_2^2 = x_0' M x_0$.

L'equazione di Lyapunov permette di ricavare un risultato interessante che riguarda le specifiche temporali sullo stato di un sistema asintoticamente stabile e raggiungibile.

2.1.2 Norma \mathcal{L}_{∞} del movimento forzato dello stato

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad x(0) = 0 \quad (2.1)$$

$$z = Cx \quad (2.2)$$

dove la matrice A è di Hurwitz e la coppia (A, B) è raggiungibile. Inoltre assumiamo che $w \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Vogliamo calcolare la quantità

$$\mathcal{G} := \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_{\infty} \quad (2.3)$$

dove, per la norma della variabile di uscita $\|z\|_{\infty}$, sono presi in considerazione i due casi seguenti:

$$\|z\|_{\infty} := \sup_{t \geq 0} \sqrt{z'(t)z(t)} \quad (2.4)$$

e

$$\|z\|_{\infty} := \sup_{t \geq 0} \max_i |z_i(t)| \quad (2.5)$$

dove $z_i(t)$ denota la i -esima componente scalare di $z(t)$.

Lemma 2.1 *Sia S la soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione di Lyapunov*

$$0 = AS + SA' + BB' \quad (2.6)$$

Le seguenti condizioni sono vere:

- a) *Per la norma (2.4) si ha $\mathcal{G} = \lambda_{max}^{1/2}(CSC')$ dove $\lambda_{max}(\cdot)$ denota il massimo autovalore di (\cdot) .*
- b) *Per la norma (2.5) si ha $\mathcal{G} = d_{max}^{1/2}(CSC')$ dove $d_{max}(\cdot)$ denota il massimo elemento sulla diagonale di (\cdot) .*

Prova Definiamo $v(x) := x'S^{-1}x$ e consideriamo il sistema (2.1)–(2.2) con un ingresso arbitrario w che soddisfa $\|w\|_2 \leq 1$. La derivata di $v(\cdot)$ lungo una traiettoria di tale sistema è:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x'(A'S^{-1} + S^{-1}A)x + 2w'B'S^{-1}x \\ &= -x'S^{-1}BB'S^{-1}x + 2w'B'S^{-1}x \\ &= w'w - (w - B'S^{-1}x)'(w - B'S^{-1}x) \\ &\leq \|w\|^2 \end{aligned}$$

che, dopo integrazione di entrambi i membri da 0 a $t \geq 0$ fornisce:

$$v(x(t)) = x'(t)S^{-1}x(t) \leq \|w\|_2^2 \leq 1$$

Questa diseguaglianza significa che le traiettorie $x(t)$, per tutti i $t \geq 0$, sono confinate nell'insieme $x'S^{-1}x \leq 1$ quando w rimane limitato $\|w\|_2 \leq 1$.

Punto a) Con $z = Cx$ e $\tilde{x} := S^{-1/2}x$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^2 &= \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty^2 \\ &\leq \max \{x'C'Cx ; x'S^{-1}x \leq 1\} \\ &\leq \max \{\tilde{x}'S^{1/2}C'C S^{1/2}\tilde{x} ; \tilde{x}'\tilde{x} \leq 1\} \\ &\leq \lambda_{max}(S^{1/2}C'C S^{1/2}) \\ &\leq \lambda_{max}(CSC') \end{aligned}$$

e rimane da dimostrare che esiste una traiettoria ammissibile $w(t)$ tale che $\|z\|_\infty^2$ è arbitrariamente vicina a $\lambda_{max}(CSC')$. A questo fine, consideriamo $T > 0$ fissato ma arbitrario

$$0 < S(T) := \int_0^T e^{At}BB'e^{A't}dt \leq S$$

e il segnale di ingresso tale che $w(t) = 0$ per tutti i valori di $t > T$ e

$$w(t) = B'e^{A'(T-t)}S(T)^{-1/2}\psi, \quad 0 \leq t \leq T$$

dove ψ è il vettore che deve essere determinato. Semplici conti mostrano che

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w'(t)w(t)dt = \int_0^T w'(t)w(t)dt = \psi'\psi$$

e

$$z(T) = C \int_0^T e^{A(T-\tau)} B w(\tau) d\tau = CS(T)^{1/2} \psi$$

Conseguentemente, scegliendo ψ come l'autovettore di norma unitaria associato al massimo autovalore della matrice $S(T)^{1/2} C' C S(T)^{1/2}$, l'ammissibilità del segnale di ingresso w è garantita e

$$\begin{aligned} \|z\|_\infty^2 &= \sup_{t \geq 0} z'(t) z(t) \\ &\geq \psi' S(T)^{1/2} C' C S(T)^{1/2} \psi \\ &\geq \lambda_{max}(CS(T)C') \end{aligned}$$

la prova è conclusa dal momento che $S(T)$ diventa arbitrariamente vicina a S quando T aumenta.

Punto b) Con $z_i = C_i x$ dove C_i è la riga i -esima della matrice C e $\tilde{x} := S^{-1/2} x$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^2 &= \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty^2 \\ &\leq \max_{x,i} \{x' C_i' C_i x ; x' S^{-1} x \leq 1\} \\ &\leq \max_i \max_{\tilde{x}} \left\{ \tilde{x}' S^{1/2} C_i' C_i S^{1/2} \tilde{x} ; \tilde{x}' \tilde{x} \leq 1 \right\} \\ &\leq \max_i \lambda_{max}(S^{1/2} C_i' C_i S^{1/2}) \\ &\leq \max_i C_i S C_i' \\ &\leq d_{max}(C S C') \end{aligned}$$

Come prima, rimane da determinare un ingresso ammissibile tale che l'uguaglianza valga. Questo può essere ottenuto dalla stessa funzione $w(t)$ già definita in precedenza e da una scelta opportuna del vettore ψ . Infatti, si prenda ψ_i come l'autovettore di norma unitaria associato al massimo autovalore della matrice $S(T)^{1/2} C_i' C_i S(T)^{1/2}$, e si scelga $\psi = \psi_i$ where $C_i S(T) C_i' \leq C_l S(T) C_l'$ per tutti gli indici $i = 1, 2, \dots$, allora w è ammissibile e

$$\begin{aligned} \|z\|_\infty^2 &= \sup_{t \geq 0} \max_i z_i'(t) z_i(t) \\ &\geq \max_i \psi' S(T)^{1/2} C_i' C_i S(T)^{1/2} \psi \\ &\geq C_i S(T) C_i' \\ &\geq d_{max}(CS(T)C') \end{aligned}$$

la prova è allora conclusa dal momento che, come detto prima, $S(T)$ diventa arbitrariamente vicina a S quando T aumenta.

Osservazione 2.1 Nella prova del Lemma 2.1, è stato assunto che la soluzione dell'equazione lineare matriciale (2.6) è definita positiva. Questo avviene se la coppia (A, B) è raggiungibile. Se questa ipotesi non è verificata, il risultato vale ancora. In questo caso, usando la scomposizione di Kalman è immediato osservare che l'uscita $z(t)$ in (2.2) dipende solo dalla parte raggiungibile del sistema.

Osservazione 2.2 Le relazioni tra entrambe le espressioni di \mathcal{G} per le norme (2.4) e (2.5) sono

$$d_{max}(CSC') \leq \lambda_{max}(CSC') \leq \text{trace}(CSC')$$

che anche implica, in entrambi i casi, che $\mathcal{G} \leq \|T(z, w; s)\|_2$. L'uguaglianza si ha ad esempio nel caso in cui ci sia una sola uscita.

Osservazione 2.3 (*Convessità*)

Una funzione matriciale $f(X)$ definita in un insieme convesso Ω si dice convessa se per ogni X_1 e X_2 in Ω si ha, per ogni $\alpha \in [0, 1]$:

$$f(X) \leq \alpha f(X_1) + (1 - \alpha)f(X_2)$$

Si può dimostrare che una funzione matriciale $f(X)$ definita in un insieme convesso Ω è convessa se e solo se per ogni $X_0 \in \Omega$ esiste una matrice di dimensioni opportune Λ_0 tale che, per ogni $X \in \Omega$:

$$f(X) \geq f(X_0) + \langle \Lambda_0, X - X_0 \rangle$$

dove il simbolo \langle, \rangle indica il prodotto scalare ².

Ad esempio, si consideri l'insieme \mathcal{P} delle matrici simmetriche e definite positive. La funzione a elementi reali $g(X) : \mathcal{P} \rightarrow R$ definita come $g(X) := \lambda_{max}(X)$ risulta una funzione convessa. Per verificare ciò si prenda un'altra matrice X_0 e l'autovettore di norma unitaria x_0 associato al suo autovalore massimo. Si ha:

$$\begin{aligned} g(X) &= \lambda_{max}(X) \\ &\geq x_0' X x_0 \\ &= x_0' X_0 x_0 + \langle x_0 x_0', X - X_0 \rangle = g(X_0) + \langle x_0 x_0', X - X_0 \rangle \end{aligned}$$

che implica la convessità di $g(X)$. Lo stesso è vero per la funzione $g(X) := d_{max}(X)$. Per valutare ciò, si prenda $X_0 \in \mathcal{P}$ e e_0 la colonna della matrice identità tale che $e_0' X_0 e_0 = g(X_0)$. Per tutti i valori di $X \in \mathcal{P}$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(X) &= d_{max}(X) \\ &\geq e_0' X e_0 \\ &= e_0' X_0 e_0 + \langle e_0 e_0', X - X_0 \rangle = g(X_0) + \langle e_0 e_0', X - X_0 \rangle \end{aligned}$$

che è la condizione di convessità. Si noti ancora che entrambe le funzioni sono non differenziabili in \mathcal{P} e sono funzioni *non decrescenti* nel senso che per ogni $X_1, X_2 \in \mathcal{P}$ tale che $X_1 \leq X_2$, si ha $g(X_1) \leq g(X_2)$.

Esempio 2.1 Si consideri il sistema (2.1)–(2.2) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -9 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il nostro scopo è illustrare il risultato del Lemma 2.1. La soluzione definita positiva P dell'equazione di Lyapunov (2.6) fornisce

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \lambda_{max}^{1/2}(CSC') & = 2.16 \\ d_{max}^{1/2}(CSC') & = 1.68 \end{cases}$$

²Il prodotto scalare $\langle \Lambda_0, \Lambda_1 \rangle$ tra due matrici si può definire come $\text{tr}[\Lambda_0' \Lambda_1]$.

D'altra parte, prendendo $T = 5$, può essere verificato che $S(T) \approx S$ e quindi, in corrispondenza dell'ingresso

$$w(t) = \begin{cases} B'e^{A'(T-t)}S^{-1/2}\psi & , \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & , \quad t > T \end{cases}$$

il sistema produce un'uscita $z(t)$ che permette di calcolare la funzione

$$f(t) := \begin{cases} \sqrt{z_1(t)^2 + z_2(t)^2} \\ \max\{|z_1(t)|, |z_2(t)|\} \end{cases}$$

per ogni norma usata per definire \mathcal{G} . È interessante verificare che in entrambi i casi

$$\max_{t \geq 0} f(t) \approx \mathcal{G}$$

e $\|w\|_2 \approx 1$ come è richiesto nella prova del Lemma 2.1.

2.1.3 Norma \mathcal{L}_1 della risposta forzata

Ricordiamo che la risposta forzata si scrive come:

$$y_f(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Abbiamo visto (Teorema 1.2) che $y_f(t)$ è limitata qualunque sia l'ingresso limitato (BIBO stabilità) se e solo se

$$\int_0^\infty \|g(t)\| dt < \infty$$

Se si prende la norma uno di $g(t)$ possiamo allora dire che il sistema è BIBO stabile se e solo se $g \in \mathcal{L}_1$, con

$$\|g\|_1 := \int_0^\infty \max_j \sum_{i=1}^p |g_{ij}(t)| dt < \infty$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \max_i |y_{fi}(t)| &= \max_i \left| \int_0^t e'_i g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \max_i \int_0^t |e'_i g(t-\tau)u(\tau)| d\tau \\ &\leq \max_i \int_0^t \sum_{j=1}^m |g_{ij}(t-\tau)| |u_j(\tau)| d\tau \\ &\leq \max_i \int_0^t \sum_{j=1}^m |g_{ij}(\sigma)| d\sigma \max_j \max_{\tau \in (0,t)} |u_j(\tau)| \\ &\leq \|g'\|_1 \max_t \max_j |u_j(t)| \end{aligned}$$

e quindi

$$\max_t \max_i |y_{fi}(t)| \leq \|g'\|_1 \max_t \max_i |u_i(t)|$$

Infine, fissato T e scegliendo l'ingresso limitato

$$u_j(t) = \text{sgn } g_{ij}(T-t)$$

abbiamo

$$\max_i |y_{fi}(T)| = \max_i \left| \int_0^T e'_i g(T-\tau) u(\tau) d\tau \right| = \max_i \int_0^T \sum_{j=1}^m |g_{ij}(T-\tau)| d\tau$$

e quindi

$$\max_t \max_i |y_{fi}(t)| = \|g'\|_1$$

La norma \mathcal{L}_1 di $g'(t)$ rappresenta dunque il valore massimo del rapporto tra la norma infinita dell'uscita forzata e la norma infinita dell'ingresso per ogni ingresso limitato ³:

$$\|g'\|_1 = \sup_{u \in \mathcal{L}_\infty} \frac{\|y_f\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

2.2 Segnali in frequenza

Un segnale (vettoriale) in frequenza $V(j\omega)$ è una funzione misurabile che gode della proprietà $(V(j\omega))^* = V(-j\omega)'$. La variabile ω rappresenta la frequenza misurata in radianti per unità di tempo. La norma \mathcal{L}_2 in frequenza è definita come:

$$\|V\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} V(-j\omega)' V(j\omega) d\omega \right\}^{1/2}$$

I segnali che ammettono tale norma finita si dice appartenere allo spazio di Lebesgue in frequenza, indicato con il simbolo \mathcal{L}_2 . Questo spazio è di Hilbert una volta dotato del prodotto interno:

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_1(-j\omega)' V_2(j\omega) d\omega$$

Si noti che il simbolo del prodotto interno è il medesimo usato per lo spazio $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$. La ragione è che tale prodotto (e quindi la norma) si conserva nella trasformazione di Fourier, definita come ⁴:

$$V(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T v(t) e^{-j\omega t} dt$$

C'è quindi un isomorfismo tra $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ e \mathcal{L}_2 che, come abbiamo già detto, conserva il prodotto interno e la norma (*identità di Parseval*):

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \|V\|_2 = \|v\|_2$$

³Si osservi che se si prende la norma uno del segnale $g(t)$ nel modo seguente

$$\|g\|_1 := \int_0^\infty \|g(t)\|_\infty dt = \int_0^\infty \max_{i=1, \dots, p} \sum_{j=1}^m |g_{ij}(t)| dt$$

allora risulta

$$\|g\|_1 = \sup_{u \in \mathcal{L}_\infty} \frac{\|y_f\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

⁴Il significato del limite è nella norma in \mathcal{L}_2 , cioè $\|V - \int_{-T}^T v(t) e^{-j\omega t} dt\|_2 \rightarrow 0$, quando $T \rightarrow \infty$.

Lo spazio di Hardy \mathcal{H}_2 è definito dalle funzioni V di una variabile complessa s , che sono analitiche ⁵ nel semipiano destro aperto e tali che esista la norma:

$$\|V\|_2 = \left\{ \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha - j\omega)' V(\alpha + j\omega) d\omega \right\}^{1/2}$$

Lo spazio associato è indicato con il simbolo \mathcal{H}_2 . Per ogni funzione di questo spazio si ha che il limite di $V(\alpha + j\omega)$ per $\alpha \rightarrow 0$ esiste per quasi tutti i valori di ω (*Teorema di Fatou*). Possiamo allora definire

$$V_{lim}(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} V(\alpha + j\omega)$$

Inoltre la corrispondenza tra V e V_{lim} è lineare e iniettiva. Il valore superiore della norma avviene sempre per $\alpha = 0$, e quindi possiamo scrivere

$$\|V\|_2^2 = \|V_{lim}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_{lim}(-j\omega)' V_{lim}(j\omega) d\omega$$

In conclusione lo spazio \mathcal{H}_2 può essere visto come un sottospazio proprio di \mathcal{L}_2 . Inoltre \mathcal{H}_2 è isomorfo a $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ sotto la trasformazione bilatera di Laplace (*Teorema di Paley-Wiener*), definita come:

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

Per segnali definiti per $t \geq 0$ si usa la trasformata di Laplace *monolatera*

$$V(s) = \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

che è in effetti molto utilizzata nello studio dei segnali provenienti dai sistemi dinamici lineari. Tale trasformata sarà quindi denominata nel seguito trasformata di Laplace, senza ulteriori specificazioni.

Si può definire \mathcal{H}_2^\perp come il sottospazio proprio di \mathcal{L}_2 costituito dalle funzioni analitiche nel semipiano sinistro, o anche come le funzioni $V(s)$ tali che $V(-s) \in \mathcal{H}_2$. Ovviamente tale spazio è isomorfo a $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ e le sue funzioni sono ortogonali a quelle di \mathcal{H}_2 .

Una discussione a parte meritano le funzioni (vettoriali) $V(s)$ per cui

$$\|V(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \|V(j\omega)\| < \infty$$

Lo spazio di tali funzioni è normalmente indicato con il simbolo \mathcal{L}_∞ . Se $V(s)$ è inoltre analitica nel semipiano complesso destro aperto ed ivi limitata, lo spazio corrispondente è indicato con il simbolo \mathcal{H}_∞ e viene dotato della norma

$$\|V(s)\|_\infty = \sup_{\sigma > 0, \omega} \|V(\sigma + j\omega)\|$$

⁵Una funzione $V(s)$ si dice analitica in un insieme aperto e connesso Ω se per ogni $s_0 \in \Omega$ esiste finito il

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{V(s) - V(s_0)}{s - s_0}$$

Per il teorema di Fatou esiste, per quasi tutti i valori di ω , il $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} V(\sigma + j\omega)$. Indicando ancora con $V_{lim}(j\omega)$ tale limite, risulta inoltre (*Teorema del massimo modulo*)

$$\|V(s)\|_{\infty} = \text{ess sup}_{\omega} \|V_{lim}(j\omega)\|$$

Di fatto, la norma in \mathcal{L}_{∞} e in \mathcal{H}_{∞} si calcola guardando il valore superiore della norma di $V(s)$ sull'asse immaginario.

Osservazione 2.4 *Le considerazioni espresse per le norme dei segnali scalari o vettoriali viste in precedenza si possono generalizzare facilmente al caso matriciale. Se $V(s)$ è una funzione matriciale in \mathcal{L}_{∞} o in \mathcal{H}_{∞} allora*

$$\|V(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \|V(j\omega)\| < \infty$$

dove la norma della matrice è intesa essere la norma spettrale, cioè il massimo valore singolare della matrice. Infine, se $V(s)$ è una funzione matriciale in \mathcal{L}_2 o in \mathcal{H}_2 si ha:

$$\|V(s)\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [V(-j\omega)'V(j\omega)] d\omega \right\}^{1/2}$$

Capitolo 3

Fattorizzazioni

In questo capitolo affronteremo il problema della rappresentazione di una funzione di trasferimento come rapporto di opportune funzioni polinomiali o razionali. I sistemi che consideriamo sono descritti dalle equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Nel caso SISO la funzione di trasferimento $G(s)$ si può sempre scrivere come un rapporto di polinomi primi tra loro, cioè senza radici in comune. Nel caso MIMO la funzione di trasferimento è una matrice $p \times m$ di funzioni razionali proprie, cioè di rapporti di polinomi. E' evidente che è sempre possibile scrivere

$$G(s) = \frac{\bar{G}(s)}{d(s)}$$

dove $d(s)$ è il minimo comune multiplo dei polinomi al denominatore delle $p \times m$ funzioni razionali, e $\bar{G}(s)$ è una matrice polinomiale ottenuta in maniera ovvia. Questa scrittura mette in evidenza come sia possibile scrivere $G(s)$ come rapporto di matrici polinomiali. Tuttavia in generale $\bar{G}(s)$ e $d(s)I$ non godono della proprietà di essere *matrici polinomiali prime tra loro*¹. Si noti ancora che l'elemento generico (i, j) di $G(s)$ può essere scritto come il rapporto $\{n_{ij}(s)/d_j(s)\}$ dove $d_j(s)$ è il minimo comune denominatore degli elementi di $G(s)$ sulla colonna j -esima. Quindi:

$$G(s) = \{n_{ij}(s)\} \text{diag}\{d_i(s)\}^{-1} = \bar{N}(s)\bar{D}(s)^{-1}$$

¹Due matrici polinomiali $N_d(s)$ e $D_d(s)$ si dicono coprime a destra se non ammettono divisori polinomiali comuni a destra che non siano unimodulari, cioè se non esiste $\Delta(s)$ polinomiale non unimodulare tale che $N_d(s) = N_1(s)\Delta(s)$, $D_d(s) = N_2(s)\Delta(s)$, con $N_1(s)$ e $N_2(s)$ matrici polinomiali. Si può dimostrare che le due matrici polinomiali $N_d(s)$ e $D_d(s)$ sono coprime a destra se e solo se esistono due matrici polinomiali $X(s)$ e $Y(s)$ che soddisfano l'equazione diofantina $X(s)D_d(s) + Y(s)N_d(s) = I$. La definizione di coprimità a sinistra di due matrici $N_s(s)$, $D_s(s)$ è definita in modo ovvio e l'equazione diofantina diventa $D_s(s)X(s) + N_s(s)Y(s) = I$.

Attraverso operazioni elementari sulle righe della matrice polinomiale

$$\begin{bmatrix} \bar{N}(s) \\ \bar{D}(s) \end{bmatrix}$$

è possibile estrarre il più *grande comun divisore destro*² $\bar{R}(s)$ di $\bar{N}(s)$ e $\bar{D}(s)$. Quindi

$$\bar{D}(s) = D_d(s)\bar{R}(s), \quad \bar{N}(s) = N_d(s)\bar{R}(s)$$

con $N_d(s)$ e $D_d(s)$ matrici polinomiali coprime a destra. Concludendo, $G(s) = \bar{N}(s)\bar{D}(s)^{-1} = N_d(s)D_d(s)^{-1}$.

Il procedimento appena delineato mostra come sia possibile scrivere una matrice razionale come rapporto destro $G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1}$ di matrici polinomiali $N_d(s)$ e $D_d(s)$ coprime a destra, e risulta evidente come tale procedimento possa essere modificato per l'ottenimento di due matrici polinomiali coprime a sinistre $N_s(s)$ e $D_s(s)$ tali che $G(s) = D_s(s)^{-1}N_s(s)$. In conclusione:

Teorema 3.1 *Data una funzione razionale $G(s)$ è possibile scrivere*

$$G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1}, \quad G(s) = D_s(s)^{-1}N_s(s)$$

con $N_d(s)$ e $D_d(s)$ matrici polinomiali coprime a destra e $N_s(s)$ e $D_s(s)$ matrici polinomiali coprime a sinistra.

Un'altra possibile fattorizzazione della funzione di trasferimento fa riferimento all'anello delle funzioni razionali stabili, cioè con poli a parte reale negativa, piuttosto che a quello dei polinomi. Per inquadrare il problema, si consideri ancora il caso di sistemi SISO, dove la funzione di trasferimento è il rapporto di due polinomi $n(s)$ e $d(s)$, cioè $G(s) = n(s)/d(s)$. E' sempre possibile fattorizzare $d(s)$ come prodotto di due polinomi, $d_s(s)$, $d_a(s)$, con $d_s(s)$ contenente solo radici nel semipiano sinistro. Allora:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{G_1(s)}{G_2(s)}, \quad G_1(s) = \frac{n(s)}{d_s(s)\hat{d}(s)}, \quad G_2(s) = \frac{d_a(s)}{\hat{d}(s)}$$

dove $\hat{d}(s)$ è un qualunque polinomio stabile (con radici a parte reale negativa) dello stesso grado di $d_a(s)$. Le due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono stabili (hanno poli nel semipiano sinistro). Si noti che la soluzione non è unica.

Il ragionamento fatto sulle funzioni razionali può essere replicato sulle matrici razionali. Si noti che l'insieme delle funzioni razionali stabili forma un anello e quindi su tale anello è possibile definire la coprimità, come fatto per l'anello delle matrici polinomiali³. Per rendersi conto di ciò basta considerare la fattorizzazione polinomiale

²Un divisore destro di una data matrice polinomiale $N(s)$ è definito come una matrice polinomiale $R(s)$ quadrata tale che $N(s) = \bar{N}(s)R(s)$ con $\bar{N}(s)$ matrice polinomiale opportuna. Una matrice quadrata polinomiale $R(s)$ è detta essere il più grande divisore destro di due matrici polinomiali $N(s)$ e $D(s)$ con lo stesso numero di colonne se $R(s)$ è un divisore destro sia di $N(s)$ e di $D(s)$ e se, per ogni altro divisore destro $\hat{R}(s)$, risulta $R(s) = W(s)\hat{R}(s)$ con $W(s)$ polinomiale. Analoghe definizioni si possono formalizzare per un divisore sinistro e per il massimo divisore sinistro di due matrici con lo stesso numero di righe.

³Una matrice razionale propria e stabile è unimodulare se la sua inversa è ancora propria e stabile. Due matrici razionali stabili $G_d(s)$ e $G_a(s)$ si dicono coprime a destra se non ammettono divisori matriciali stabili comuni a destra che non siano unimodulari, cioè se non esiste $\Delta(s)$ matrice stabile non unimodulare tale che $G_d(s) = G_1(s)\Delta(s)$, $G_a(s) = G_2(s)\Delta(s)$, con $G_1(s)$ e $G_2(s)$ matrici razionali stabili. Si può dimostrare che le due matrici razionali stabili $G_d(s)$ e $G_a(s)$ sono coprime a destra se e solo se esistono due matrici razionali stabili $X(s)$ e $Y(s)$ che soddisfano l'equazione diofantina $X(s)D_d(s) + Y(s)N_d(s) = I$. La definizione di coprimità a sinistra di due matrici razionali stabili $G_s(s)$, $G_a(s)$ è definita in modo ovvio e l'equazione diofantina diventa $D_s(s)X(s) + N_s(s)Y(s) = I$.

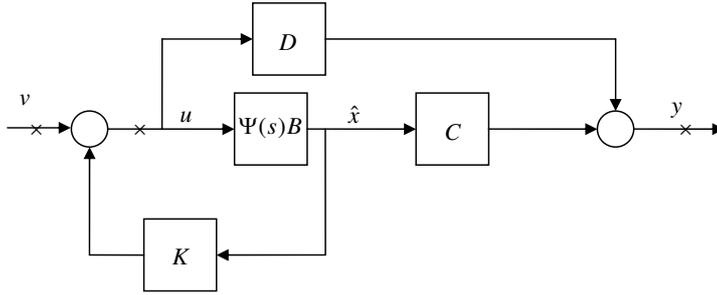


Figura 3.1: Il sistema da fattorizzare

mostrata nel Teorema 3.1 per la matrice razionale $\hat{G}(z)$ ottenuta da $G(s)$ sostituendo a s la variabile

$$z = (s + \gamma)^{-1}, \quad s = \frac{1 - \gamma z}{z}$$

con γ parametro positivo opportuno. Infatti si può scrivere $\hat{G}(z) = \hat{D}(z)^{-1}\hat{N}(z)$, con $\hat{N}(z)$ e $\hat{D}(z)$ matrici polinomiali in z coprime a sinistra. Quindi $N(s) = \hat{N}((s + \gamma)^{-1})$ e $D(s) = \hat{D}((s + \gamma)^{-1})$ risultano razionali proprie, stabili e coprime a sinistra. La stessa cosa si può fare per la coprimità a destra. Si arriva così al risultato seguente, la cui dimostrazione è alternativamente e più espressivamente condotta attraverso un procedimento nel dominio del tempo, cioè facente riferimento alla rappresentazione dei sistemi attraverso le variabili di stato.

Teorema 3.2 *Data una funzione razionale propria $G(s)$ è possibile scrivere*

$$G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1} = D_s(s)^{-1}N_s(s)$$

con $N_d(s)$ e $D_d(s)$ matrici razionali proprie e stabili coprime a destra e $N_s(s)$ e $D_s(s)$ matrici razionali proprie e stabili coprime a sinistra.

Prova. Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di $G(s)$ e si considerino le figure 3.1 e 3.2, dove $\Psi(s) = (sI - A)^{-1}$. Sia inoltre K una matrice (che esiste) tale che $A + BK$ è di Hurwitz (legge di controllo stabilizzante di Fig. 3.1 e L una matrice (che esiste) tale che $A + LC$ sia di Hurwitz (ricostruttore asintotico in Fig. ??). Siano inoltre $N_d(s)$ e $M_d(s)$ le funzioni di trasferimento dall'ingresso v alle uscite y e u , rispettivamente (Fig. 3.1), e siano $N_s(s)$ e $M_s(s)$ le funzioni di trasferimento dagli ingressi u e y all'uscita e . Queste quattro funzioni di trasferimento sono proprio quelle cercate (la verifica è lasciata al lettore) e risulta:

$$\begin{aligned} N_d(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B + D \\ D_d(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}B + I \\ N_s(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + D \\ D_s(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}L + I \end{aligned}$$

Il risultato espresso nel teorema precedente trova un significato più completo nella cosiddetta doppia fattorizzazione coprime, che sarà utile nel capitolo dedicato alla parametrizzazione dei controllori stabilizzanti.

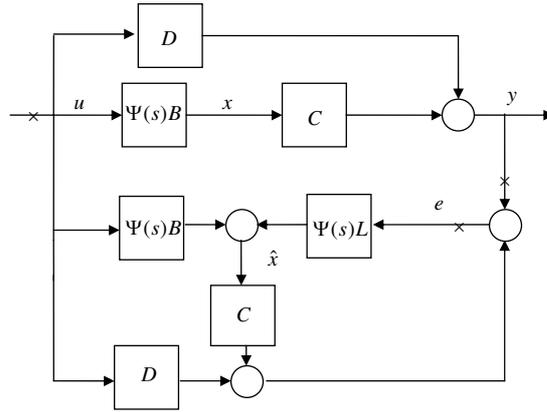


Figura 3.2: Il sistema da fattorizzare

Teorema 3.3 Sia $G(s)$ una matrice razionale propria. Allora esistono otto matrici razionali $M(s)$, $N(s)$, $\hat{M}(s)$, $\hat{N}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\hat{X}(s)$, $\hat{Y}(s)$, tutte in \mathcal{H}_∞ , tali che

a)

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s)$$

b)

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) & \hat{Y}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I$$

Le matrici $M(s)$, $N(s)$, $\hat{M}(s)$, $\hat{N}(s)$ costituiscono una doppia fattorizzazione coprima di $G(s)$.

Prova. Notiamo che il teorema implica la coprimità a destra di $M(s)$ e $N(s)$ e a sinistra di $\hat{M}(s)$ and $\hat{N}(s)$. Sia ora $G(s)$ realizzato da (A, B, C, D) e si assuma il sistema stabilizzabile e rivelabile. Siano K e L due matrici tali che $A + BK$ e $A + LC$ sono di Hurwitz. Allora (la verifica è lasciata al lettore):

$$\begin{aligned} M(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}B + I \\ N(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B + D \\ X(s) &= -(C + DK)(sI - A - BK)^{-1}L + I \\ Y(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}L \\ \hat{M}(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}L + I \\ \hat{N}(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + D \\ \hat{X}(s) &= -K(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + I \\ \hat{Y}(s) &= K(sI - A - LC)^{-1}L \end{aligned}$$

E' chiaro che esistono infinite fattorizzazioni doppie coprime di una funzione $G(s)$.

Esempio 3.1 Consideriamo la matrice razionale

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s^2 + s - 1)/(s^3 - s) & s/(s^2 - 1) \\ (2s^2 - 1)/(s^3 - s) & s^2/(s^2 - 1) \end{bmatrix}$$

che ammette come realizzazione minima la quadrupla

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scegliendo

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è facile verificare che le otto matrici di una fattorizzazione doppia coprima sono le seguenti:

$$M(s) = \begin{bmatrix} s/(s+1) & 0 \\ -s(2s+1)/(s+1)(s^2+s+1) & (s^2-1)/(s^2+s+1) \end{bmatrix}$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} (s^2+1)/(s+1)(s^2+s+1) & s/(s^2+s+1) \\ 1/(s^2+s+1) & s^2/(s^2+s+1) \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} (s^3+5s^2+s-5)/(s+1)(s^2+s+1) & 0 \\ -(9s+5)/(s^2+s+1) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} -1/(s+1) & 0 \\ (12s^2+26s+13)/(s+1)(s^2+s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} s(s-1)/(s+1)^2 & 0 \\ -(3s+1)/(s+1)^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}(s) = \begin{bmatrix} (s^2+s-1)/(s+1)^3 & s^2/(s+1)^3 \\ (2s^2+3s)/(s+1)^3 & (s^3+3s^2+s)/(s+1)^3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}(s) = \begin{bmatrix} (s^3+4s^2+7s+5)/(s+1)^3 & s/(s+1)^3 \\ (2s^2-5s-13)/(s+1)^3 & (s^3+4s^2-4s-1)/(s+1)^3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}(s) = \begin{bmatrix} -(s-1)/(s+1)^2 & 0 \\ 12s/(s+1)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui la funzione di trasferimento $G(s)$ è già stabile, cioè $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$, si può scegliere $K = 0$, $L = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned} M(s) &= \hat{M}(s) = I \\ N(s) &= \hat{N}(s) = G(s) \\ X(s) &= \hat{X}(s) = I \\ Y(s) &= \hat{Y}(s) = 0 \end{aligned}$$

3.1 Sistema aggiunto

Il *sistema aggiunto*⁴ è definito come il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= -A'\lambda(t) - C'w(t) \\ z(t) &= B'\lambda(t) + D'w(t)\end{aligned}$$

ed ha funzione di trasferimento

$$G^\sim(s) := G(-s)' = -B'(sI + A')^{-1}C' + D'$$

Si noti che un sistema è in forma minima se e solo è in forma minima il suo aggiunto e che gli zeri e poli del sistema aggiunto sono quelli del sistema di partenza cambiati di segno. In particolare, quindi se una $G(s)$ razionale e propria ha tutti i poli con parte reale positiva, allora $G^\sim(s) \in \mathcal{H}_\infty$.

3.2 Fattorizzazione canonica

Consideriamo una funzione di trasferimento scalare $G(s)$, bipropria e senza poli e zeri sull'asse immaginario, cioè $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$. Ci chiediamo allora se sia possibile scomporre $G(s)$ nel modo seguente:

$$G(s) = G_+(s)G_-(s)$$

dove $G_+(s)$ ha tutti poli e zeri in $Re(s) > 0$ e $G_-(s)$ ha tutti poli e zeri in $Re(s) < 0$. Basta una minima riflessione per scoprire che la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò sia possibile è che $G(s)$ abbia un numero di zeri con $Re(s) < 0$ uguale al numero di poli con $Re(s) < 0$, o, in altre parole, se e solo se il numero di poli di $G(s)$ è uguale alla somma del numero dei poli con parte reale positiva di $G(s)$ e il numero dei poli di $G(s)^{-1}$ con parte reale negativa. Per esempio si noti che

$$G(s) = \frac{s^2 - 2s - 3}{s^2 - 2s - 35} = \frac{s - 3}{s - 7} \frac{s + 1}{s + 5}$$

Vogliamo estendere questa fattorizzazione al caso multivariabile, considerando quindi matrici di trasferimento quadrate con $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$. Sia intanto $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ una realizzazione minima di $G(s)$, con D matrice invertibile, e sia $\hat{A} = A - BD^{-1}C$ la matrice dinamica del sistema inverso con funzione di trasferimento $G(s)^{-1}$. Infine, data una matrice quadrata V si denoti con $\mathcal{X}_-(V)$ il sottospazio formato dagli autovettori (generalizzati) di V associati agli autovalori di V con parte reale negativa e con $\mathcal{X}_+(V)$ il sottospazio formato dagli autovettori (generalizzati) di V associati agli autovalori di V con parte reale positiva. Abbiamo allora il seguente risultato:

Teorema 3.4 *Data una $G(s)$ razionale, bipropria, con $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$, è possibile scrivere $G(s) = G_+(s)G_-(s)$ con $G_-(s) \in \mathcal{H}_\infty$, $G_-(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, $G_+^\sim(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G_+^\sim(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ se e solo se i due sottospazi $\mathcal{X}_-(\hat{A})$ e $\mathcal{X}_+(A)$ sono complementari.*

⁴Se \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono due spazi di Hilbert e $\Sigma : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ un sistema lineare, allora il sistema aggiunto Σ^\sim è quel sistema lineare tale che, $\forall u_1 \in \mathcal{S}_1$ and $u_2 \in \mathcal{S}_2$, si abbia

$$\langle \Sigma u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{S}_2} = \langle u_1, \Sigma^\sim u_2 \rangle_{\mathcal{S}_1},$$

Prova. La condizione è chiaramente necessaria. La parte sufficiente si prova per costruzione. Si prendano due matrici T_1 e T_2 tali che:

$$\mathcal{X}_+(A) = \text{Im}[T_2], \quad \mathcal{X}_-(\hat{A}) = \text{Im}T_1$$

e si ponga $T^{-1} = [T_1 \ T_2]$. Poichè $\mathcal{X}_+(A)$ è A -invariante risulta

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

con A_1 e $-A_4$ Hurwitz. Inoltre sia

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = [C_1 \ C_2]$$

Si noti che essendo $\mathcal{X}_-(\hat{A})$ un sottospazio \hat{A} -invariante si ha $A_3 = B_2D^{-1}C_1$ e inoltre $A_1 - B_1D^{-1}C_1$ Hurwitz e $-A_4 + B_2D^{-1}C_2$ Hurwitz. Queste considerazioni permettono immediatamente di concludere che la fattorizzazione cercata è:

$$G_+(s) = C_2(sI - A_4)^{-1}B_2 + D, \quad G_-(s) = D^{-1}C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + I$$

3.3 La matrice Hamiltoniana

La matrice Hamiltoniana è una matrice quadrata $2n \times 2n$ del tipo

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A' \end{bmatrix}$$

dove A , Q e R sono matrici reali quadrate e Q e R sono simmetriche. Si noti che lo spettro di H è simmetrico rispetto all'asse immaginario (oltre che all'asse reale), in quanto

$$HJ + JH' = 0$$

dove J è la matrice simplettica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Si denoti con \mathcal{L}_0 il sottospazio

$$\mathcal{L}_0 = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Teorema 3.5 *Si assuma che R sia semidefinita positiva o negativa, che H non abbia autovalori sull'asse immaginario e che (A, R) sia una coppia stabilizzabile. Allora i sottospazi $\mathcal{X}_-(H)$ e \mathcal{L}_0 sono complementari, ed esiste una soluzione simmetrica P dell'equazione di Riccati*

$$A'P + PA - PRP + Q = 0$$

tale che $A - RP$ è di Hurwitz.

Prova Per ipotesi, la matrice hamiltoniana H ha n autovalori con parte reale negativa e n con parte reale positiva. Allora $\mathcal{X}_-(H)$ ha dimensione n ed è possibile trovare una matrice $2n \times n$ di rango n

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

tale che $\mathcal{X}_-(H) = \text{Im}T$. Quindi

$$HT = T\bar{A}$$

dove \bar{A} è una matrice di Hurwitz. Per la complementarità di \mathcal{L}_0 e $\mathcal{X}_-(H)$ basta e occorre che T_1 sia invertibile. A tale scopo si scriva $HT = T\bar{A}$ nel modo seguente:

$$AT_1 + RT_2 = T_1\bar{A}, \quad -QT_1 - A'T_2 = T_2\bar{A}$$

Si noti che

$$(T^*JT)\bar{A} = \bar{A}'(T^*JT)$$

e quindi, dal momento che \bar{A} e $-\bar{A}$ hanno spettri disgiunti si ha $T^*JT = 0$, cioè

$$T_1^*T_2 = T_2^*T_1$$

Si ha allora:

$$T_2^*A'T_2 + T_1^*QT_1 + T_2^*AT_1 + T_2^*RT_2 = 0$$

Se, per assurdo, si avesse $T_1x = 0$ con $x \neq 0$ allora, da questa equazione, $RT_2x = 0$ e da quella precedente $T_1\bar{A}x = 0$ e $A'T_2x = -T_2\bar{A}x$. Per induzione allora si ha:

$$T_1\hat{\nu}(\bar{A})x = 0, \quad A'T_2\hat{\nu}(\bar{A})x = -T_2\bar{A}\hat{\nu}(\bar{A})x, \quad RT_2\hat{\nu}(\bar{A})x = 0$$

per ogni matrice polinomiale $\hat{\nu}(\cdot)$ di \bar{A} . Sia allora $\nu_m(\cdot)$ il polinomio monico di grado minimo tale che $\nu_m(\bar{A})x = 0$ e sia $\nu_m(\bar{A}) = (\lambda I - \bar{A})\bar{\nu}(\bar{A})$. Naturalmente, per la minimalità di $\nu_m(\cdot)$ risulta $y = \bar{\nu}(\bar{A})x \neq 0$. Inoltre, essendo $\bar{A}y = \lambda y$ e \bar{A} di Hurwitz, si ha che λ ha parte reale minore di zero. In conclusione si ha:

$$A'T_2y = -\lambda T_2y, \quad RT_2y = 0, \quad \text{Re}(-\lambda) > 0$$

che implica, grazie alla stabilizzabilità di (A, R) che $T_2x = 0$. D'altra parte, quest'ultima conclusione, insieme a $T_1y = 0$ viola la n -dimensionalità del sottospazio $\text{Im}[T]$. Ponendo $P = T_2^{-1}T_1$ si ha poi che P soddisfa l'equazione di Riccati. Tale soluzione P risulta hermitiana. Infatti

$$P^* = (T_2T_1^{-1})^* = (T_1^{-1})^*T_2^* = (T_1^{-1})^*T_1^*T_2T_1^{-1} = T_2T_1^{-1} = P$$

Infine P è reale in quanto i vettori di T sono complessi coniugati e quindi indicando con T_c la matrice coniugata di T si ha che $T_c = T\Gamma$ dove Γ è una matrice di permutazione. Allora $P = T_2T_1^{-1} = T_2\Gamma(T_1\Gamma)^{-1} = P_c$ dove P_c è il coniugato di P . Quindi P è reale. Infine $A - RP = (AT_1 - RT_2)T_1^{-1} = T_1\bar{A}T_1^{-1}$ e quindi $A - RP$ è simile a \bar{A} ed è quindi Hurwitz.

3.4 Fattorizzazione e equazione di Riccati

Consideriamo lo schema serie in Figura 3.3 dove R è una matrice simmetrica. Una rappresentazione di stato del sistema serie $G^\sim(s)RG(s)$ si ottiene facilmente prendendo le equazioni di $G(s)$ e quelle del sistema aggiunto $G^\sim(s)$ e ponendo $\hat{y} = Ry$. Si ha:

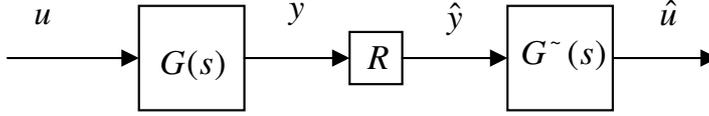


Figura 3.3: Il sistema da fattorizzare

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -C'RCx(t) - A'\lambda(t) - C'RDu(t) \\ \hat{u}(t) &= D'RCx(t) + B'\lambda(t) + D'RDu(t)\end{aligned}$$

Supponendo l'invertibilità di $D'RD$ è possibile scrivere il sistema inverso $(G^\sim(s)RG(s))^{-1}$ e risulta:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - B(D'RD)^{-1}D'RC)x(t) - B(D'RD)^{-1}B'\lambda(t) + B(D'RD)^{-1}\hat{u}(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -(C'RC - C'RD(D'RD)^{-1}D'RC)x(t) - (A - B(D'RD)^{-1}D'RC)'\lambda(t) \\ &\quad - C'RD(D'RD)^{-1}\hat{u}(t) \\ u(t) &= (D'RD)^{-1}(\hat{u}(t) - D'RCx(t) - B'\lambda(t))\end{aligned}$$

la cui matrice dinamica H è hamiltoniana e risulta

$$H = \begin{bmatrix} A - B(D'RD)^{-1}D'RC & -B(D'RD)^{-1}B' \\ -C'RC + C'RD(D'RD)^{-1}D'RC & -(A - B(D'RD)^{-1}D'RC)' \end{bmatrix}$$

Si noti che la stabilizzabilità di $A - B(D'RD)^{-1}D'RC, B(D'RD)^{-1}B'$ è equivalente alla stabilizzabilità di (A, B) . Supponiamo ora che esista la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati

$$(A - B(D'RD)^{-1}D'RC)'P + P(A - B(D'RD)^{-1}D'RC) - PB(D'RD)^{-1}B'P + C'RC - C'RD(D'RD)^{-1}D'RC = 0$$

che si può analogamente scrivere nel modo seguente:

$$A'P + PA - (PB + C'RD)(D'RD)^{-1}(PB + C'RD)' + C'RC = 0 \quad (3.1)$$

Notiamo ora che

$$-(A'P + PA) = (-sI - A')P + P(sI - A), \quad \forall s$$

Quindi, ponendo $\Psi(s) = (sI - A)^{-1}$, moltiplicando l'equazione di Riccati a sinistra per $\Psi^\sim(s)$ e a destra per $\Psi(s)$, dopo alcuni passaggi

$$G^\sim(s)RG(s) = T^\sim(s)D'RD T(s) \quad (3.2)$$

con

$$T(s) = I + (B'P + D'RC)\Psi(s)B(D'RD)^{-1}$$

Si noti che

$$T(s)^{-1} = I - (D'RD)^{-1}(B'P + D'RC)(sI - A + B(D'RD)^{-1}D'RC)^{-1}B'$$

risulta in \mathcal{H}_∞ grazie al fatto che P è soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati. In sostanza, il sistema $G(s)$ e il sistema $DT(s)$ hanno lo stesso R -spettro, cioè vale l'equazione (3.2), con la differenza che $G(s)$ può non essere quadrata e che $T(s)D$ ha inversa stabile.

3.4.1 Fattorizzazione R -spettrale

Il problema che affrontiamo in questa sezione è il seguente. Assumiamo di avere una funzione razionale (quadrata) che gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\Gamma(s) \in \mathcal{L}_\infty$
- (ii) $\Gamma(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$
- (iii) $\det \Gamma(\infty) \neq 0$
- (iv) $\Gamma(s) = \Gamma^\sim(s)$

In parole povere, $\Gamma(s)$ è autoaggiunta, senza poli e zeri sull'asse immaginario esteso. Il problema è quello di rivacare una funzione quadrata $G_o(s)$ che goda delle proprietà:

- (a) $G_o(s) \in \mathcal{H}_\infty$
- (b) $G_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$
- (c) $G_o^\sim(s)RG_o(s) = \Gamma(s)$

dove la matrice simmetrica R ha la stessa inerzia di $\Gamma(\infty)$. Una tale funzione $G_o(s)$ sarà chiamata *fattore R -spettrale canonico*.

Poichè $\Gamma(s)$ è in \mathcal{L}_∞ , non ha poli sull'asse immaginario, possiamo scrivere

$$\Gamma(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s) + D$$

dove $\Gamma_1(s)$ e $\Gamma_2^\sim(s)$ sono in \mathcal{H}_∞ e sono strettamente proprie. Da $\Gamma(s) = \Gamma^\sim(s)$ risulta

$$\Gamma_1(s) - \Gamma_2^\sim(s) = \Gamma_1^\sim(s) - \Gamma_2(s) = (\Gamma_1(s) - \Gamma_2^\sim(s))^\sim$$

Poichè $\Gamma_1(s) - \Gamma_2^\sim(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si ha (Teorema di Liouville)

$$\Gamma_1(s) = \Gamma_2^\sim(s)$$

Quindi

$$\Gamma(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_1^\sim(s) + D$$

Allora se $\Gamma_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1$, la matrice dinamica di $\Gamma(s)^{-1}$ è:

$$H = \begin{bmatrix} A_1 - B_1D^{-1}C_1 & -B_1D^{-1}B_1' \\ C_1'D^{-1}C_1 & -A_1' - C_1'D^{-1}B_1' \end{bmatrix}$$

Si noti che H non ha autovalori sull'asse immaginario e che la coppia $(A_1 - B_1 D^{-1} C_1, B_1 D^{-1} B_1')$ è stabilizzabile in quanto A_1 è Hurwitz. Tuttavia, $B_1 D^{-1} B_1'$ non è in generale positiva o negativa semidefinita. Si supponga allora che esista la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati

$$(A_1 - B_1 D^{-1} C_1)' P + P(A_1 - B_1 D^{-1} C_1) - P B_1 D^{-1} B_1' P - C_1' D^{-1} C_1 = 0$$

cioè tale che

$$\hat{A} = A_1 - B_1 D^{-1} (C_1 + B_1' P)$$

è Hurwitz. Si noti che l'equazione di Riccati si può anche riscrivere nel modo seguente:

$$A_1' P + P A_1 = (C_1' + P B_1) D^{-1} (C_1 + B_1' P) \quad (3.3)$$

Lo spettro generalizzato $\Gamma(s)$ si può scrivere come:

$$\Gamma(s) = \bar{D} + \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1' \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ -C_1' \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C_1 \quad B_1'], \quad \bar{D} = D$$

Definiamo la matrice di cambio di base:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix}$$

dove P soddisfa l'equazione di Riccati. Allora $\Gamma(s) = \tilde{D} + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$, con:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T \bar{A} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -(C_1' + P B_1) D^{-1} (C_1' + P B_1)' & -A_1' \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= T \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ -C_1' - P B_1 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \bar{C} T^{-1} = [C_1 + B_1' P \quad B_1'] \\ \tilde{D} &= \bar{D} \end{aligned}$$

Il sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ è un sistema costituito dalla serie di $G_o(s)$, R e $G_o^\sim(s)$, cioè $\Gamma(s) = G_o^\sim(s) R G_o(s)$ con

$$G_o(s) = X(I + D^{-1}(C_1 + B_1' P)(sI - A_1)^{-1} B_1), \quad X' R X = D$$

Il fattore R -spettrale canonico è proprio $G_o(s)$ ⁵. Si noti che $G_o(s) \in \mathcal{H}_\infty$ in quanto A_1 è Hurwitz e inoltre $G_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, poichè

$$G_o(s)^{-1} = (I - D^{-1}(C_1 + B_1' P)(sI - \hat{A})^{-1} B_1) X^{-1}$$

e \hat{A} è di Hurwitz.

Quanto detto si può riassumere nel seguente risultato.

⁵A questo fattore si può arrivare direttamente dalla (3.3). Infatti moltiplicando a destra per $(sI - A_1)^{-1} B_1$ e a sinistra per $B_1' (-sI - A_1')^{-1}$ si ha, dopo qualche passaggio,

$$(I + B_1' (-sI - A_1')^{-1} (C_1' + P B_1) D^{-1}) D (I + D^{-1} (C_1 + B_1' P) (sI - A_1)^{-1} B_1) = \Gamma_1(s) + \Gamma_1^\sim(s) + D$$

e quindi $G_o^\sim(s) R G_o(s) = \Gamma(s)$, con $X' R X = D$.

Teorema 3.6 *Si consideri $\Gamma(s)$ che gode delle proprietà (i) – (iv) e si supponga che esista la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati (3.3). Allora il fattore $G_0(s)$ R spettrale canonico è:*

$$G_0(s) = X(I + D^{-1}(C_1 + B_1'P)(sI - A_1)^{-1}B_1), \quad X'RX = D$$

■

La ricerca di un fattore spettrale canonico risulta facilitata se si ha a disposizione un fattore spettrale $G(s)$ già stabile, cioè tale che $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G^\sim(s)RG(s) = \Gamma(s)$. Si tratta quindi di ricavare $G_0(s)$ a fase minima direttamente da $G(s)$ in modo tale che

$$G_0^\sim(s)D'RDG_0(s) = G^\sim(s)RG(s)$$

Se dunque

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

la matrice della dinamica di $\Gamma(s)^{-1}$ risulta

$$H = \begin{bmatrix} A - B(D'RD)^{-1}D'RC & -B(D'RD)^{-1}B' \\ -C'R(I - D(D'RD)^{-1}D'R)C & -A' - C'RD(D'RD)^{-1}B' \end{bmatrix}$$

e il fattore spettrale canonico diventa

$$G_0(s) = I + (D'RD)^{-1}(D'RC + B'P)(sI - A)^{-1}B$$

dove P risolve l'equazione

$$0 = A'P + PA - (C'RD + PB)(D'RD)^{-1}(D'RC + B'P) + C'RC$$

ed è tale che

$$\hat{A} = A - B(D'RD)^{-1}(D'RC + B'P)$$

è Hurwitz. Si noti che tale equazione coincide con l'equazione (3.1) ricavata per il sistema in Fig. 3.3.

3.4.2 Fattorizzazione spettrale

Lo spettro di potenza di un segnale è sovente definito come il modulo al quadrato della sua trasformata di Fourier. Pensando all'uscita di un sistema SISO alimentato da un impulso, lo spettro dell'uscita è dunque $\|G(j\omega)\|^2$. Per estensione definiamo lo spettro di un sistema con matrice di trasferimento $G(s)$ la funzione $\Gamma(s) = G^\sim(s)G(s)$ ⁶. Tale funzione gode della proprietà $\Gamma(s) = \Gamma^\sim(s)$ e $\Gamma(\infty) \geq 0$. Il problema della fattorizzazione spettrale consiste nel determinare una funzione $G(s)$ con certe proprietà a partire dallo spettro dato $\Gamma(s)$. In particolare, si tratta di ricavare una funzione quadrata

$$G_o(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$$

tale che

$$G_o^\sim(s)G_o(s) = \Gamma(s)$$

Una tale funzione $G_o(s)$ sarà chiamata *fattore spettrale canonico*.

⁶In verità pensando ai processi stocastici stazionari lo spettro sarebbe meglio definito come $G(s)G^\sim(s)$

Teorema 3.7 Ogni funzione $\Gamma(s)$ tale che

$$\Gamma(s) \in \mathcal{L}_\infty, \quad \Gamma(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty, \quad \Gamma(s) = \Gamma^\sim(s), \quad \Gamma(\infty) > 0$$

ammette un fattore spettrale canonico.

Prova. La prova è costruttiva e può essere ricondotta a quella relativa alla dimostrazione del Teorema 3.6. La matrice Hamiltoniana in questo caso diventa:

$$H = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D^{-1} C_1 & -B_1 D^{-1} B_1' \\ C_1' D^{-1} C_1 & -A_1' - C_1' D^{-1} B_1' \end{bmatrix}$$

Si noti che H non ha autovalori sull'asse immaginario, che $B_1 D^{-1} B_1'$ è positiva semi-definita e che la coppia $(A_1 - B_1 D^{-1} C_1, B_1 D^{-1} B_1')$ è stabilizzabile in quanto A_1 è Hurwitz. Allora, grazie al Teorema 3.5, esiste una soluzione dell'equazione di Riccati

$$(A_1 - B_1 D^{-1} C_1)' P + P(A_1 - B_1 D^{-1} C_1) - P B_1 D^{-1} B_1' P - C_1' D^{-1} C_1 = 0$$

tale che

$$\hat{A} = A_1 - B_1 D^{-1} (C_1 + B_1' P)$$

è Hurwitz. Si noti che l'equazione di Riccati si può anche riscrivere nel modo seguente:

$$A_1' P + P A_1 = (C_1' + P B_1) D^{-1} (C_1 + B_1' P)$$

Quindi

$$G_o(s) = D^{-1/2} (C_1 + B_1' P) (sI - A_1)^{-1} B_1 + D^{1/2}$$

è il fattore spettrale canonico cercato. ■

La ricerca di un fattore spettrale canonico risulta facilitata se si ha a disposizione un fattore spettrale $G(s)$ già stabile, cioè tale che $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G^\sim(s)G(s) = \Gamma(s)$. Si tratta di ricavare $G_o(s)$ a fase minima direttamente da $G(s)$ in modo tale che

$$G_o^\sim(s)G_o(s) = G^\sim(s)G(s)$$

Se

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

la matrice della dinamica di $\Gamma(s)^{-1}$ risulta

$$H = \begin{bmatrix} A - B(D'D)^{-1}D'C & -B(D'D)^{-1}B' \\ -C'(I - D(D'D)^{-1}D'C) & -A' - C'D(D'D)^{-1}B' \end{bmatrix}$$

e il fattore spettrale canonico diventa

$$G_o(s) = (D'D)^{-1/2} (D'C + B'P) (sI - A)^{-1} B + (D'D)^{1/2}$$

dove P risulta essere semidefinita positiva, risolve l'equazione ⁷

$$0 = A'P + PA - (C'D + PB)(D'D)^{-1}(D'C + B'P) + C'C \quad (3.4)$$

ed è tale che

$$\hat{A} = A - B(D'D)^{-1}(D'C + B'P)$$

è Hurwitz. Si noti che tale equazione coincide con l'equazione (3.1) ricavata per il sistema in Fig. 3.3, ponendo $R = I$.

⁷Questa equazione è l'equazione standard di Riccati del Controllo Ottimo in \mathcal{H}_2 , come vedremo in seguito.

3.4.3 Fattorizzazione J -spettrale

Riprendiamo ora quanto fatto nella sezione precedente per estendere il risultato alla cosiddetta fattorizzazione J -spettrale che ricopre un ruolo importante nel controllo (e filtraggio) in \mathcal{H}_∞ . Il termine J -spettrale è dovuto al fatto che si considera uno spettro generalizzato ⁸ $\Gamma(s)$ con la proprietà che $\Gamma(\infty)$ non sia definita in segno ma sia una matrice simmetrica con autovalori non nulli. Quindi $\Gamma(\infty)$ ha la stessa inerzia della matrice

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

dove le matrici identità hanno dimensione opportune (anche diverse tra di loro).

Si tratta dunque di ricavare una funzione quadrata

$$G_o(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$$

tale che

$$G_o^\sim(s) J G_o(s) = \Gamma(s)$$

Tale funzione $G_o(s)$ sarà chiamata *fattore J -spettrale canonico*. Naturalmente, la conclusione di questo problema combacia con quella della fattorizzazione R -spettrale con $R = J$. Quindi

Teorema 3.8 *Si consideri $\Gamma(s)$ che gode delle proprietà (i) – (iv) e si supponga che $\Gamma(\infty)$ abbia la stessa inerzia di J . Se esiste la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati (3.3), il fattore $G_0(s)$ J -spettrale canonico è:*

$$G_o(s) = X(I + D^{-1}(C_1 + B_1'P)(sI - A_1)^{-1}B_1), \quad X' J X = D$$

■

La ricerca di un fattore J -spettrale canonico è semplice se si ha a disposizione un fattore J -spettrale $G(s)$ già stabile, cioè tale che $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G^\sim(s) J G(s) = \Gamma(s)$. Si tratta dunque di ricavare $G_0(s)$ a fase minima direttamente da $G(s)$, in modo tale che

$$G_0^\sim(s) D' J D G_0(s) = G^\sim(s) J G(s)$$

Quindi, se si scrive

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathcal{H}_\infty$$

il fattore J -spettrale canonico diventa

$$G_0(s) = I + (D' J D)^{-1} (B' P + D' J C) (sI - A)^{-1} B$$

dove P è la soluzione stabilizzante dell'equazione

$$A' P + P A - (P B + C' J D) (D' J D)^{-1} (P B + C' J D)' + C' J C = 0$$

cioè tale che

$$\hat{A} = A - B (D' J D)^{-1} (D' J C + B' P)$$

è Hurwitz. Si noti che tale equazione coincide con l'equazione (3.1) ricavata per il sistema in Fig. 3.3, ponendo $R = J$.

⁸Spettro nello spazio di Krein

3.5 Sistemi all pass e fattorizzazione Inner-Outer

La funzione di trasferimento di un sistema *passa tutto* (all-pass, lossless) ha la seguente proprietà:

$$G^\sim(s)G(s) = I \quad (3.5)$$

Ad esempio, nel caso scalare, una funzione passa tutto è:

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

La ragione della denominazione "passa tutto" è nel fatto che (si pensi al caso scalare), il modulo di $G(j\omega)$ è costante su tutte le frequenze, e quindi il sistema si comporta come un filtro che non attenua né amplifica le armoniche del segnale di ingresso su tutte le frequenze. Si noti che se $G(s)$ è quadrata di rango massimo, allora $G^\sim(s) = G^{-1}(s)$ e $G(s)G^\sim(s) = I$. Il teorema seguente caratterizza i sistemi passa tutto.

Teorema 3.9 *Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e supponiamo che esista una matrice simmetrica P tale che*

$$\begin{aligned} A'P + PA + C'C &= 0 \\ D'C + B'P &= 0 \\ D'D &= I \end{aligned}$$

Allora $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ ed è una funzione passa tutto. Se in più $P \geq 0$ allora $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$.

Prova. Si definisca $\Psi(s) = (sI - A)^{-1}$. Dalla prima equazione si ha:

$$\Psi^\sim(s)C'C\Psi(s) = \Psi^\sim(s)P + P\Psi(s)$$

e quindi

$$\begin{aligned} G^\sim(s)G(s) &= [B'\Psi^\sim(s)C' + D'] [C\Psi(s)B + D] \\ &= D'D + (D'C + B'P)\Psi(s)B + B'\Psi^\sim(s)(C'D + PB) \\ &= I \end{aligned}$$

col che $G(s)$ è passa tutto. Assumiamo per assurdo che la matrice A abbia un autovalore con parte reale nulla, cioè $Ax = j\omega x$ per qualche $x \neq 0$ e qualche ω . Allora, dalla prima equazione si ha $0 = x^*(A'P + PA + C'C)x = x^*C'Cx$, e quindi $Ax = j\omega x$ con $Cx = 0$ viola l'osservabilità della coppia (A, C) . Quindi $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$. Se $P \geq 0$, dalla prima equazione, e con lo stesso ragionamento, segue che ogni autovalore di A con parte reale non negativa è non osservabile. Quindi $G(s)$ (che è la funzione di trasferimento della parte raggiungibile ed osservabile) non ha poli con parte non negativa e risulta $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$. ■

Una funzione $G(s)$ tale che $G(s)G^\sim(s) = I$ si dirà essere co-inner e, per tali funzioni, vale un teorema analogo a quello formulato precedentemente può essere. Per estensione anche funzioni tali che $G^\sim(s)G(s)$ o $G(s)G^\sim(s)$ siano costanti vengono chiamate inner o co-inner, rispettivamente. Ad esempio, si considerino le fattorizzazione coprime definita nel Teorema 3.2, cioè $G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1} = D_s(s)^{-1}N_s(s)$, dove, in particolare

$$\begin{aligned} N_d(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B + D \\ N_s(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + D \end{aligned}$$

e K e L sono guadagni che stabilizzano $A + BK$ e $A + LC$, rispettivamente. Se prendiamo

$$K = -(D'D)^{-1}(D'C + B'P)$$

dove P è la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati standard (3.4), allora si ha che $N_d(s)$ è inner, nel senso che $N_d^\sim(s)N_d(s) = D'D$. Viceversa, se

$$L = -(SC + BD')(DD')^{-1}$$

con S soluzione stabilizzante di ⁹

$$AS + SA' - (SC' + BD')(DD')^{-1}(SC' + BD')' + BB' = 0$$

allora $N_s(s)$ è co-inner, nel senso che $N_s(s)N_s^\sim(s) = DD'$. Si lascia al lettore verificare che il sistema che ha come funzione di trasferimento $N_d(s)$ soddisfa le condizioni, opportunamente modificate dalla presenza di $D' \neq I$, del Teorema 3.9. Identiche considerazioni valgono per $N_s(s)$.

Una funzione passa tutto $G(s)$ ha la ovvia proprietà che $\|G(s)F(s)\|_\infty = \|G(s)\|_\infty$ per ogni funzione $F(s) \in \mathcal{L}_\infty$. Una funzione passa tutto in $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si dice essere *inner*. Al contrario, una funzione $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si dice essere *outer* se ha un'inversa destra analitica in $Re(s) > 0$ (se ha rango pieno per righe per ogni $Re(s) > 0$). Una funzione outer ha dunque un numero di righe non superiore al numero di colonne. Se la matrice è quadrata, allora è outer se $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$. Il concetto di funzione outer generalizza quindi il concetto di sistemi SISO a sfasamento minimo. Un'altra possibile caratterizzazione di funzione $G(s) = [G_1(s) \ G_2(s)] \in \mathcal{H}_\infty$ outer è che $G_1(s)$ e $G_2(s)$ siano coprime a sinistra in \mathcal{H}_∞ .

La fattorizzazione inner-outer di una funzione $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$, consiste nel ricavare $G_i(s)$ e $G_o(s)$ in modo tale che

$$G(s) = G_i(s)G_o(s)$$

con $G_i(s)$ inner e $G_o(s)$ outer. Nel caso in cui $G(s)$ è scalare, bipropria, senza zeri sull'asse immaginario, è molto facile ricavare la fattorizzazione inner-outer. Per esempio,

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{(s+2)(s+3)} = G_i(s)G_o(s), \quad G_i(s) = \frac{1-s}{1+s}, \quad G_o(s) = -\frac{(1+s)(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

Anche nel caso in cui $G(j\omega)$ ha rango pieno per colonne per ogni ω tra 0 e ∞ , una fattorizzazione inner outer si trova prendendo $G_o(s)$ coincidente con il fattore spettrale canonico di $G^\sim(s)G(s)$ (che è stabile con inversa stabile) e ponendo poi $G_i(s) = G(s)G_o(s)^{-1}$. Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} G_i(s)G_o(s) &= G(s)G_o(s)^{-1}G_o(s) = G(s) \\ G_i^\sim(s)G_i(s) &= G_o^\sim(s)^{-1}G^\sim(s)G(s)G_o(s)^{-1} = G_o^\sim(s)^{-1}G_o^\sim(s)G_o(s)G_o(s)^{-1} = I \end{aligned}$$

Il caso in cui $G(j\omega)$ ha rango costante, diciamo r , per ogni ω tra 0 e ∞ , è più complicato. Intanto si scriva:

$$G(s) = H(s) \begin{bmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K(s)$$

⁹Questa è l'equazione di Riccati standard per il filtro di Kalman.

con $G_1(s) \in \mathcal{H}_\infty$ biproprria con $G_1(j\omega)$ di rango costante r per ogni ω tra 0 e ∞ . Inoltre $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $K(s) \in \mathcal{H}_\infty$ sono biproprrie con $H(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, $K(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$. Si definisca ora:

$$F(s) = H(s) \begin{bmatrix} G_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$, $F^\sim(s)F(s) \in \mathcal{L}_\infty$, $F^\sim(\infty)F(\infty) > 0$. Quindi possiamo trovare un fattore spettrale canonico $F_o(s)$ di $F^\sim(s)F(s)$ e definire

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \begin{bmatrix} F_o(s) & 0 \end{bmatrix} K(s) \\ G_i(s) &= F(s)F_o(s)^{-1} \end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} G_i(s)G_o(s) &= F(s)F_o(s)^{-1} \begin{bmatrix} F_o(s) & 0 \end{bmatrix} K(s) = \begin{bmatrix} F(s) & 0 \end{bmatrix} K(s) = G(s) \\ G_i^\sim(s)G_i(s) &= F_o^\sim(s)^{-1}F^\sim(s)F(s)F_o(s)^{-1} = F_o^\sim(s)^{-1}F_o^\sim(s)F_o(s)F_o(s)^{-1} = I \end{aligned}$$

Si noti che $G_o(s)$ ha inversa destra analitica in $Re(s) \geq 0$, in quanto $K(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, $F_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ e

$$G_o(s)K^{-1}(s) \begin{bmatrix} F_o(s)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = I$$

3.6 Passività

La nozione di passività di un sistema nasce da considerazioni prese dalla teoria dei circuiti. Consideriamo infatti l'impedenza $Z(s)$ di un circuito passivo che mappa il vettore delle correnti di porta i al vettore delle tensioni di porta v . La passività (stretta) del circuito implica che l'energia consumata in un intervallo $[0 T]$ sia positiva per ogni corrente non nulla (non viene prodotta energia), cioè

$$\int_0^T i(t)v(t)'dt > 0, \quad \forall i(\cdot) \neq 0$$

Prendendo T arbitrariamente grande e valutando l'espressione nel dominio delle frequenze si ha, per un certo numero positivo ϵ :

$$Z(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad Z(j\omega) + Z(-j\omega)' \geq 2\epsilon I$$

che è la condizione di stretta positività reale che abbiamo già incontrato nel Capitolo 1. Seguendo l'analogia dei circuiti passivi, la passività di un sistema dinamico risulta di facile definizione. Precisamente, un sistema dinamico $\Sigma : \mathcal{L}_{2e} \rightarrow \mathcal{L}_{2e}$ si dice essere *strettamente passivo* se esiste un numero positivo ϵ tale che

$$\langle Pu - Pw, u - w \rangle_{[0,T]} \geq \epsilon \|u - w\|_{2,[0,T]}^2, \quad \forall u, w \in \mathcal{L}_2[0, T], \quad \forall T$$

Se ϵ può essere posto uguale a zero, allora il sistema si dirà essere passivo. Come abbiamo visto per l'impedenza di un circuito, per i sistemi quadrati (stesso numero di ingressi e uscite) lineari e invarianti nel tempo la condizione di passività si formula attraverso la positività reale della funzione di trasferimento $G(s)$, e quindi il sistema è passivo se

$$G(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G(-j\omega)' + G(j\omega) \geq 0, \quad \forall \omega$$

ed è strettamente passivo se

$$G(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G(-j\omega)' + G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

Questa condizione può essere verificata nel modo seguente.

Teorema 3.10 *Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di funzione razionale propria quadrata $G(s)$. Tale funzione è strettamente positiva reale se e solo se esiste una matrice simmetrica P che soddisfa la disequazione lineare matriciale*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -D - D' \end{bmatrix} < 0$$

Prova. Supponiamo che tale P esista. Allora, per il lemma di Schur si ha:

$$\begin{aligned} D + D' &> 0 \\ A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) &< 0 \end{aligned}$$

Quindi, ponendo $\Psi = (j\omega I - A)^{-1}$, segue che

$$\Psi \sim P + P\Psi - \Psi \sim (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi > 0$$

Moltiplicando a destra per B e a sinistra per B' abbiamo:

$$B'\Psi \sim PB + B'P\Psi B - B'\Psi \sim (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi B \geq 0$$

Poichè $G(j\omega) = C\Psi B + D$ si ha:

$$\begin{aligned} B'\Psi \sim (PB - C') + (B'P - C)\Psi B + G(j\omega) + G(j\omega) \sim -D - D' \\ \geq B'\Psi \sim (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi B \end{aligned}$$

e quindi ponendo $F = ((D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi B - I)$ si ha

$$G(j\omega) + G(j\omega) \sim \geq F \sim (D + D')F > 0$$

Viceversa, si supponga che $G(j\omega) + G(j\omega) \sim > 0$ col che $D + D' > 0$. Mostriamo che la matrice hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A - B(D + D')^{-1}C & B(D + D')^{-1}B' \\ C'(D + D')^{-1}C & -A' - C'(D + D')^{-1}B' \end{bmatrix}$$

non ha autovalori sull'asse immaginario. Infatti, si assuma per assurdo che $Hx = j\omega x$, con $x = [x_1' \ x_2']' \neq 0$. Allora, ponendo $\Psi = (j\omega I - A)^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \Psi B(D + D')^{-1}r \\ x_2 &= \Psi \sim C'(D + D')^{-1}r \\ r &= B'x_2 - Cx_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$(G(j\omega) + G(-j\omega)') (D + D')^{-1}r = 0$$

il che implica, in base all'ipotesi, $r = 0$ e quindi $x_1 = x_2 = 0$ il che è assurdo. Grazie allora al Teorema 3.5, fissata una matrice Q definita positiva, esiste una soluzione dell'equazione di Riccati

$$\begin{aligned} 0 &= (A - B(D + D')^{-1}C)'P + P(A - B(D + D')^{-1}C) + \\ &+ PB(D + D')^{-1}B'P + C'(D + D')^{-1}C + Q \end{aligned}$$

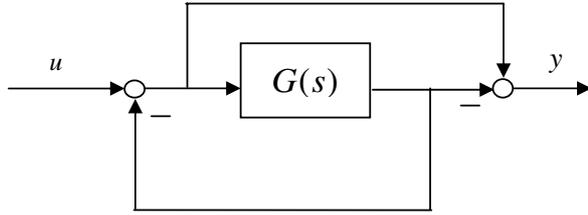


Figura 3.4: Il sistema retroazionato per la passività

che coincide con

$$A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) = -Q < 0$$

In conclusione

$$\begin{aligned} D + D' &> 0 \\ A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) &< 0 \end{aligned}$$

col che il teorema è dimostrato. ■

Per la stretta passività, la funzione di trasferimento deve appartenere a \mathcal{H}_∞ , oltre ad essere strettamente positiva reale. Quindi, nel teorema precedente basta richiedere che P sia positiva definita.

Teorema 3.11 *Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di una funzione razionale propria quadrata $G(s)$. Il sistema è strettamente passivo se e solo se esiste una matrice simmetrica definita positiva P che soddisfa la disequazione lineare matriciale*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -D - D' \end{bmatrix} < 0$$

La proprietà di passività e di limitatezza della norma \mathcal{H}_∞ sono legate nel modo seguente. Si consideri il sistema retroazionato in Figura 3.4 e si noti che la funzione di trasferimento da u a y è

$$F(s) = (I - G(s))(I + G(s))^{-1}$$

Allora vale il risultato seguente.

Teorema 3.12 *Sia (A, B, C, I) una realizzazione minima di $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Il sistema (A, B, C, I) è strettamente passivo se e solo se $F(s)$ ha norma infinita minore di uno.*

Prova. La funzione di trasferimento da u a y , cioè $F(s)$ si può scrivere come è:

$$F(s) = (I - G(s))(I + G(s))^{-1} = -\hat{C}(sI - A + \hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}, \quad \hat{B} = B/\sqrt{2}, \quad \hat{C} = C\sqrt{2}$$

Se dunque $G(s)$ è strettamente passivo, allora esiste $P > 0$ tale che

$$A'P + PA + (PB - C')(B'P - C)/2 < 0$$

che si può scrivere come

$$(A - \hat{B}\hat{C})' + P(A - \hat{B}\hat{C}) + P\hat{B}\hat{B}'P + \hat{C}'\hat{C} < 0$$

Ciò significa che $A - \hat{B}\hat{C}$ è Hurwitz e che la norma infinita di $F(s)$ è minore di uno (Bounded Real Lemma, Teorema 4.5). Viceversa se $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $\|F(s)\|_\infty < 1$ allora esiste $P > 0$ che soddisfa tale disuguaglianza e quindi $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ ed è strettamente passivo.

Capitolo 4

Norme

Questo capitolo è dedicato alla definizione di alcune norme o misure dei sistemi dinamici. In particolare saranno introdotte le norme \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_∞ e la misura di entropia.

4.1 Norma \mathcal{L}_1

Per un sistema BIBO stabile e SISO, con funzione di trasferimento $G(s)$, la norma in \mathcal{L}_1 è ben definita nel dominio del tempo come la norma L_1 della risposta all'impulso $g(t)$ e cioè:

$$\|G(s)\|_1 = \int_0^\infty |g(t)| dt$$

Per sistemi MIMO la generalizzazione si ottiene considerando la norma infinita della risposta all'impulso $g(t)$, e quindi

$$\|G(s)\|_1 = \int_0^\infty \|g(t)\|_\infty dt = \int_0^\infty \max_i \sum_j |g_{ij}| dt$$

Come dimostrato in Sezione 2.1.3, questa norma rappresenta la norma indotta piccolo del sistema, cioè

$$\|G(s)\|_1 = \sup_{u \in \mathcal{L}_\infty} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

Contrariamente alle norme che saranno introdotte più avanti, la norma \mathcal{L}_1 non è facilmente calcolabile, se non attraverso intergrazione numerica o altre approssimazioni. Inoltre, non risultano evidenti eventuali interpretazioni sistemistiche in termini di risposta in frequenza.

4.2 Norma \mathcal{L}_2

Una funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ appartiene a \mathcal{L}_2 se e solo se è strettamente propria ($D = 0$) e non ha poli sull'asse immaginario. In questo caso la norma \mathcal{L}_2 del sistema è semplicemente definita come:

$$\|G(s)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [G(-j\omega)'G(j\omega)] d\omega \right]^{1/2}$$

Inoltre, se $G(s)$ è analitica nel semipiano destro chiuso (non ha ivi poli), allora $G(s) \in \mathcal{H}_2$ e la norma in \mathcal{H}_2 coincide con quella in \mathcal{L}_2 .

Possiamo chiederci quale sia la interpretazione della norma in termini di risposta del sistema (strettamente proprio)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Il teorema seguente fornisce una caratterizzazione nel tempo della norma \mathcal{H}_2 , in termini di risposta impulsiva e di risposta ad un rumore bianco.

Teorema 4.1 *Si consideri un sistema asintoticamente stabile e strettamente proprio con realizzazione (A, B, C) .*

(i) *Si assuma lo stato iniziale sia nullo al tempo zero e si definisca $y^i(t)$ la risposta del sistema all'impulso al canale i -esimo, cioè $u(t) = e_i \delta(t)$, dove e_i è il vettore della colonna i -esima della matrice identità. Risulta*

$$J_1 = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \|y^i(t)\|^2 dt = \|G(s)\|_2^2$$

(ii) *Si assuma lo stato iniziale nullo al tempo zero e sia l'ingresso $u(t)$ un rumore bianco con intensità unitaria e si indichi con E il valore atteso. Risulta:*

$$J_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E [\|y(t)\|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \right] = \|G(s)\|_2^2$$

(iii) *La norma \mathcal{H}_2 del sistema è data da*

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{tr} [B'PB] = \text{tr} [CSC']$$

dove P e S sono le soluzioni definite positive delle equazioni di Lyapunov

$$A'P + PA + C'C = 0, \quad AS + SA' + BB' = 0$$

Prova. La dimostrazione è facile e si basa sull'applicazione del Teorema di Parseval e delle formule

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt, \quad S = \int_0^{\infty} e^{At} B B' e^{A't} dt$$

■

È importante osservare che il teorema precedente fornisce anche un procedimento di calcolo della norma \mathcal{H}_2 in termini di soluzione di un'equazione di Lyapunov. Infatti, sotto l'ipotesi di stabilità di A , l'equazione di Lyapunov ammette una e una sola soluzione, che risulta essere semidefinita positiva. Nel caso si voglia adoperare questo procedimento per calcolare la norma \mathcal{L}_2 di una certa funzione $G(s)$, si osservi che essa coincide con la norma della *parte stabile* $G_s(s)$ di $G(s)$. Infatti, $G(s) \in \mathcal{L}_2$ si può sempre scomporre¹ nel modo seguente:

$$G(s) = G_a(s) + G_s(s)$$

¹Se (A, B, C, D) è una realizzazione di $G(s) \in \mathcal{L}_2$, risulta $D = 0$ e inoltre la matrice A non ha autovalori con parte reale nulla. Allora A ha n_s autovalori con parte reale negativa e n_a autovalori

dove $G_s(s)$ è analitica nel semipiano destro chiuso e $G_a(s)$ è analitica nel semipiano sinistro chiuso. Essendo queste due funzioni ortogonali (nel prodotto scalare definito nel Capitolo 2), risulta $\langle G_a(s), G_s(s) \rangle = 0$, da cui il risultato (Teorema di Pitagora):

$$\|G(s)\|_2^2 = \|G_a(s)\|_2^2 + \|G_s(s)\|_2^2$$

D'altra parte è facile riconoscere, in base alla definizione, che il sistema aggiunto associato a $G_a(s)$ è stabile, cioè $G_a(-s)' \in \mathcal{H}_2$ ed ha la stessa norma \mathcal{H}_2 di $G_a(s)$. In conclusione

$$\|G(s)\|_2^2 = \|G_a(-s)'\|_2^2 + \|G_s(s)\|_2^2$$

Esempio 4.1 *Si voglia calcolare la norma in \mathcal{L}_2 della funzione di trasferimento*

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{s^2+s-6} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Si noti che $G(s) \in \mathcal{L}_2$ e quindi tale norma esiste. Inoltre

$$G(s) = G_a(s) + G_s(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.6}{s-2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1.6}{s+3} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Si noti ancora che

$$\begin{aligned} G_a(s)G_a(-s)' &= \frac{-0.6}{s-2} \times \frac{0.6}{s+2} \\ G_s(s)G_s(-s)' &= \frac{1.8868(3.2472-s)}{(1-s)(3-s)} \times \frac{1.88686(s+3.2472)}{(s+1)(s+3)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\|G(s)\|_2^2 = \|G_1(s)\|_2^2 + \|G_2(s)\|_2^2$$

dove

$$G_1(s) = \frac{0.6}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{1.88686(s+1.802)}{(s+1)(s+3)}$$

Per quanto riguarda $G_1(s)$ l'equazione di Lyapunov è $\|G_1(s)\|_2^2 = p$ con $-4p + 0.36 = 0$. Quindi $\|G_1(s)\|_2^2 = 0.09$, mentre per $G_2(s)$ risulta

$$G_2(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

con

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 3.4 & 1.8869 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con parte reale nulla, con $n_s + n_a = n$. Si prenda allora una base T_s , n_s dimensionale, formata dagli autovettori, generalizzati o no, associati agli autovalori di A con parte reale negativa e una base T_a , n_a dimensionale, formata dagli autovettori, generalizzati o no, associati agli autovalori con parte reale positiva. Naturalmente la matrice $T^{-1} = [T_s \ T_a]$ è n -dimensionale, invertibile, e risulta

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_s \\ B_a \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_s & C_a \end{bmatrix}$$

e quindi

$$G(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + C_a(sI - A_a)^{-1}B_a$$

L'unica soluzione di $A'P + PA + C'C = 0$ è

$$P = \begin{bmatrix} 4.0716 & 1.9267 \\ 1.9267 & 0.9268 \end{bmatrix}$$

e $\|G_2(s)\|_2^2 = B'PB = 0.9268$. Quindi $\|G(s)\|_2 = 1.0168$.

Si noti che la norma H_2 di $G_2(s)$ può essere calcolata senza risolvere una equazione di Lyapunov per un sistema del secondo ordine. Infatti, tale norma coincide con la norma L_2 di (ad esempio)

$$G_2(s) = \frac{1.88686(s + 1.802)}{(s + 1)(s - 3)} = \frac{2.2652}{s - 3} + \frac{-0.3783}{s + 1}$$

e quindi

$$\|G_2(s)\|_2^2 = \left\| \frac{2.2652}{s + 3} \right\|_2^2 + \left\| \frac{-0.3783}{s + 1} \right\|_2^2 = 0.8552 + 0.0716 = 0.9268$$

4.3 Norma \mathcal{L}_∞

Come sappiamo, la norma in \mathcal{L}_∞ di una funzione di trasferimento $G(s)$ è ben definita se (e solo se) $G(s)$ non ha poli sull'asse immaginario, e corrisponde alla massima norma della matrice $G(j\omega)$ al variare di ω . Nel caso di sistemi SISO è facile visualizzare il modulo di $G(j\omega)$ al variare di ω (diagramma di Bode del modulo) e evidenziare il valore massimo. Il picco del modulo è proprio la norma in \mathcal{L}_∞ . Nel caso MIMO bisogna invece visualizzare il massimo valore singolare (norma) di $G(j\omega)$ in funzione di ω e valutarne il massimo, cioè, per un sistema con funzione di trasferimento $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$,

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|$$

che nel caso in cui $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si può anche scrivere come

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \|G(s)\|$$

A differenza della norma in \mathcal{L}_2 , non esiste un metodo diretto di calcolo della norma in \mathcal{L}_∞ . Esistono alcuni test efficaci per stabilire se questa norma è minore di un certo numero positivo γ , cioè $\|G(s)\|_\infty < \gamma$. D'altra parte questa relazione è equivalente a

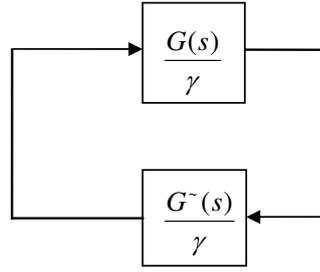
$$\Gamma_\gamma(j\omega) = I - \gamma^{-2} G(-j\omega)' G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \quad (4.1)$$

e la norma infinita di $G(s)$ è esattamente il valore inferiore di γ per cui questa relazione vale.

Si noti che gli zeri del sistema con funzione di trasferimento $\Gamma_\gamma(s)$, definita nell'equazione (4.1) sono gli autovalori della matrice dinamica H del sistema retroazionato in figura 4.1. Tale matrice risulta essere

$$H = \begin{bmatrix} A + B(\gamma^2 I - D'D)^{-1} D'C & B(\gamma^2 I - D'D)^{-1} B' \\ -C'(I - \gamma^{-2} DD')^{-1} C & -A' - C'D(\gamma^2 I - D'D)^{-1} B' \end{bmatrix}$$

Naturalmente perchè il sistema retroazionato sia ben posto occorre che DD' non abbia autovalori in γ^2 , in modo tale che le due quantità $\gamma^2 I - DD'$ e $\gamma^2 I - D'D$ siano invertibili. Si noti che la matrice H è hamiltoniana. Tale matrice ci permette di discernere se la norma infinita del sistema è minore di γ oppure no. Vale infatti il risultato seguente.

Figura 4.1: Il sistema hamiltoniano per l'analisi \mathcal{H}_∞

Teorema 4.2 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\|D\| < \gamma$ e H non ha autovalori sull'asse immaginario.

Prova. Se la norma è inferiore a γ allora ovviamente $\|D\| = \|G(\infty)\| < \gamma$. Supponiamo ora per assurdo che $Hx = j\omega x$, con $x \neq 0$ per un certo ω . Allora, siano x_1 e x_2 le componenti di x e si definisca $z = (\gamma^2 I - D'D)^{-1}(D'Cx_1 + B'x_2)$. Il vettore z risulta non nullo. Infatti, se così non fosse risulterebbe $Ax_1 = j\omega x_1$ e quindi $x_1 = 0$, $B'x_2 = 0$ e $A'x_2 = -j\omega x_2$, col che l'assurdo. Il vettore $z \neq 0$ è tale che (la verifica è lasciata al lettore):

$$G(-j\omega)'G(j\omega)z = \gamma^2 z$$

e quindi la norma infinita non è minore di γ .

Viceversa, si assuma che $\|D\| = \|G(\infty)\| < \gamma$ e che H non abbia autovalori in $j\omega$. Se per assurdo fosse

$$G(-j\omega)'G(j\omega)z = \gamma^2 z$$

per un certo $z \neq 0$ si avrebbe $Hx = j\omega x$ con

$$x_1 = (j\omega I - A)^{-1}Bz, \quad x_2 = (-j\omega I - A')^{-1}C'G(j\omega)z$$

■

L'interpretazione sistemistica della norma infinita più espressiva è quella seguente, dove si dimostra che tale norma non è altro che il valore pessimo del guadagno ingresso/uscita in \mathcal{L}_2 .

Teorema 4.3 Sia $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$. Allora

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \mathcal{L}_2}} \frac{\|G(s)u\|_2}{\|u\|_2}$$

Prova Si osservi che si può sempre assumere $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Quindi $G(s)u \in \mathcal{L}_2$ se $u \in RL_2$. Ora si noti che

$$\sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|G(s)u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \geq \sup_{\substack{Re(\lambda) > 0 \\ \mu \neq 0}} \frac{\|G(s) \frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2}{\|\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2} \quad (4.2)$$

dove μ è un vettore costante di dimensioni opportune. La risposta del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ alimentato dall'ingresso $u = \mu e^{\lambda t}$ è data da (se λ non coincide con un polo di $G(s)$) $y = G(\lambda)\mu e^{\lambda t}$, ammesso che un opportuno stato iniziale sia stato scelto. Allora,

$$G(s)\frac{\mu}{s-\lambda} = G(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda} - f(s)$$

dove $f \in \mathcal{H}_2$ è la trasformata di Laplace della risposta libera, mentre la parte sinistra dell'equazione corrisponde alla risposta forzata. Dal momento che $G(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda} \in RH_2^+$, segue che

$$\|G(s)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2 = \|G(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2 + \|f(s)\|_2^2 \geq \|G(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2 \quad (4.3)$$

Dalle equazioni (4.2), (4.3) si ha

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|G(s)u\|_2^2}{\|u\|_2^2} &\geq \sup_{\substack{Re(\lambda) > 0 \\ \mu \neq 0}} \frac{\|G(s)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2}{\|\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2} \\ &\geq \sup_{\substack{Re(\lambda) > 0 \\ \mu \neq 0}} \frac{\|G(\lambda)\mu\|^2}{\|\mu\|^2} \\ &\geq \sup_{Re(\lambda) > 0} \|G(\lambda)\|^2 \\ &\geq \|G(s)\|_\infty^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per ricavare queste espressioni, abbiamo utilizzato i due fatti seguenti:

- 1) Se K è una costante, allora $\|\frac{K}{s-\lambda}\|_2^2 = K \sim K \|\frac{1}{s-\lambda}\|_2^2 = \|K\|^2 \|\frac{1}{s-\lambda}\|_2^2$
- 2) $\sup_{\mu \neq 0} \frac{\|G(\lambda)\mu\|^2}{\|\mu\|^2} = \|G(\lambda)\|^2$

D'altra parte, se e_i denota la i -esima colonna della matrice identità, e definendo

$$u := [u e_1 \quad \cdots \quad u e_\nu]$$

si ha

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|G(s)u\|_2^2}{\|u\|_2^2} &= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [u^\sim(j\omega)G^\sim(j\omega)G(j\omega)u(j\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [u^\sim(j\omega)u(j\omega)] d\omega} \\ &= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} e_i' u^\sim(j\omega)G^\sim(j\omega)G(j\omega)u(j\omega)e_i d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} e_i' u^\sim(j\omega)u(j\omega)e_i d\omega} \\ &= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)u(j\omega)e_i\|^2 d\omega}{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega)e_i\|^2 d\omega} \\ &\leq \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|^2 \|u(j\omega)e_i\|^2 d\omega}{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega)e_i\|^2 d\omega} \\ &\leq \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|G(s)\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega)e_i\|^2 d\omega}{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega)e_i\|^2 d\omega} \\ &\leq \|G(s)\|_\infty^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dalle equazioni (4.4),(4.5), segue la tesi. ■

Il risultato seguente sul valore superiore della norma infinita è conosciuto in letteratura come lemma della limitatezza reale (*bounded real lemma*).

Teorema 4.4 *Sia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e supponiamo che A sia di Hurwitz. Allora $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\|D\| < \gamma$ ed esiste una soluzione semidefinita positiva P dell'equazione di Riccati*

$$A'P + PA + (PB + C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(D'C + B'P) + C'C = 0$$

tale che

$$\hat{A} = A + B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(D'C + B'P)$$

è di Hurwitz.

Prova. La prova è pressochè immediata a partire dai Teoremi 3.5 e 4.2. Infatti se $\|D\| < \gamma$ ed esiste una soluzione P reale e simmetrica dell'equazione di Riccati tale che \hat{A} è Hurwitz, la matrice hamiltoniana H risulta avere n autovalori con parte reale negativa (quelli di \hat{A}) e n con parte reale positiva (i simmetrici rispetto all'asse immaginario). In vista del Teorema 4.2 la norma infinita è minore di γ . Viceversa, se la norma infinita è minore di γ allora $\|D\| < \gamma$ e la matrice hamiltoniana H non ha autovalori a parte reale nulla (Teorema 4.2). La stabilità di A implica poi la stabilizzabilità della coppia

$$A + B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}D'C, \quad B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}B'$$

e quindi, grazie al Teorema 3.5 esiste la soluzione P con le proprietà ricercate. ■

Se la norma è minore di γ è possibile costruire il fattore spettrale canonico di $\Gamma_\gamma(s)$ attraverso la soluzione dell'equazione di Riccati. Infatti, ponendo $X(s) = -(\gamma^2 I - D'D)^{-1/2}(sI - A)^{-1}B + (\gamma^2 I - D'D)^{-1/2}$, è semplice verificare che

$$\gamma^2 I - G^\sim(s)G(s) = X^\sim(s)X(s)$$

Quindi $\gamma^2 I - G(-j\omega)'G(j\omega) \geq 0$, $\forall \omega$ e $X(s)$ è il fattore spettrale canonico di $\gamma^2 I - G^\sim(s)G(s) = X^\sim(s)X(s)$. Infatti $X(s) \in \mathcal{H}_\infty$ in quanto A è Hurwitz e $X(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ in quanto la matrice dinamica di $X(s)^{-1}$ è \hat{A} .

Il teorema sulla limitatezza reale ammette una descrizione in termini di disequaglianza matriciale lineare. Infatti vale il seguente risultato.

Teorema 4.5 *Sia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e supponiamo che A sia Hurwitz. Allora $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\|D\| < \gamma$ ed esiste una soluzione definita positiva P della disequazione matriciale*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ D'C + B'P & -\gamma^2 I + D'D \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

Prova. Supponiamo esista $P > 0$ che soddisfa (4.6), che è equivalente, grazie al lemma di Schur, alla coppia di disequazioni

$$\begin{aligned} \gamma^2 I &> DD' \\ 0 &> A'P + PA + (PB + C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(PB + C'D)' + C'C \end{aligned}$$

Dalla prima segue la prima conclusione, cioè $\|D\| < \gamma$. Dalla seconda si ha che A è di Hurwitz (Lemma di Lyapunov). Inoltre, sempre dalla seconda segue che

$$A'P + PA + (PB + \bar{C}'\bar{D})(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1}(PB + \bar{C}'\bar{D})' + \bar{C}'\bar{C} = 0$$

dove

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ E \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice E è tale che $E'E > 0$. Poniamo ora

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1}(B'P + \bar{D}'\bar{C}) \\ \bar{B} &= B(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1/2} \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} (\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1/2}\bar{D}'\bar{C} \\ E \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e consideriamo ora l'equazione di Riccati nell'incognita X :

$$\bar{A}'X + X\bar{A} - X\bar{B}\bar{B}'X + \hat{C}'\hat{C} = 0$$

La stabilità di A implica la stabilizzabilità di (\bar{A}, \bar{B}) . Inoltre, essendo $E'E > 0$ si ha che la coppia (\bar{A}, \hat{C}) è osservabile. Grazie al Teorema 3.5 esiste la soluzione X stabilizzante, cioè tale che

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{B}'X = A + B(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1}(B'(P - X) + \bar{D}'\bar{C})$$

è Hurwitz. Si ponga ora $W = P - X$. Sottraendo termine a termine gli elementi dell'equazione di P e quella di X si ha:

$$A'W + WA + (WB + C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(WB + C'D)' + C'C = 0$$

Quindi W è semidefinita positiva e stabilizzante. Grazie al Teorema 4.4, la norma di $G(s)$ è minore di γ .

Viceversa, si supponga che $G(s)$ abbia norma minore di γ . Quindi $\|D\| < \gamma$. Si definisca la nuova funzione di trasferimento

$$\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{\epsilon}I \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}B + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denotando con $F(s) = (sI - A)^{-1}B$, si ha

$$\bar{G}^\sim(s)\bar{G}(s) = G^\sim(s)G(s) + F^\sim(s)F(s)$$

e quindi

$$\|\bar{G}(s)\|_\infty^2 \leq \|G(s)\|_\infty^2 + \epsilon\|F(s)\|_\infty^2$$

Sia ϵ tale che

$$0 < \epsilon < \frac{\gamma^2 - \|G(s)\|_\infty^2}{\|F(s)\|_\infty^2}$$

Quindi, per un tale valore di ϵ la norma infinita di $\bar{G}(s)$ è minore di γ . Ponendo:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{\epsilon}I \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

e grazie al Teorema 4.4, esiste $P \geq 0$ che soddisfa

$$A'P + PA + (PB + \bar{C}'\bar{D}) (\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1} (PB + \bar{C}'\bar{D})' + \bar{C}'\bar{C} = 0$$

Quindi, essendo $\bar{C}'\bar{C} > 0$ si ha che $P > 0$ e P risolve l'equazione

$$A'P + PA + (PB + C'D) (\gamma^2 I - D'D)^{-1} (PB + C'D)' + C'C + \epsilon I < 0 = 0$$

La conclusione si ha in base al lemma di Schur notando che $\|D\| < \gamma$ e $P > 0$ è soluzione della equazione precedente (che diventa disequazione togliendo ϵ).

4.4 Norma di Hankel

La norma di Hankel ha una notevole importanza per i problemi di approssimazione e di riduzione dell'ordine di una sistema dinamico. Consideriamo una funzione $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e l'operatore Γ_G che opera da \mathcal{H}_2^\perp a \mathcal{H}_2 nel modo seguente:

$$\Gamma_G F(s) = [G(s)F(s)]_{st}$$

dove con $[\]_{st}$ abbiamo indicato la proiezione stabile e strettamente propria. In sostanza essendo $F(s) \in \mathcal{H}_2$ e $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ il risultato del prodotto $G(s)F(s)$ appartiene a \mathcal{L}_2 e quindi si può scrivere come la somma di una parte stabile (in \mathcal{H}_2) e una parte antistabile (in \mathcal{H}_2^\perp). L'operatore Γ_G non fa altro che selezionare la parte stabile di tale prodotto. Questo operatore è chiamato *operatore di Hankel* associato a $G(s)$. Si noti ² che, poichè $G(s) = G(\infty) + [G(s)]_{st} + [G(s)]_a$, dove con $[\]_a$ abbiamo indicato la proiezione antistabile, si ha

$$\begin{aligned} \Gamma_G F(s) &= [G(s)F(s)]_{st} = [G(\infty) + [G(s)]_{st}F(s) + [G(s)]_aF(s)]_{st} \\ &= [[G(s)]_{st}F(s)]_{st} \\ &= \Gamma_{[G]_{st}} F(s) \end{aligned}$$

cosicchè l'operatore Γ_G coincide con l'operatore di Hankel associato alla sola parte stabile e strettamente propria di $G(s)$.

L'operatore aggiunto di Hankel associato a $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ è indicato con il simbolo Γ_G^* . Esso prende un elemento $H(s) \in \mathcal{H}_2$ e restituisce un elemento di \mathcal{H}_2^\perp . Risulta ³

$$\Gamma_G^* H(s) = [G^\sim(s)H(s)]_a$$

Vogliamo dare ora una caratterizzazione ingresso uscita dell'operatore di Hankel associato ad un sistema che ha $G(s)$ come funzione di trasferimento. Per quanto detto, è sufficiente considerare un sistema in forma minima, asintoticamente stabile e strettamente proprio, e quindi

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

²Si ricordi la nota a piè pagina della sezione 4.2.

³Infatti, ricordando che $F(s) \in \mathcal{H}_2^\perp$ e $H(s) \in \mathcal{H}_2$ si ha

$$\begin{aligned} \langle F(s), \Gamma_G^* H(s) \rangle &= \langle \Gamma_G F(s), H(s) \rangle \\ &= \langle [G(s)F(s)]_{st}, H(s) \rangle = \langle G(s)F(s), H(s) \rangle \\ &= \langle F(s), G^\sim(s)H(s) \rangle = \langle F(s), [G^\sim(s)H(s)]_a \rangle \end{aligned}$$

con A Hurwitz, (A, C) osservabile e (A, B) raggiungibile. La funzione

$$g(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ Ce^{At}B & t > 0 \end{cases}$$

ha come trasformata di Laplace esattamente $G(s)$. L'operatore

$$\Gamma_g : RL_2(-\infty, 0] \rightarrow RL_2[0, \infty)$$

definito da

$$\Gamma_g : u(t) \mapsto \Gamma_g u(t) := y(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ce^{At} \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau & t \geq 0 \end{cases}$$

è un operatore che può essere legittimamente considerato la controparte nel tempo dell'operatore di Hankel Γ_G . Infatti, la trasformata di Laplace di y è pari alla parte stabile del prodotto di $G(s)$ con la trasformata di Laplace dell'ingresso u . Caratterizzazione ulteriormente Γ_g come segue. Supponiamo che lo stato iniziale del sistema sia nullo in $t = -\infty$. Quindi applichiamo al sistema un ingresso $u(\cdot)$ che è diverso da zero solo per tempi non positivi, quindi

$$x(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} Bud\tau$$

Inoltre, consideriamo la risposta libera dell'uscita y per tempi non negativi, dovuta allo stato iniziale sopra definito. Risulta che l'operatore Γ_g trasforma l'ingresso u ($t \leq 0$) nell'uscita y ($t \geq 0$), attraverso $x(0)$. Quindi, Γ_g può essere visto come una composizione di due operatori $\Psi_r : RL_2(-\infty, 0] \rightarrow R^n$ and $\Psi_o : R^n \rightarrow RL_2[0, \infty)$, definiti da

$$\begin{aligned} \Psi_r : u(t) \mapsto \Psi_r u(t) &:= x := \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} Bud\tau \\ \Psi_o : x \mapsto \Psi_o x &:= y(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ce^{At}x & t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Infatti si ha che

$$\Gamma_g = \Psi_o \Psi_r$$

A questo punto appare evidente che la norma di Hankel di $G(s)$ può essere definita come la norma dell'operatore Γ_g ed è caratterizzata dal punto di vista ingresso uscita come il rapporto pessimo tra la norma in $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ dell'uscita e quella in $\mathcal{L}_2(-\infty, 0)$ dell'ingresso, cioè

$$\|G(s)\|_H = \|\Gamma_G\| = \|\Gamma_g\| = \sup_{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0)} \frac{\int_0^\infty y'y}{\int_{-\infty}^0 u'u}$$

L'operatore di osservabilità Ψ_o è iniettivo in quanto, grazie all'osservabilità, l'unico elemento mappato in zero è l'elemento zero. Invece l'operatore di raggiungibilità Ψ_r è surgettivo. Se infatti prendiamo un vettore $x \in R^n$, grazie alla raggiungibilità

possiamo ricavare ⁴ una funzione di ingresso $u(\cdot) \in L_2(\infty 0]$ che raggiunge tale vettore. Essa è infatti la funzione

$$u(t) := \begin{cases} 0 & t > 0 \\ B'e^{-A't}S^{-1}x, & t \leq 0 \end{cases}$$

dove S risolve l'equazione di Lyapunov.

$$SA' + AS + BB' = 0$$

E' poi facile determinare gli operatori aggiunti di Ψ_r e Ψ_o . Risulta $\Psi_r^* : R^n \rightarrow RL_2(-\infty 0]$ and $\Psi_o^* : RL_2[0 \infty) \rightarrow R^n$ are defined by

$$\begin{aligned} \Psi_r^* : x \mapsto \Psi_r^*x &:= u(t) := \begin{cases} B'e^{-A't}x & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \\ \Psi_o^* : y(t) \mapsto \Psi_o^*y(t) &:= x := \int_0^\infty e^{A'\sigma}C'y d\sigma \end{aligned}$$

Quindi, essendo $\Gamma_g = \Psi_o\Psi_r$ si ha che $\Gamma_g^* = \Psi_r^*\Psi_o^* : L_2[0 \infty) \rightarrow L_2(-\infty 0]$ è dato da

$$\Gamma_g^* : y(t) \mapsto \Gamma_g^*y(t) := u(t) := \begin{cases} B'e^{A't} \int_0^\infty e^{A'\tau}C'y d\tau & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

L'operatore Γ_g^* rappresenta la controparte nel dominio del tempo dell'operatore Γ_G^* .

Gli operatori $\Psi_r\Psi_r^*$ e $\Psi_o^*\Psi_o$ mappano lo spazio R^n in sè stesso e quindi possono essere rappresentati da matrici n -dimensionali. Infatti, si ha

$$x := \Psi_r\Psi_r^*x_0 = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau x_0$$

dove P è la soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$0 = AS + SA' + BB' \quad (4.7)$$

L'equazione $\Psi_r\Psi_r^*x_0 = Sx_0$ vale per ogni x_0 , e quindi

$$\Psi_r\Psi_r^* = S \quad (4.8)$$

Viceversa, per quanto riguarda $\Psi_o^*\Psi_o$ si ha, per ogni x_0 ,

$$x_f := \Psi_o^*\Psi_o x_0 = \int_0^\infty e^{A'\tau}C'Ce^{A\tau}d\tau x_0 = Px_0$$

⁴La funzione $u(\cdot)$ è ben definita grazie alla raggiungibilità che rende strettamente definita positiva la soluzione dell'equazione di Lyapunov. Inoltre essa appartiene a $L_2(\infty 0]$ grazie alla stabilità asintotica. Inoltre si ricordi che

$$S = \int_0^\infty e^{A\sigma}BB'e^{A'\sigma}d\sigma = \int_{-\infty}^0 e^{-A\sigma}BB'e^{-A'\sigma}d\sigma$$

e quindi

$$\Psi_r u(\cdot) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}S^{-1}x d\tau = x$$

dove P è l'unica soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$0 = PA + A'P + C'C \quad (4.9)$$

e quindi

$$\Psi_o^* \Psi_o = P \quad (4.10)$$

L'operatore autoaggiunto $\Gamma_G^* \Gamma_G$ ammette autovalori reali e nonnegativi. Inoltre ammette almeno un autovalore nullo, in quanto basta prendere come autovettore la funzione $F(s) = \Psi(s)H(s)$ dove $\Psi(s)$ è minimo comune multiplo di tutti i polinomi al denominatore di $G(s)$ e $H(s)$ è una matrice opportuna di \mathcal{H}_2^\perp . L'autovalore più grande di $\Gamma_G^* \Gamma_G$ coincide con la norma $\|\Gamma_G\|^2$ e si può calcolare facilmente attraverso le equazioni di Lyapunov. Infatti vale il risultato seguente.

Teorema 4.6 *L'operatore $\Gamma_G^* \Gamma_G$ e la matrice SP hanno gli stessi autovalori non nulli.*

Prova Gli autovalori di $\Gamma_G^* \Gamma_G$ sono quelli di

$$\Gamma_g^* \Gamma_g = \Psi_r^* \Psi_o^* \Psi_o \Psi_r$$

Sia dunque λ un autovalore di $\Gamma_g^* \Gamma_g$, quindi

$$\Psi_r^* \Psi_o^* \Psi_o \Psi_r u = \lambda u \quad (4.11)$$

Premoltiplicando per Ψ_r e definendo $x_0 := \Psi_r u$, si ottiene

$$SPx_0 = \lambda x_0 \quad (4.12)$$

Si noti che $x_0 \neq 0$, altrimenti $\Psi_r u = 0$ e, dall'equazione (4.11) si avrebbe $\lambda u = 0$ e, essendo $\lambda \neq 0$, si avrebbe $u = 0$, che è una contraddizione.

Viceversa, se $\lambda \neq 0$ è un autovalore di SP , allora esiste $x_0 \neq 0$ tale che valga l'equazione (4.12). Premoltiplicando questa espressione per $\Psi_r^* P_o$ e definendo $u(t) := \Psi_r^* P_o x_0$, si ha l'equazione (4.11). Si noti infine che $u \neq 0$. Se non fosse così, dalle equazioni (4.12), (4.8) seguirebbe la contraddizione $\lambda x_0 = 0$. Quindi u è un autovettore di $\Gamma_g^* \Gamma_g$ associato a λ . ■

Grazie al risultato precedente, possiamo calcolare la norma di Hankel come la norma $\|\Gamma_G\|$ di Γ_G e calcolarla come la radice quadrata del massimo autovalore di SP , dove S e P risolvono le due equazioni di Lyapunov.

Osservazione 4.1 *(Calcolo della norma di Hankel) Sia data $G(s) \in L_\infty$.*

- 1) Si calcoli $G_s(s) = [G(s)]_s \in \mathcal{L}_2$.
- 2) Si determini una realizzazione minima di $G_s(s)$, e quindi sia $G_s(s) = C(sI - A)^{-1}B$.
- 3) Si risolvano le due equazioni di Lyapunov (4.7), (4.9).
- 4) Si calcoli il massimo autovalore λ_M^2 of SP .
- 5) Si ha $\|G(s)\|_H = \lambda_M$.

4.5 Entropia

Consideriamo una funzione di trasferimento reale $G(s) \in \mathcal{H}_2$ cioè *strettamente propria e stabile*, e sia γ un numero positivo tale che $\|G(s)\|_\infty < \gamma$. Definiamo la γ -entropia del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ nel modo seguente:

$$I_\gamma(G) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \det \left[I - \frac{G(-j\omega)'G(j\omega)}{\gamma^2} \right] d\omega$$

Si noti che tale quantità è ben definita grazie al fatto che $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ ⁵. Si noti ancora che, essendo il determinante di una matrice il prodotto dei suoi autovalori, si può anche scrivere:

$$I_\gamma(G) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \ln \left[1 - \frac{1}{\gamma^2} \sigma_i^2(G(j\omega)) \right] d\omega$$

dove $\sigma_i(\cdot)$ denota il valore singolare i -esimo.

Teorema 4.7 *Si consideri un sistema asintoticamente stabile e strettamente proprio con funzione di trasferimento $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e una realizzazione minima (A, B, C) . Si supponga inoltre che $\|G(s)\|_\infty < \gamma$. Sia inoltre $\beta = \frac{\gamma^2}{\|G(s)\|_\infty^2}$. Allora:*

$$\|G(s)\|_2^2 \leq I_\gamma(G) \leq -\beta \log(1 - \beta^{-1}) \|G(s)\|_2^2$$

$$I_\gamma(G) = \text{trace}[B'PB]$$

dove P è la soluzione (definita positiva) dell'equazione di Riccati

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C = 0$$

tale che $A + \gamma^{-2}BB'P$ è asintoticamente stabile.

⁵Il concetto di entropia nella statistica e nella teoria dell'informazione richiederebbe probabilmente un corso a sè. Nel caso di sistemi SISO è possibile caratterizzare l'entropia in senso probabilistico, facendo riferimento alla funzione di trasferimento di un sistema retroazionato

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1 - \Delta(s)G(s)}$$

dove $G(s)$ è stabile con norma infinita minore di γ e $\Delta(j\omega)$ è, per ogni ω , una variabile casuale distribuita uniformemente nel cerchio di raggio γ^{-1} e tale che $\Delta(j\omega_1)$ e $\Delta(j\omega_2)$ sono indipendenti se $\omega_1 \neq \omega_2$. Si può allora dimostrare che la γ -entropia è il valore atteso della norma \mathcal{H}_2 di $G_{cl}(s)$, cioè:

$$E_\Delta \left(\left\| \frac{G(s)}{1 - \Delta(s)G(s)} \right\|_2^2 \right)$$

dove E_Δ indica il valore atteso rispetto a Δ . Infatti, si ponga $\Delta(j\omega) = \rho e^{j\theta}$ e $G(j\omega) = \lambda e^{j\phi}$, e si noti che la funzione di distribuzione di $\Delta(j\omega)$ è γ^2/π . Quindi

$$\begin{aligned} E_\Delta \left(\left\| \frac{G(j\omega)}{1 - \Delta(j\omega)G(j\omega)} \right\|^2 \right) &= \frac{\gamma^2 \lambda^2}{\pi} \int_0^{\gamma^{-1}} \rho \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 \rho^2 - 2\lambda \rho \cos(\theta + \phi)} d\theta \right] d\rho \\ &= 2\gamma^2 \lambda^2 \int_0^{\gamma^{-1}} \frac{\rho}{1 - \rho^2 \lambda^2} d\rho = -\gamma^2 \ln(1 - \lambda^2 \gamma^{-2}) \end{aligned}$$

Quindi

$$E_\Delta \left(\left\| \frac{G(s)}{1 - \Delta(s)G(s)} \right\|_2^2 \right) = \frac{-\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - |G(j\omega)|^2 \gamma^{-2}) d\omega$$

Prova. La norma in \mathcal{H}_2 si scrive anche nel modo seguente:

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(G(j\omega)) d\omega$$

Dunque, definendo la funzione

$$f(x^2) = -\gamma^2 \ln \left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2} \right)$$

si ha

$$I_\gamma(G) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m f(\sigma_i^2(G(j\omega))) d\omega$$

Si noti che $f(x^2) \geq x^2$, $\forall x$ e quindi la prima conclusione è che:

$$\|G(s)\|_2^2 \leq I_\gamma(G)$$

Sia ora $r_i = \frac{\gamma^2}{\sigma_i^2(G(j\omega))}$ e si noti che $r_i \geq \beta > 1$. La funzione $x \log(1 - x^{-1})$ è negativa e monotona crescente per $x > 1$. Quindi

$$\log \left[1 - \frac{1}{r_i} \right] \geq \frac{\beta}{r_i} \log \left[1 - \frac{1}{\beta} \right]$$

e quindi

$$\begin{aligned} I_\gamma(G) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m -\gamma^2 \log \left[1 - \frac{1}{r_i} \right] d\omega \\ &\leq -\beta \log(1 - \beta^{-1}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(G(j\omega)) d\omega \\ &= -\beta \log(1 - \beta^{-1}) \|G(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

Per dimostrare che l'entropia si può calcolare attraverso l'equazione di Riccati del bounded real lemma, si noti che essendo $\|G(s)\|_\infty < \gamma$, in base al Teorema 4.4 esiste $P > 0$, $W = \gamma I$ e $L = -\gamma^{-1} B' P$ tale che

$$A'P + PA + \gamma^{-2} PBB'P + C'C = 0$$

Ponendo allora $Y(s) = I - \gamma^{-2} B' P (sI - A)^{-1} B$, risulta

$$I - \gamma^{-2} G^\sim(s) G(s) = Y^\sim(s) Y(s)$$

e quindi ⁶

$$I_\gamma(G) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \det [Y(-j\omega)' Y(j\omega)] d\omega$$

⁶Nei passaggi seguenti si utilizza la formula integrale di Cauchy che dice che se la curva chiusa δ contiene il punto z allora

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\delta \frac{f(s)}{s-z} ds = f(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\frac{\gamma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\det [Y(j\omega)]| \frac{z^2}{z^2 + \omega^2} d\omega \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln |\det [Y(z)]| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln |\det [I - \gamma^{-2} B' P (zI - A)^{-1} B]| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln \left| \det \left[I - \gamma^{-2} z^{-1} B' P B - \gamma^{-2} z^{-2} B' P A \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A^k B \right] \right| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln |1 - \gamma^{-2} z^{-1} \text{trace} [B' P B] + \mathcal{O}(z^{-2})| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z [-\gamma^{-2} z^{-1} \text{trace} [B' P B] + \mathcal{O}(z^{-2})] \\
&= \text{trace} [B' P B]
\end{aligned}$$

La prova è quindi conclusa.

4.6 Confronti

La norma \mathcal{L}_1 e la norma \mathcal{L}_∞ sono, come abbiamo visto, norme indotte. Precisamente, la norma \mathcal{L}_1 è la norma indotta in \mathcal{L}_∞ mentre la norma \mathcal{L}_∞ è la norma indotta in \mathcal{L}_2 . Essendo norme indotte, esse godono della proprietà di disuguaglianza nel prodotto, cioè se $G_1(s)$ e $G_2(s)$ rappresentano due sistemi dinamici e il prodotto $G_1(s)G_2(s)$ ha senso, si ha

$$\|G_1(s)G_2(s)\|_x \leq \|G_1(s)\|_x \|G_2(s)\|_x$$

dove x rappresenta 1 oppure ∞ . Questa proprietà del resto non vale per la norma \mathcal{L}_2 e per l'entropia (che non è una norma in senso stretto). Si può invece facilmente verificare dalla definizione che, fissato $G_1(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G_2(s) \in \mathcal{L}_2$, si ha $G_1(s)G_2(s) \in \mathcal{L}_2$ e risulta:

$$\|G_1(s)G_2(s)\|_2 \leq \|G_1(s)\|_\infty \|G_2(s)\|_2$$

Per quanto riguarda la norma di Hankel, dalla definizione $\Gamma_G G(s) = [G(s)G(s)]_{st}$ si ha che

$$\|G(s)\|_H \leq \|G(s)\|_\infty$$

Calcolata in $s = j\omega$, se z è un numero reale positivo e la funzione è tale che $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \beta < \infty$ si ha

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\omega)}{j\omega - z} d\omega = f(z)$$

Infine, se vale la condizione più debole $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} |f(z)| = 0$ allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\omega)z}{|j\omega - z|^2} d\omega = f(z)$$

Utilizzando la simbologia $\mathcal{O}(z^{-2})$ ad indicare infinitesimi con potenze z^{-2} , z^{-3} , \dots , si ha $\det[I + \epsilon V] = 1 + \epsilon \text{trace}[V] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, e $\text{Indet}[I + \epsilon V] = \epsilon \text{trace}[V] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, dove V è una matrice quadrata.

Capitolo 5

Stabilità robusta

In questo capitolo affrontiamo il problema della stabilità robusta di un sistema lineare descritto mediante una matrice della dinamica appartenente ad una certa classe di incertezza. Si toccheranno solo due tipi di incertezza, segnatamente l'incertezza non strutturata in norma e l'incertezza politopica. Nel primo caso la caratterizzazione delle perturbazioni che conservano la stabilità porta alla definizione del cosiddetto raggio di stabilità. Prima si affronta il problema della stabilità dei sistemi retroazionati.

5.1 Stabilità dei sistemi retroazionati

Consideriamo ancora il sistema in Figura 5.1. La dinamica (stabile) delle parti non raggiungibili e/o non osservabili non influenzano le funzioni di trasferimento. Senza perdere di generalità possiamo allora fare riferimento a realizzazioni minime di $G(s)$ e $C(s)$. Quindi,

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$$

con

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

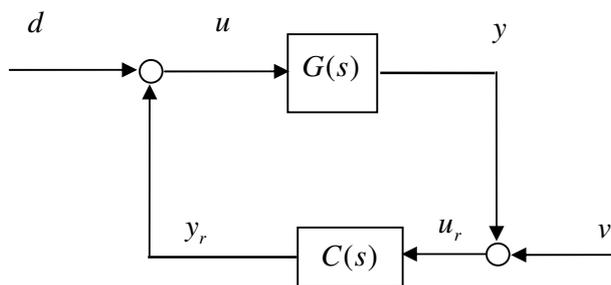


Figura 5.1: Connessione in retroazione

e

$$C(s) := C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r$$

con

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u_r(t)\end{aligned}$$

Queste equazioni hanno senso solo se la matrice $\Delta_{21} := (I - D_r D)$ (o, equivalentemente, la matrice $\Delta_{12} := (I - D D_r)$) è nonsingolare. Ponendo $z := [x' \ x_r']' \in R^n$, $\bar{u} := [u' \ u_r']'$, $\bar{v} := [d' \ v']'$, una realizzazione del sistema ad anello chiuso è data da:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}\bar{v} \\ \bar{u} &= C\bar{z} + D\bar{v}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{A} &:= \begin{bmatrix} A + B\Delta_{21}^{-1}D_r C & B\Delta_{21}^{-1}C_r \\ B_r\Delta_{12}^{-1}C & A_r + B_r\Delta_{12}^{-1}D C_r \end{bmatrix} \\ \bar{B} &:= \begin{bmatrix} B\Delta_{21}^{-1} & B\Delta_{21}^{-1}D_r \\ B_r\Delta_{12}^{-1}D & B_r\Delta_{12}^{-1} \end{bmatrix} \\ \bar{C} &:= \begin{bmatrix} \Delta_{21}^{-1}D_r C & \Delta_{21}^{-1}C_r \\ \Delta_{12}^{-1}C & \Delta_{12}^{-1}D C_r \end{bmatrix} \\ \bar{D} &:= \begin{bmatrix} \Delta_{21}^{-1} & \Delta_{21}^{-1}D_r \\ \Delta_{12}^{-1}D & \Delta_{12}^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sia $T(s) := \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$ la matrice di trasferimento da \bar{v} a \bar{u} .

Teorema 5.1 *Il sistema retroazionato di Figura Fig. 5.1 è asintoticamente stabile se e solo se $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$.*

Prova. Se \bar{A} è di Hurwitz, allora ovviamente $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Per provare la conclusione opposta, dimostreremo, attraverso il PBH test di raggiungibilità ed osservabilità, che il sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ è in forma minima. Infatti, si considerino le due matrici

$$P_C(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad P_B(\lambda) := [\lambda I - \bar{A} \quad -\bar{B}]$$

Il sistema ad anello chiuso è in forma minima se e solo se le due matrici hanno rango massimo per ogni λ . Si noti ora che le due matrici (triangolari a blocchi) seguenti

$$\begin{aligned}T_o &:= \begin{bmatrix} I & 0 & B & 0 \\ 0 & I & 0 & B_r \\ 0 & 0 & I & -\Delta_{21}^{-1}D_r\Delta_{12} \\ 0 & 0 & -\Delta_{12}^{-1}D\Delta_{21} & I \end{bmatrix} \\ T_r &:= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -C_r & -\Delta_{21}D_r\Delta_{12}^{-1} & I \\ -C & 0 & I & -\Delta_{12}D\Delta_{21}^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

sono invertibili. Risulta dunque che $P_C(\lambda)$ e $P_B(\lambda)$ hanno lo stesso rango di $T_oP_C(\lambda)$ e $P_B(\lambda)T_r$. Inoltre:

$$T_oP_C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 \\ 0 & \lambda I - A_r \\ 0 & C_r \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_B(\lambda)T_r = \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & 0 & -B \\ 0 & \lambda I - A_r & -B_r & 0 \end{bmatrix}$$

Grazie alla minimalità di (A, B, C, D) e (A_r, B_r, C_r, D_r) si ha dunque che il sistema di cui $T(s)$ è funzione di trasferimento è in forma minima. Quindi $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$ implica che \bar{A} è di Hurwitz. ■

Esempio 5.1 Sia $G(s) = -1/(s-1)$ e $C(s) = (s-1)/(s+1)$. La matrice dinamica di una particolare realizzazione è

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1 = -2$ and $\lambda_2 = 1$. Quindi il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile. Infatti,

$$T(s) = \begin{bmatrix} (s+1)/(s+2) & (s-1)/(s+2) \\ -(s+1)/(s-1)(s+2) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix}$$

non appartiene a \mathcal{H}_∞ . ■

Il risultato espresso nel teorema precedente può essere specializzato al caso in cui una delle due funzioni di trasferimento $G(s)$ o $C(s)$ è stabile. Nel seguito gli elementi di $T(s)$ sono denotati con il simbolo $T_{ij}(s)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Teorema 5.2 *Sia $G(s)$ stabile. Allora il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se $T_{12}(s) \in \mathcal{H}_\infty$.*

Prova. Si noti che

$$I + T_{12}(s)G(s) = I + [I - C(s)G(s)]^{-1}C(s)G(s) = [I - C(s)G(s)]^{-1} = T_{11}(s)$$

$$I + G(s)T_{12}(s) = I + G(s)C(s)[I - G(s)C(s)]^{-1} = [I - G(s)C(s)]^{-1} = T_{22}(s)$$

$$T_{22}(s)G(s) = T_{21}(s)$$

Quindi $T_{12}(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ implica che $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Il viceversa è ovvio. ■

Un'ulteriore specializzazione del risultato si ha quando entrambe le funzioni $G(s)$ e $C(s)$ sono stabili.

Teorema 5.3 *Assumiamo che $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $C(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se*

$$\det[I - G(s)C(s)] \neq 0, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Prova. Notiamo che la matrice \bar{A} è la matrice dinamica del sistema che ha come funzione di trasferimento

$$\bar{G}(s) = (I - G(s)C(s))^{-1}$$

Il sistema che ha come funzione di trasferimento $\bar{G}(s)^{-1} = I - G(s)C(s)$ ha come zeri invarianti gli autovalori di \bar{A} . Se \bar{A} è Hurwitz si ha allora che tali zeri invarianti hanno parte reale negativa, così come gli zeri di trasmissione (che sono un sottoinsieme). Quindi la tesi. Viceversa, se vale la relazione $\det[\bar{G}(s)^{-1}] \neq 0$, $Re(s) \geq 0$, gli zeri di trasmissione di $\bar{G}(s)^{-1}$ hanno parte reale negativa. Poichè entrambi i sistemi sono in forma minima e stabili asintoticamente, ne consegue che ogni zero invariante del sistema con funzione di trasferimento $\bar{G}(s)^{-1}$ che non sia di trasmissione debba essere nel semipiano sinistro. Quindi gli autovalori del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ (autovalori di \bar{A}) sono nel semipiano sinistro. Il sistema retroazionato risulta dunque asintoticamente stabile.

Per concludere la sezione, consideriamo un risultato ormai classico nella letteratura dei sistemi di controllo che è conosciuto con il nome di Teorema del piccolo guadagno (*small gain theorem*).

Teorema 5.4 *Sia $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Allora*

- i) *Il sistema retroazionato di Figura 5.1 è asintoticamente stabile for ogni $C(s)$ in \mathcal{H}_∞ con $\|C(s)\|_\infty < \alpha$ se $\|G(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$*
- ii) *Se $\|G(s)\|_\infty > \alpha^{-1}$, allora esiste $C(s)$ in \mathcal{H}_∞ con $\|C(s)\|_\infty < \alpha$ che destabilizza il sistema retroazionato.*

Prova. Se $\|G(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$, risulta $\bar{\sigma}[G(s)C(s)] < 1$, $\forall Re(s) \geq 0$. Allora tutti gli autovalori di $G(s)C(s)$ hanno modulo minore di uno nel semipiano destro chiuso e quindi $\det[I - G(s)C(s)] \neq 0$, $\forall Re(s) \geq 0$. In vista del teorema precedente (Teorema 5.3) si conclude che il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile.

Viceversa, si supponga che $\|G(s)\|_\infty = \alpha^{-1}(1 + \epsilon) := \rho^{-1}$, $\epsilon > 0$ e si consideri il caso in cui il numero di ingressi del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ sia non superiore al suo numero di uscite. Scriviamo una scomposizione ai valori singolari di $G(j\omega)$, cioè $G(j\omega) = U(j\omega)\Sigma(j\omega)V^\sim(j\omega)$ con $\Sigma(j\omega) = [S(j\omega)' 0]'$, dove $S(j\omega)$ è quadrata. Si ponga $C(j\omega) := \rho V(j\omega)TU^\sim(j\omega)$, dove $T = [I 0]$. Segue che

$$\begin{aligned} \det[I - G(j\omega)C(j\omega)] &= \det \left[I - \rho U(j\omega) \begin{bmatrix} S(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^\sim(j\omega) \right] \\ &= \det \left[\begin{bmatrix} I - \rho S(j\omega) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right] \\ &= \det[I - \rho S(j\omega)] \end{aligned}$$

Dal momento che $\|G(s)\|_\infty = \rho^{-1}$, esiste una frequenza $\bar{\omega}$ tale che $\lim_{\omega \rightarrow \bar{\omega}} \bar{\sigma}[G(j\omega)] = \rho^{-1}$. Allora, ricordando che $S(j\omega) = \text{diag}\{\sigma_i[G(j\omega)]\}$, segue che un elemento non nullo di $\rho S(j\omega)$ tende a uno e quindi $\lim_{\omega \rightarrow \bar{\omega}} \det[I - G(j\omega)C(j\omega)] = 0$. Grazie al teorema precedente (Teorema 5.3) ciò significa che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile. Il caso in cui il numero di ingressi è superiore al numero di uscita è simile e la dimostrazione relativa è lasciata al lettore. ■

Il teorema sulla doppia fattorizzazione coprima che è stato introdotto nella Sezione 3 ci permette di formulare un altro risultato relativo alla stabilità del sistema retroazionato di Figura 5.1. Tale sistema retroazionato si può rappresentare anche nel modo descritto in Figura 5.2, dove $G(s) = N_G(s)M_G(s)^{-1}$, con $M_G(s)$ e $N_G(s)$ coprimi a destra e $C(s) = N_C(s)M_C(s)^{-1}$ con $M_C(s)$ e $N_C(s)$ coprimi a destra. Con riferimento a tale figura sia $z := [z_1' z_2']'$, $\bar{u} := [u' u_r']'$ and $\bar{v} := [d' v']'$.

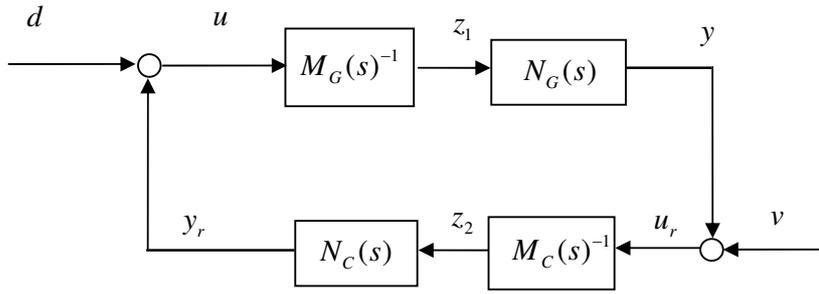


Figura 5.2: Connessione in retroazione

Teorema 5.5 *Il sistema in figura 5.2 è asintoticamente stabile se e solo se la funzione di trasferimento $H(s)$ dall'ingresso \bar{v} all'uscita z è in \mathcal{H}_∞ .*

Prova. Siano $X_G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $Y_G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ soluzioni dell'equazione di Bezout $X_G(s)M_G(s) + Y_G(s)N_G(s) = I$ e $X_C(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $Y_C(s) \in \mathcal{H}_\infty$ soluzioni dell'equazione di Bezout $X_C(s)M_C(s) + Y_C(s)N_C(s) = I$. Per la dimostrazione del teorema basta osservare che le funzioni $H(s)$ e $T(s)$ (quest'ultima, si ricordi, è la funzione di trasferimento da \bar{v} a \bar{u}) sono legate dalle relazioni:

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} 0 & N_C(s) \\ N_G(s) & 0 \end{bmatrix} H(s) + I \\ H(s) &= \begin{bmatrix} X_G(s) & Y_G(s) \\ Y_C(s) & X_C(s) \end{bmatrix} T(s) - \begin{bmatrix} 0 & Y_G(s) \\ Y_C(s) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$ è equivalente a $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$.

Teorema 5.6 *Il sistema di Figura 5.2 è asintoticamente stabile se e solo se $P^{-1}(s) \in RH_\infty$, dove*

$$P(s) := \begin{bmatrix} M_G(s) & N_C(s) \\ N_G(s) & M_C(s) \end{bmatrix}$$

Prova. Si osservi che $P(s)$ è bipropria e quindi invertibile, se il sistema retroazionato è ben posto. Infatti, se $G(\infty) = D$ e $C(\infty) = D_r$ si ha $\det[P(\infty)] = \det[I - DD_r]$. Infine $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$ se e solo se $P^{-1}(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Infatti

$$H(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} P^{-1}(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

5.2 Raggio Complesso

La norma in \mathcal{H}_∞ si presta bene alla caratterizzazione del cosiddetto raggio complesso di stabilità di una matrice incerta A_{in} descritta da:

$$A_{in} = A + L\Delta N$$

dove A è una matrice conosciuta, supposta essere di Hurwitz, Δ è una matrice (anche complessa) limitata in norma, cioè

$$\|\Delta\| \leq \alpha$$

mentre L e N sono matrici conosciute che descrivono la forma dell'incertezza. La classe di incertezza alla quale A_{in} appartiene è di solito chiamata classe di incertezza *norm bounded*.

Il raggio complesso di stabilità è definito come

$$r_{comp}(A, L, N) = \{\inf \|\Delta\|, \Delta \text{ complesso} : A + L\Delta N \text{ ha un autovalore in } s = j\omega\}$$

che si può anche scrivere nel modo seguente:

$$r_{comp}(A, L, N) = \inf_{\omega} \{\inf \|\Delta\|, \Delta \text{ complesso} : \det(I - \Delta G(j\omega)) = 0\}$$

dove

$$G(s) = N(sI - A)^{-1}L$$

Per ricavare il risultato sul raggio complesso si noti che la matrice A_{in} è la matrice dinamica del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ con la perturbazione Δ , cioè retroazionato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Lw(t) \\ z(t) &= Nx(t) \\ w(t) &= \Delta z(t) \end{aligned}$$

Il Teorema 5.4, dimostrato nel Capitolo ??, ci dice che il sistema retroazionato (e quindi A_{in}) è asintoticamente stabile se

$$\|G(s)\|_{\infty} < \alpha^{-1}$$

Viceversa, se $\|G(s)\|_{\infty} \geq \alpha^{-1}$ esiste un elemento Δ con norma non superiore ad α che rende A_{in} non Hurwitz. Infatti, sia $\bar{\omega}$ la frequenza associata al massimo della norma di $N(j\omega I - A)^{-1}L$ e sia $x \neq 0$ tale che

$$L'(-j\bar{\omega}I - A')^{-1}N'N(j\bar{\omega}I - A)^{-1}Lx = \lambda^2 x$$

con $\lambda \geq \alpha^{-1}$. Allora, ponendo $y = (j\bar{\omega}I - A)^{-1}Lx$ si ha

$$Lx = (j\bar{\omega}I - A)y, \quad L'(-j\bar{\omega}I - A')^{-1}N'Ny = \lambda^2 x$$

da cui

$$(j\bar{\omega}I - A - L\Delta N)y = 0$$

con

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} L'(-j\bar{\omega}I - A')^{-1}N', \quad \|\Delta\| = \frac{1}{\lambda} \leq \alpha$$

In conclusione abbiamo dimostrato che A_{in} è stabile per ogni Δ complesso di norma non superiore ad α se e solo se la norma di $N(sI - A)^{-1}L$ è minore di α^{-1} . Quindi

$$r_{comp}(A, L, N) = \frac{1}{\|G(s)\|_{\infty}}$$

è il cosiddetto *raggio complesso* di stabilità, cioè il valore inferiore della norma di Δ capace di destabilizzare A_{in} .

5.3 Raggio reale

Il *raggio reale* di stabilità per la matrice perturbata

$$A_{in} = A + L\Delta N$$

definito come il valore superiore della norma di Δ *reale* per cui si ha stabilità. Il calcolo di tale raggio, indicato con il simbolo r_{real} , è più complicato di quello complesso visto in precedenza. La definizione formale di tale raggio è la seguente:

$$r_{real}(A, L, N) = \{\inf \|\Delta\|, \Delta \text{ reale} : A + L\Delta N \text{ ha un autovalore in } s = j\omega\}$$

Ricordando ancora la definizione di $G(s)$ si ha:

$$r_{real}(A, L, N) = \inf_{\omega} \{\inf \|\Delta\|, \Delta \text{ reale} : \det(I - \Delta G(j\omega)) = 0\}$$

Il risultato sul raggio reale è conseguenza di un risultato analogo sulla norma μ_{reale} di una matrice complessa M , definita come:

$$\mu_{reale}(M) = \{\inf \|\Delta\|, \Delta \text{ reale} : \det(I - \Delta M) = 0\}^{-1}$$

Si può dimostrare che

$$\mu_{reale}(M) = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} Re(M) & -\gamma Im(M) \\ \gamma^{-1} Im(M) & Re(M) \end{bmatrix} \right)$$

dove Re indica la parte reale, Im la parte immaginaria e σ_2 il secondo (più grande) valor singolare. In conclusione

$$r_{real}^{-1}(A, L, N) = \sup_{\omega} \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} Re(G(j\omega)) & -\gamma Im(G(j\omega)) \\ \gamma^{-1} Im(G(j\omega)) & Re(G(j\omega)) \end{bmatrix} \right)$$

Si noti che il caso complesso include il caso reale, e quindi risulterà $r_{reale} \geq r_{comp}$. Infatti, il raggio di stabilità complesso fornisce un valore più conservativo della distanza dall'instabilità se la perturbazione è reale.

Esempio 5.2 Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = (A + L\Delta N)x(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta = [\delta_1 \quad \delta_2], \quad N = I$$

Come prima cosa vogliamo trovare il valore superiore della norma di una perturbazione *reale* Δ tale che $A + L\Delta N$ è Hurwitz (raggio reale di stabilità) e confrontarlo con il raggio complesso di stabilità. A tale scopo si noti che

$$A + L\Delta N = \begin{bmatrix} -1 + \delta_1 & 2 + \delta_2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

e

$$\det[\lambda I - A - L\Delta N] = \lambda^2 + (4 - \delta_1)\lambda + 7 - 3\delta_1 + 2\delta_2$$

Quindi si ha stabilità per

$$\delta_1 < 4, \quad \delta_2 > 1.5\delta_1 - 3.5$$

Il cerchio di raggio massimo per cui si conserva la stabilità si trova intersecando le due rette:

$$\delta_2 > 1.5\delta_1 - 3.5, \quad \delta_2 = -2/3\delta_1$$

e quindi

$$\delta_1 = 21/13, \quad \delta_2 = -14/13$$

col che il raggio reale di stabilità è:

$$r_{reale}(A, L, N) = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} = \frac{\sqrt{637}}{13} = 1.9415$$

che ovviamente coincide con quello che si può calcolare con la formula risolutiva introdotta in precedenza. Il raggio complesso di stabilità è invece $1/\|G(s)\|_\infty$, dove $G(s) = N(sI - A)^{-1}L$. Si ha

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+3 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 4s + 7}$$

Quindi

$$G^\sim(s)G(s) = \frac{13 - s^2}{(s^2 + 4s + 7)(s^2 - 4s + 7)}$$

Allora

$$\|G(s)\|_\infty = \left\| \frac{\sqrt{13} + s}{s^2 + 4s + 7} \right\|_\infty = 0.519$$

Il raggio complesso di stabilità è dunque

$$r_{comp}(A, L, N) = \frac{1}{1.1232} = 1.9269 < 1.9415$$

■

Il concetto di raggio complesso di stabilità è anche legato a quello di *stabilità quadratica* di un sistema incerto. In particolare, diremo che l'insieme delle matrici A_{in} , ottenuto scegliendo in modo arbitrario la matrice Δ (complessa) con $\|\Delta\| < \alpha$, è quadraticamente stabile se esiste una (unica) matrice *hermitiana* P che soddisfa

$$A_{in}^\sim P + PA_{in} < 0, \quad \forall \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \alpha$$

A tale proposito si ha il risultato seguente.

Teorema 5.7 *L'insieme definito dalla matrice incerta A_{in} è quadraticamente stabile se e solo se*

$$\|N(sI - A)^{-1}L\|_\infty < \alpha^{-1}$$

Prova. La stabilità quadratica dell'insieme definito da A_{in} è una proprietà più forte della stabilità di ogni elemento dell'insieme. Se dunque A_{in} è di Hurwitz per ogni Δ di norma minore di α , dal risultato precedente sul raggio complesso segue che la norma di $N(sI - A)^{-1}L$ è minore di α^{-1} .

Viceversa, se questa norma è minore di α^{-1} , sappiamo che esiste $P > 0$ tale che

$$A'P + PA + \alpha^2 PLL'P + N'N < 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}
0 &> A'P + PA + \alpha^2 PLL'P + N'N \\
&\geq A'P + PA + \alpha^2 PLL'P + N'\alpha^{-2}\Delta\sim\Delta N \\
&= A_{in}'P + PA_{in} + \alpha^{-2} [(PL\alpha^2 - N'\Delta\sim)(L'P\alpha^2 - \Delta N)_+] \\
&\geq A_{in}'P + PA_{in}
\end{aligned}$$

conclude la prova.

5.4 Stabilità politopica

In questa sezione, consideriamo il sistema nella forma

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i = A(\sigma)x, \quad \sigma \in \Lambda_N \quad (5.1)$$

dove Λ_N è il simplelso

$$\Lambda_N := \left\{ \lambda \in R^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (5.2)$$

Lo scopo è quello di ricavare le condizioni che assicurino la stabilità dell'equilibrio $x = 0$ per ogni $\sigma \in \Lambda_N$, quindi assicurare la stabilità robusta nell'insieme di incertezza descritto dal politopo i cui vertici sono dati dalle matrici A_i . Si noti che questo modello può approssimare, per N sufficientemente grande, l'incertezza definita su qualsiasi insieme convesso.

Per prima cosa si osservi che, dovendo il sistema essere stabile per ogni possibile valore del vettore σ nel simplelso, deve essere stabile anche per la scelta di tale vettore corrispondente ai vertici del politopo. Quindi una semplice condizione necessaria per la stabilità robusta è che le matrici A_i siano tutte Hurwitz.

Supponiamo ora che esista una matrice $P > 0$ che risolve simultaneamente le disequazioni lineari matriciali (LMI)

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad \forall i \quad (5.3)$$

Abbiamo dunque il risultato seguente.

Teorema 5.8 *Il sistema (5.1) è quadraticamente stabile se e solo se esiste $P > 0$ che soddisfa le LMI (5.3).*

Prova. La prova è immediata. Infatti, se esiste $P > 0$ che soddisfa le disequazioni, allora P soddisfa

$$\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i A_i \right)' P + P \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i A_i \right) = A(\sigma)' P + PA(\sigma) < 0$$

per ogni σ nel simplelso. Viceversa se il sistema è quadraticamente stabile, vale per definizione la diseuguaglianza precedente per ogni $\sigma \in \Lambda_N$ e quindi vale anche ai vertici.

■

Nel caso dunque di stabilità quadratica, la funzione di Lyapunov è

$$v(x) = x'Px \quad (5.4)$$

dove P risolve le disequazioni (5.3). Tale funzione di Lyapunov non dipende dai parametri incerti e quindi assicura risultati conservativi, cioè è ben possibile che il sistema sia robustamente stabile e che non esista alcuna funzione di Lyapunov quadratica comune.

Supponiamo ora di avere un insieme di matrici definite positive $\{P_1, \dots, P_N\}$ e consideriamo la funzione

$$v(x) := x' \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i P_i \right) x = x' P(\sigma) x \quad (5.5)$$

associata al sistema (5.1), la quale è una naturale generalizzazione della usuale funzione di Lyapunov per un sistema con incertezza politopica. Tale funzione, a differenza della funzione quadratica (5.4), dipende dai parametri incerti σ ed è quindi conosciuta in letteratura con il nome di *parameter dependent Lyapunov function*.

Teorema 5.9 *Supponiamo che esista un insieme di matrici definite positive $\{P_1, \dots, P_N\}$, e due matrici V e G di dimensioni compatibili in modo tale che siano soddisfatte le disequazioni*

$$\begin{bmatrix} A_i'G + G'A_i & P_i + A_i'V - G' \\ P_i + V'A_i - G & -V - V' \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \quad (5.6)$$

per ogni $i = 1, \dots, N$. Il sistema (5.1) è (asintoticamente) robustamente stabile (stabile per ogni $\sigma \in \Lambda_N$).

Prova. Prendiamo $\sigma \in \Lambda_N$, e moltiplichiamo ogni disequazione (5.6) per lo scalare non negativo σ_i e poi sommiamo tutte le disequazioni ottenute. Abbiamo:

$$\begin{bmatrix} A(\sigma)'G + G'A(\sigma) & P(\sigma) + A(\sigma)'V - G' \\ P(\sigma) + V'A(\sigma) - G & -V - V' \end{bmatrix} < 0 \quad (5.7)$$

Moltiplicando tale disequazione $[I \ A(\sigma)']$ a sinistra e per la trasposta a destra si ha:

$$A(\sigma)'P(\sigma) + P(\sigma)A(\sigma) < 0 \quad (5.8)$$

Il teorema è quindi dimostrato. ■

Si noti che le disequazioni (5.6) implicano

$$A_i'G + G'A_i < 0$$

dove però la matrice G non è assunta essere positiva definita nè simmetrica. Quindi la condizione sufficiente di stabilità robusta espressa nel Teorema 5.9 è meno conservativa di quella indotta dalla stabilità quadratica (Teorema 5.8).

5.5 Stabilizzazione robusta

In questa sezione consideriamo la retroazione di stato

$$u(t) = Kx(t)$$

per il sistema

$$\dot{x} = A_{in}x + B_{in}u$$

dove A_{in} e B_{in} sono matrici incerte. Lo scopo è quello di ottenere un sistema ad anello chiuso, caratterizzato dalla matrice $A_{in} + B_{in}K$, che sia asintoticamente stabile per ogni scelta della coppia (A, B) all'interno dell'insieme di incertezza che si considera (problema della stabilizzazione robusta). Consideriamo dapprima l'insieme di incertezza norm-bounded cioè

$$A_{in} = A + L\Delta N_1, \quad B_{in} = B + L\Delta N_2, \quad \|\Delta\| \leq \alpha$$

con Δ complesso. È facile riconoscere che la stabilità di $A + BK + L\Delta(N_1 + N_2K)$ si può ricondurre a quella del sistema con funzione di trasferimento

$$G_K(s) = (N_1 + N_2K)(sI - A - BK)^{-1}L$$

retroazionato con l'incertezza Δ . Quindi ricordando il Teorema del piccolo guadagno una condizione sufficiente si ottiene ricavando K tale che $\|G_K(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$. Del resto ciò vale se esiste $S > 0$ che risolve la disequazione

$$(A + BK)S + S(A + BK)' + \alpha^2(N_1 + N_2K)'(N_1 + N_2K) + L'L < 0$$

Ponendo $KS = W$ e sfruttando il Lemma di Schur si ha dunque

$$\begin{bmatrix} AS + BW + W'B' + SA' + L'L & SN_1' + W'N_2' \\ N_1S + N_2W & -\alpha^{-2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.9)$$

Grazie al Teorema 5.7 si ha facilmente il seguente risultato.

Teorema 5.10 *Se esiste $S > 0$ e W che soddisfano la LMI (5.9), allora $u = Kx$ con $K = WS^{-1}$ stabilizza robustamente il sistema incerto. Il sistema incerto è quadraticamente stabilizzabile se e solo se esiste $S > 0$ e W che soddisfano (5.9).*

■

Il secondo caso riguarda il sistema

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i x + \sum_{i=1}^N \sigma_i B_i u$$

dove $\sigma_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N \sigma_i = 1$. Grazie al Teorema 5.8 abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5.11 *Il sistema è quadraticamente stabilizzabile se e solo se esistono $S > 0$ e W che soddisfano*

$$A_i S + B_i W + S A_i' + W' B_i' < 0, \quad \forall i$$

Il tal caso la legge di controllo stabilizzante è $u = Kx$ con $K = WS^{-1}$.

In conclusione si noti che il Teorema 5.9 non può essere direttamente esteso in modo tale da fornire una condizione sufficiente di stabilizzabilità robusta.

Indice analitico

Convessità, 19

Disequazione di Lyapunov, 5

Entropia, 57

Fattorizzazione J -spettrale, 38

Fattorizzazione canonica, 30

Fattorizzazione doppia coprima, 27

Fattorizzazione inner-outer, 39

Fattorizzazione spettrale, 34, 36

Formula integrale di Cauchy, 58

Matrice Hamiltoniana, 31

Norma \mathcal{L}_2 , 45

Norma \mathcal{L}_∞ , 48

Norma \mathcal{L}_1 , 45

Norma \mathcal{L}_1 dell'uscita, 20

Norma \mathcal{L}_2 dello stato, 4

Norma \mathcal{L}_∞ dello stato, 16

Norma di Hankel, 53

Passività, 41

Raggio complesso, 65

Raggio reale, 67

Sistema aggiunto, 30

Sistemi passa tutto, 39

Stabilità ingresso-uscita, 9

Stabilità politopica, 69

Stabilità quadratica, 68

Teorema del piccolo guadagno, 64

Teorema di Fatou, 22

Teorema di Paley-Wiener, 22