Eserci tipici da compito di esame di Teoria dei Sistemi

Questo file è dedicato a tutti coloro che mi chiedono quali sono gli esercizi tipici di un compito di esame. Rispondo come segue.

- La natura del corso è essenzialmente concettuale. Qundi gli esercizi servono prevalentemente per la comprensione (e alla verifica della comprensone) della teoria. La teoria spiegata serve per presentare dei principi essenziali quali quello della stabilità e della retroazione e non per "risolvere esercizi".
- Uno studente che ha compreso la teoria non avrà difficolta' a crearsi (inventarsi) infiniti esercizi o esempi usando lo stesso meccanismo che usa un docente.
- È a disposizione un numero enorme di eserciziari, molti dei quali sono in forma elettronica in rete (basta usare un qualunque motore di ricerca).
- **Sconsiglio decisamente** tutti quelli che devono sostenere l'esame di intraprendere l'approccio "eserciziesco" alla materia (ovvero quello di imparare a fare molti "esercizi tipo" in modo meccanico senza preoccuparsi della comprensione dei concetti). Tale tipo di preparazione superficiale non è accettabile in un corso del curriculum passante per l'accesso alla laurea specialistica.
- Detto quanto sopra, mi riprometto di mantenere aggiornato questo documento, inserendo temi proposti all'esame del Corso di Teoria dei Sistemi.
- Si raccomanda di fare riferimento anche agli esercizi proposti nelle esercitazioni con voto, molti dei quali sono adatti anche come test d'esame (alcuni sono riportati anche in questo documento).

Quesiti “tipici” o recenti proposti in compiti d’esame di Teoria dei Sistemi

1. Scrivere le equazioni per l’implementazione digitale (sistema a tempo campionato) del regolatore del primo ordine avente funzione di trasferimento
$$F(s) = k\frac{s+b}{s+a}$$
dato il generico passo di campionamento T.

2. Si consideri il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - (x_1(t)-1)^3 + (x_1(t)-1) + 1 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t)\sqrt{x_2(t)} \end{aligned}$$
e si calcoli al generica coppia di equilibrio avendo assunto $\xi = \bar{x}_1 >$ quale parametro. Si linearizzi il sistema in tale punto di equilibrio e dica per quali valori di ξ il sistema è localmente stabile.

3. Dato il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t)x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (4+\mu)x_1(t) + x_1(t)^3 - 2x_2(t) \end{aligned}$$
dove μ è un parametro non noto **ma costante nel tempo**, si determini il margine di stabilità robusta ovvero l’estremo superiore dei valori di M per cui il sistema è stabile nell’origine per tutti i valori di μ tali che
$$|\mu| \le M$$

4. Dato il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$
con
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$
si determini un regolatore tramite osservatore dello stato che assegni come autovalori del regolatore $\Lambda_c = \{-2, -1\}$ e come autovalori dell’osservatore $\Lambda_o = \{-3, -4\}$.

5. Dato il sistema non lineare
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 3x_1(t)^3 + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)[1 - x_1(t)^2] - 2x_2(t) \end{aligned}$$
si analizzi la stabilita’ del sistema nell’origine tramite la funzione di Lyapunov
$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

6. L’osservabilitaǹei sistemi a tempo continuo.

7. Dato il sistema lineare invariante $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
Si dica quale è l’insieme delle condizioni iniziali $x(0)$ per cui la corrispondente soluzione $x(t)$ converge a zero.

8. Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) - x_1(t)x_2(t) - u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_2(t) + 2\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

linearizzare il sistema nel punto di equilibrio corrispondente a $\bar{x}_2 = 1$. Progettare un regolatore stabilizzante basato sull'osservatore assegnando autovalori $\Lambda_{reg} = \{-1, -2\}$ e $\Lambda_{oss} = \{-3, -4\}$.

9. Scrivere le equazioni del sistema discreto per la realizzazione in modo digitale del regolatore la cui funzione di trasferimento (a tempo continuo) è

$$F(s) = K\frac{(1 + as)}{(1 + bs)(1 + \tau s)}$$

10. Dato il sistema nonlineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -F(x_1(t)) + x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= u(t)\end{aligned}$$

dove $F(x_1)$ è una funzione differenziabile con continuità. Si determini la generica coppia di equilibrio, assunto $x_1 = \xi$ come parametro. Si determini una retroazione dello stato $u = K(\xi)x(t) = k_1(\xi)x_1(t) + k_2(\xi)x_2(t) + k_3(\xi)x_3(t)$ (necessariamente funzione di ξ) in modo tale che qualunque sia il valore della costante ξ, il sistema linearizzato abbia autovalori $\{-1, -1, -1\}$.

11. Si consideri il sistema le cui matrici (A, B, C) sono

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1\\ \beta\\ -2\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 2\end{bmatrix},$$

Si risponda alle seguenti domande.

- Per quali valori di α e β la terna (A, B, C) é una realizzazione minima?
- Per quali valori di α e β il sistema è BIBO (esternamente) stabile?
- Per quali valori di α e β il sistema é asintoticamente stabile?
- Per quali valori di α e β si possono assegnare gli autovalori $\{-2, -3, -4\}$ tramite un opportuno regolatore lineare a retroazione dell'uscita?
- Per quali valori di α e β si possono assegnare gli autovalori $\{-2, -3, -4\}$ tramite un opportuno regolatore lineare a retroazione dello stato?

12. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) - (x_1(t) - 1)^3 + (x_1(t) - 1) + 1\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_3(t)\sqrt{x_2(t)}\\ \dot{x}_3(t) &= -4x_3 + 4u(t)\end{aligned}$$

e si calcoli al generica coppia di equilibrio avendo assunto $\xi = \bar{x}_1 >$ quale parametro. Assunta l'uscita

$$y(t) = \frac{x_1(t)}{1 + x_1(t)/5}$$

Si determini una retrozione basata sull'osservatore in modo tale che assegnando autovalori $\{-8, -8, -8\}$ all'osservatore e autovalori $\{-1, -4, -4\}$ al regolatore.

13. Sia dato il seguente sistema oscillante
$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
con uscita
$$y(t) = q_1(t).$$
   - Sia scriva la rappresentazione di stato del sistema.
   - Si dica quali sono i modi del sistema.
   - Si dica quali sono gli zeri del sistema.
   - Si calcoli la risposta impulsiva.
   - Si dica (qualitativamente, cioè senza fare calcoli di costanti) come è fatta l'uscita del sistema in risposta libera.

* Un impianto costituito da un compressore–condotto–serbatoio è descritto, per piccole variazioni rispetto al punto di equilibrio, dalle equazioni
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= B(\dot{\Psi} x_1(t) - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{B}(x_1(t) - \dot{\Gamma} x_2(t)) \end{aligned}$$
dove $\dot{\Psi}$ e $\dot{\Gamma}$ sono parametri che rappresentano le pendenze delle caratteristiche del compressore e della valvola di uscita del serbatoio. Considerazioni fisiche assicurano che $\dot{\Psi}\dot{\Gamma} < 1$ e $\dot{\Gamma} > 0$. La stabilità dipende dal punto di lavoro (che è funzione della chiusura della valvola) in quanto i parametri $\dot{\Psi}$ e $\dot{\Gamma}$ variano in funzione di tale punto. Dire sotto quali condizioni su $\dot{\Psi}$ e $\dot{\Gamma}$ il sistema è asintoticamente stabile (localmente).

14. La rete anticipatrice $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+4)}$ è associata al sistema lineare invariante
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -4x(t) + u(t) \\ y(t) &= -3x(t) + u(t) \end{aligned}$$
Scrivere il sistema a tempo campionato per l'implementazione digitale con passo di campionamento $T > 0$.

15. Si considerino le equazioni di un regolatore PD
$$F(s) = K_P + \frac{K_D s}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$
con K_P, K_D, ξ e ω_0 parametri positivi assegnati. Si determini una realizzazione minima per tale regolatore.

16. Si consideri il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_1(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$
Si costruisca un regolatore basato sulla retroazione dello stato stimato allocando gli autovalori dell'osservatore in $-10, -8$ e gli autovalori del regolatore in $-2, -4$.

17. Si consideri il seguente sistema
$$\begin{aligned} \tau_1 \dot{T}_1(t) &= u(t) - \beta(T_1(t) - T_2(t)) \\ \tau_2 \dot{T}_2(t) &= \beta(T_1(t) - T_2(t)) - \gamma T_3(t) \\ y(t) &= T_2(t) \end{aligned}$$
con $u(t)$ e T_3 ingressi noti. Si ricostruisca la variabile $T_1(t)$ tramite un osservatore asintotico con autovalori $-\xi_1$ e $-\xi_2$.

18. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= -4 + 20\frac{T(t)}{1+4T(t)}\\ \dot{T}(t) &= -T(t) + u(t)\end{aligned}$$

Si scriva la rappresentazione di stato del sistema e si detemini la generica condizione di equilibrio.

Si stabilizzi il sistema in un generico punto di equilibrio assegnando il polinomio caratteristico $(s+1)^3$ tramite retroazione dello stato.

Si stabilizzi il sistema tramite retroazione dello ststo stimato assegnando il medesimo polinomio caratteristico al regolatore e autovalori dell'osservatore pari a $(-4, -4, -4)$.

19. Si realizzi la funzione di trasferimento

$$f(s) = -\frac{as}{1+\tau s}$$

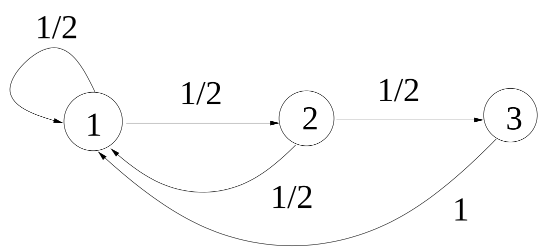
con amplificatori operazionali, condensatori e resistenze, indicando i loro valori in funzione di a e τ.

20. Scrivere le equazioni per l'implementazione digitale del regolatore del primo ordine avente funzione di trasferimento

$$F(s) = k\frac{s+b}{s+a}$$

dato il generico passo di campionamento T.

21. Si consideri la catena di Markov le cui probabilitá di transizione sono quelle riportate nella figura. Determinare la distribuzione asintotica delle probabilita nei tre stati.



22. Si realizzi la funzione di trasferimento

$$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_1)}$$

tramite un dispositivo digitale fissato il passo di campionamento $T > 0$.

23. Realizzare il filtro precedente tramite un dispositivo analogico.

24. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= q_0 - \alpha s(t)\sqrt{h(t)}\\ \dot{s}(t) &= -k(h(t)-\bar{h})\end{aligned}$$

dove $\bar{h} > 0$ è un riferimento e dove α e q_0 sono costanti assegnate. Si determini il punto di equilibrio e si dica per quali valori di k il sistema linearizzato ha risposta libera priva di oscillazioni (anche se smorzate).

25. La velocità di convergenza di un sistema lineare invariante $\dot{x} = Ax$ è un parametro $\beta > 0$ per cui ogni modo del sistema $e^{\lambda t}$ è tale che $Re(\lambda) \leq -\beta$. Dato il sistema lineare

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2\\ -1\end{bmatrix} \tag{1}$$

determinare la massima velocità di convergenza ottenibile tramite retroazione dello stato.

26. Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^3\end{aligned}$$

si dimostri l'instabilità nell'origine (si usi la funzione di Cetaev $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$).

27. Si consideri il sistema

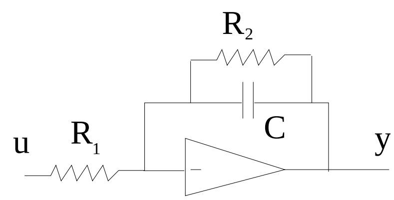
$$\begin{aligned}\dot{T}_1(t) &= -\alpha(T_1(t) - T_2(t)) + q(t)\\ \dot{T}_2(t) &= +\beta(T_1(t) - T_2(t)) - \gamma(T_2(t) - T_3(t))\end{aligned}$$

dove α β e γ sono parametri, $q(t)$, $T_3(t)$ sono grandezze note e $T_2(t)$ è l'uscita misurata. Si scrivano le equazioni di un osservatore per la stima di $T_1(t)$.

28. Dato il sistema $\dot{x}(t) = u(t)$ si determini il regolatore ottimo secondo la cifra di merito

$$\int_0^\infty [x(t)^2 + ru(t)^2]dt.$$

29. Scrivere la funzione di trsaferimento del dispositivo in figura. Determinare i valori dei componenti affinchè: per $u(t) \equiv \bar{u}$ si abbia, a regime, $y_\infty = -\bar{u}$; l'amplificazione della risposta a



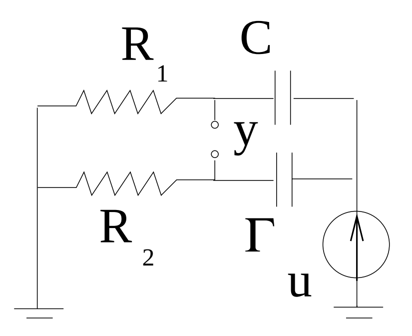
regime al segnale $\cos(2t)$ sia $A = 1/2$.

30. Data

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si calcolie^{At}.

31. Per quali condizioni iniziali e per quali valori della capacità Γ si ha che la tensione y ai morsetti del circuito in figura è nulla qualsiasi sia $u(t)$? (sugg: la funzione si trasferimento



deve essere nulla, ovvero i modi raggiungibili devono essere non osservabili).

32. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} w & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con w parametro costante $1 \leq w \leq 2$, e u ingresso noto. Si determini un osservatore dello stato (avente matrici funzioni di w) tale che l'errore di stima $e(t)$ converga a zero (per qualsiasi w) con modi a parte reale inferore a -1.

33. Determinare una realizzazione minima (A, B, C) della funzione di trasferimento

$$\frac{s+1}{(s+3)(s+2)}$$

avente matrice di stato A in forma diagonale.

34. Si determini una realizzazione minima della matrice (1×2) di funzioni di trasferimento

$$F(s) = \frac{\left[\begin{array}{cc} s+3 & s \end{array}\right]}{s^2+3s+2}$$

(sugg: si consideri il sistema duale ...).

35.

36. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalle matrici

$$A = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]$$

Si determini un regolatore a retroazione dell'uscita che assegni complessivamente gli autovalori $-1, -2, -5, -6$.

37. Dato il sistema "levitatore"

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= g - k\frac{I^2(t)}{y^2(t)}, \\ L\dot{I}(t) &= -RI(t) + V(t) \end{aligned}$$

dove V è l'ingresso e y é l'uscita, si determini un regolatore stabilizzante a retroazione dell'uscita assegnando gli autovalori a piacere. Si scelga il punto di equilibrio tale che $\bar{y} = \xi$, dove ξ é un parametro.

38. Costruisciti 100 esercizi simili ai precedenti (per constatare che è più semplice di quanto sembra). Impara costruirsi dei semplici esempietti (ma non banali) è utilissimo per ... imparare ad imparare).