Appello di Controlli Automatici 1, 02 Dicembre 2002

1. Si consideri il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   Analizzare la stabilità del sistema. Calcolare la funzione di trasferimento $F(s)$. Sia dato il controllo $u(s) = k[\bar{y}(s) - y(s)]$, $k \in \Re$, dove $\bar{y}$ è il riferimento. Disegnare lo schema a blocchi. Determinare per quali valori di k il sistema reazionato è stabile asintoticamente.

2. Si consideri il sistema la cui funzione di trasferimento è

$$F(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

   Calcolarne la risposta al gradino con condizioni iniziali nulle. Dato l'ingresso sinusoidale $u(t) = sin(\omega t)$ si dica come varia il fattore di amplificazione della risposta a regime. Si dica come varia lo sfasamento dell'uscita a regime al variare di $\omega \geq 0$. Si dica per quale valore tale sfasamento è massimo.

3. Data una matrice nella forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

   Si calcoli il polinomio caratteristico. Si verifichi che ogni autovettore associato all'autovalore λ è del tipo

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

   Si usi questa proprietà per calcolare e^{At}, nel caso in cui la matrice ammetta due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Appello di Controlli Automatici 1, 19 Dicembre 2002

1. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)[x_1(t) - x_1^2(t)] - 1 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

   Si determinino i due stati di equilibrio $x_A \in R^2$ e $x_B \in R^2$ corrispondenti al valore dell'ingresso $\bar{u} = \frac{16}{3}$.

   Si analizzi la stabilità di ciascuno di tali punti di equilibrio (si assuma che x_A è lo stato la cui prima componente è minore della prima componente di x_B).

2. Si consideri il sistema la cui funzione di trasferimento è

$$F(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 + 3s + 2}$$

   Calcolarne la risposta al gradino unitario con condizioni iniziali nulle.

3. Quali sono le condizioni sugli autovalori di una matrice A affinchè esista $\bar{k} \geq 0$ tale che, per $k \geq \bar{k}$, si abbia $A^k = 0$? Giustificare la risposta.

Appello di Controlli Automatici 1, 26 Marzo 2003

Esercizio 1 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

- Si analizzi la stabilità del sistema.
- Si calcoli la funzione di trasferimento.
- Si consideri il regolatore
$$u(t) = ky(t)$$
e si dica per quali valori di k il sistema risulta stabile ad anello chiuso.

Esercizio 2

Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\sqrt{x_1(t) - x_2(t)} + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - \sqrt{x_2(t)} \end{aligned}$$

(il modello è valido per $x_1(t) \geq x_2(t)$ e $x_2(t) \geq 0$).

- Si determinino le condizioni di equilibrio per $\bar{u} = 1$.
- Si verifichi la stabilità di tale punto di equilibrio.

Esercizio 3 Si calcoli la risposta a regime del sistema avente funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

relativamente all'ingresso $u = cos(t) + 2$.

Appello di Controlli Automatici 1, 08 Settembre 2003

Esercizio 1 Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 1 - \sqrt{x_1(t)}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

- si linearizzari il sistema nel punto di equilibrio corrispondente a $\bar{x}_1 = 1$
- Si calcoli la funzione di trasferimento.
- Si consideri il regolatore
$$u(t) - \bar{u} = k(y(t) - \bar{y})$$
e si dica per quali valori di k il sistema linearizzato risulta stabile ad anello chiuso e non presenta modi oscillanti.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

e se ne calcoli la risposta al gradino.

Appello di Controlli Automatici 1, 03 Dicembre 2003

Esercizio 1 Si consideri il sistema la cui descrizione ingresso–uscita è

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + s - \alpha} u(s),$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro, e il regolatore

$$u(s) = \frac{k}{s+1} \left(\bar{y}(r) - y(s)\right)$$

- Si scriva la funzione di trasferimento ad anello chiuso dall'ingresso $\bar{y}(s)$ all'uscita $y(s)$.
- Si dica per quali valori dei parametri k e $\alpha > 0$ il sistema risulta stabile ad anello chiuso.

Esercizio 2 Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + u(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 1 \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

- Si determinino le condizioni di equilibrio assunto $\bar{u} > 0$ quale parametro.
- Si linearizzari il sistema nel punto di equilibrio.
- Si dica per quali valori di $\bar{u} > 0$ il sistema linearizzato non ammette modi oscillanti (anche se smorzati).
- Si calcoli la risposta al gradino, con condizioni iniziali nulle, del sistema linearizzato (si fissi a piacimento un valore di $\bar{u} > 0$).

Esercizio 3 La stabilità nei sistemi lineari invarianti.

Appello di Controlli Automatici 1, 07 Gennaio 2004

Esercizio 1 Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)^2 + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)u(t) + x_2^2(t) \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

- Si linearizzari il sistema nel punto di equilibrio corrispondente a $\bar{x}_1 = 1$.
- Si calcoli la funzione di trasferimento.
- Si consideri il regolatore
$$u(t) - \bar{u} = k(y(t) - \bar{y})$$
e si dica per quali valori di k il sistema linearizzato risulta stabile.

Esercizio 2

Si consideri il sistema il cui rapprorto ingrsso–uscita è espresso dalla relazione

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + s}\, u(s)$$

Si consideri il regolatore

$$u(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s}\, (r(s) - y(s))$$

dove $r(s)$ è il riferimento.

- Si dica per quali valori di α e β il sistema ad anello chiuso risulta stabile asintoticamente.
- Fissati α e β fra i valori che garantiscono stabilità asintotica, assumendo $e(s) = r(s) - y(s)$ come uscita e $r(s)$ come ingresso, si dica quanto vale il limite
$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)$$
della risposta al gradino unitario (cioè si assumano condizioni iniziali nulle e si assuma che $r(t) = 1$ per $t > 0$).

Esercizio 3

Si descriva la risposta forzata di un sistema lineare invariante avente funzione di trasferimento razionale strettamente proporia $F(s)$ all'ingresso test

$$u(t) = e^{\sigma t},$$

dove σ è un parametro complesso.

Appello di Controlli Automatici 1, 25 Marzo 2004

Esercizio 1 Si consideri il sistema la cui relazione ingresso–uscita è

$$y(s) = \frac{1}{s-2}u(s)$$

e il regolatore

$$u(s) = \frac{s+\alpha}{s+\beta}(r(s) - y(s))$$

- Si determini l'insieme dei valori di α e β per i quali il sistema risulta asintoticamente stabile ad anello chiuso.
- Si dica per quali valori (se ne esistono), detto $e(s) = r(s) - y(s)$, e $r(s) = 1/s$ si ha che

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.$$

Esercizio 2 Si consideri il sistema rappresentato dall'equazione non lineare

$$\ddot{y}(t) = -\dot{y}(t) - \gamma\frac{y(t)}{1+y^2(t)}$$

- Si scriva il sistema in variabili di stato e lo si linearizzi.
- Si dica per quali valori di γ il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile e la risposta libera e non presenta oscillazioni (anche se smorzate).

Esercizio 3 Domanda di teoria

Appello di Controlli Automatici 1, 17 Giugno 2004

Esercizio 1 Si consideri il sistema la cuifunzione di trasferimento è

$$y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Si determini la risposta al gradino $y(t)$. Si determini il massimo di tale risposta

$$y_{max} = \max_{t \geq 0} y(t)$$

Esercizio 2 Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) - x_1(t)x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_2(t) + 2 \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

si linearizzi il sistema nel punto di equilibrio tale che $\bar{x}_1 = 1$. Dato il regolatore proporzionale

$$u(t) - \bar{u} = k(y(t) - \bar{y})$$

si determini l'insieme dei valori di k stabilizzanti (asintoticamente).

Esercizio 3 Si consideri il sistema rappresentato dall'equazione non lineare

$$\ddot{y}(t) = -\dot{y}(t) - \gamma \frac{y(t)}{1 + y^2(t)}$$

- Si scriva il sistema in variabili di stato e lo si linearizzi.
- Si dica per quali valori di γ il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile e la risposta libera e non presenta oscillazioni (anche se smorzate).

Esercizio 4 La stabilitá nei sistemi lineari.

Appello di Controlli Automatici 1, 23 Settembre 2004

Esercizio 1 Dato il sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \sin(x_1(t)) - 2x_2(t) - (x_2(t))^3 + x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -x_3(t) - u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

- Si linearizzi il sistema nel punto di equilibrio tale che $\bar{x}_1 = \xi$, dove ξ è un parametro.
- Si consideri il punto di equilibrio associato al valore $\xi = 0$, e si consideri il regolatore proporzionale
$$u(t) - \bar{u} = k(y(t) - \bar{y})$$
si determini l'insieme dei valori di k stabilizzanti (asintoticamente).

Esercizio 2 Si consideri il sistema rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$f(s) = \frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- Si determini la risposta in frequenza del sistema.
- Si dica per quali valori di ω l'amplificazione a regime di un segnale del tipo $cos(\omega t)$ ha il suo valore massimo.

Esercizio 3 Si descriva la struttura della matrice e^{At} in presenza di autovalori reali e complessi della matrice A.

Appello di Controlli Automatici 1, 11 Luglio 2005

Esercizio 1 Dato il sistema

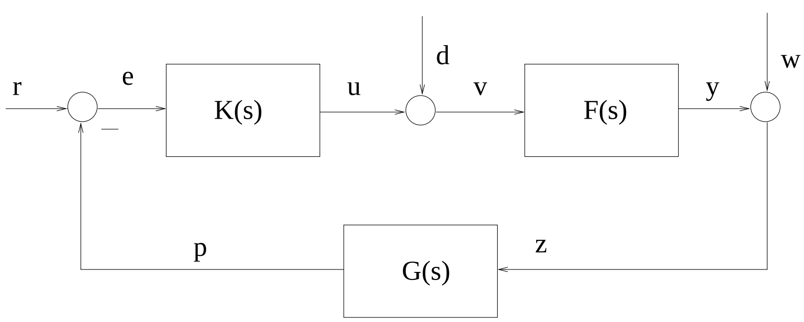
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t)^2 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

- Si determinino le condizioni di equilibrio assunto $\bar{x}_2 = \xi > 0$ quale parametro.
- Si determinino i valori ammissibili del guadagno k del regolatore

$$(u - \bar{u}) = k(x_2 - \bar{x}_2)$$

  come funzione di ξ in modo tale che il sistema sia stabile e la risposta al gradino del il sistema linearizzato con tale regolatore non presenti oscillazioni (anche se smorzate).

Esercizio 2 Si consideri lo schema di Figura dove



$$G(s) = 1, \quad K(s) = k$$

e dove

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 10s}$$

Si assuma $r = 0$ e $w = 0$. Si dica per quali valori di k il sistema complessivo ha contemporaneamente le seguenti proprietà:

- è stabile asintoticamente;
- la risposta y_∞ a regime ad un ingresso costante $\bar{d}$ è tale che $|y_\infty| \leq 0.02\bar{d}$.

Esercizio 3 Definizione e proprietà della matrice e^{At}.

Appello di Controlli Automatici 1, 06 Dicembre 2005

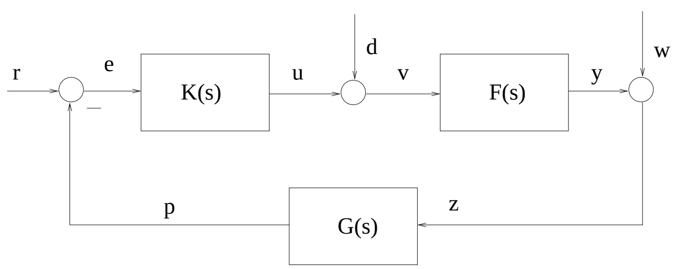
Esercizio 1 Si consideri il sistema non lineare rappresentato dall'equazione del secondo ordine e dalla trasformazione di uscita seguente

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) &= \gamma \sin(\theta(t)) + u(t) \\ y(t) &= \sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

dove $u(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ è l'uscita.

- Si scriva una rappresentazione di stato equivalente (un sistema di equazioni differenziali del primo ordine).
- Si determini il sistema approssimante lineare nel generico punto di equilibrio assunto $\bar{\theta}$ quale parametro assegnato.
- Si analizzi la stabilità di tale sistema lineare nel punto corrispondente a $\bar{\theta} = 0$.
- Detti $w(t) = y(t) - \bar{y}$ e $v(t) = u(t) - \bar{u}$ ingresso e uscita traslati rispetto ai valori di equilibrio, si consideri il regolatore
$$v(s) = k\, \frac{s+\beta}{s+\alpha}\, w(s).$$
Si determini l'insieme dei valori di k, α e β per cui il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

Esercizio 2 Si consideri lo schema di Figura dove $G(s) = 1$, e dove



$$K(s) = k, \qquad F(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Si determini l'insieme dei valori di k per cui tutte le seguenti condizioni sono verificate.

- **C1:** I poli ad anello chiuso hanno tutti parte reale non superiore a $-1/2$ ($Re(\lambda_i) \le -1/2\ \forall \lambda_i$).
- **C2:** Gli eventuali modi oscillanti ad anello chiuso (anche se smorzati) hanno pulsazione non superiore a 2 ($\omega \le 2$).
- **C3:** L'amplificazione A_{ω_0} della risposta a regime dell'uscita $e(t)$ all'ingresso $r(t) = \cos(\omega_0 t)$, assunto $d = 0$ e $w = 0$, per $\omega_0 = 1$ è non superiore a 1 ($A_1 \le 1$)

Esercizio 3

Sistemi di equazioni differenziali.

Appello di Controlli Automatici 1, 05 Dicembre 2006

Esercizio 1 Si consideri il sistema lineare espresso dalla relazione ingresso–uscita relazione in

$$y(s) = \frac{1}{s}u(s)$$

retroazionato dal regolatore

$$u(s) = \frac{s+6}{s+4}[\hat{r}(s) - y(s)]$$

dove $\hat{r}(s)$ è un riferimento filtrato, ovvero ottenuto applicando un filtro passa-basso al riferimento $r(s)$, precisamente

$$\hat{r}(s) = \frac{4}{s+4}r(s).$$

- Si disegni lo schema a blocchi del sistema.
- Si analizzi la stabilità del sistema.
- Si calcoli la funzione di trasferimento da $\hat{r}(s)$ a $y(t)$ e la funzione di trasferimento da $r(s)$ a $y(s)$.
- Si calcoli la risposta di $y(t)$ con condizioni iniziali nulle dovuta ad un impulso unitario in r.

Esercizio 2 Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) &= \sin(\theta(t)) + z(t)\\ \dot{z}(t) &= -\alpha z(t) + u(t)\end{aligned}$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro.

- Si scriva una rappresentazione di stato equivalente.
- Si determini il sistema approssimante lineare nel punto di equilibrio corrisondente a $\bar{\theta} = 0$.
- Si consideri il controllo in retroazione

  $$u(t) = -[\theta(t) + 2\dot{\theta}(t)]$$

  e si determinino i valori del parametro $\alpha \geq 0$ (se ne esistono) per cui il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Domanda di teoria.

Appello di Controlli Automatici 1, 06 Luglio 2007

Esercizio 1 Si consideri il sistema la cui funzione di trasferimento è

$$F(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s}$$

Si determini l'insieme di tutti i regolatori proporzionali ($u(s) = k(y(s)-r(s))$) stabilizzanti. Si termini l'insieme di tutti i regolatori proporzionali–derivativi ($u(s) = (\alpha + \beta s)(y(s) - r(s))$) stabilizzanti.

Esercizio 2 Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = (1 + 2t)cos(t)$$

Esercizio 2 Domanda di teoria.

Appello di Controlli Automatici 1, 07 Dicembre 2007

1. Si consideri un sistema lineare invariante del secondo ordine la cui risposta al gradino unitario ($u(t) \equiv 1$) con condizioni iniziali nulle è

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$$

- Si determini la funzione di trasferimento del sistema.
- Si determini l'adamento in funzione di ω dell'amplificazione A_ω della risposta in frequenza.
- Si determini il massimo valore di A_ω.

2. Sia dato il sistema descritto dall'equazione

$$\ddot{\theta}(t) = \rho \sin(2\theta(t)) - \alpha \sin(\theta(t)) - \beta\dot{\theta}(t) + u(t)$$

con uscita $y(t) = \theta(t)$ dove α e β sono costanti note positive.

- Si determinino le condizioni di equilibrio corrispondenti a $\bar{\theta} = 0$.
- Si dica per quali valori di $\rho > 0$ il sistema linearizzato in tale punto di equilibrio è asintoticamente stabile.
- Assumendo ora $\rho > 0$ fissato, si consideri il regolatore

$$u - \bar{u} = -\kappa(y - \bar{y}),$$

dove $\bar{u}$ e $\bar{y}$ sono rispettivamente ingresso e uscita di equilibrio. Si dica per quali valori di κ é garantita la stabilità asintotica del sistema linearizzato.

3. Domanda di teoria.