**Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi e del Controllo - 23 gennaio 2015**
Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non risolubili. In tal caso spiegare perché.

1. **Margine di guadagno e robustezza**. Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + BEx(t),$$

con $\|E\| \leq \mu$ e con $A$ che soddisfa

$$A^T P + PA = -Q,$$

con $P$ e $Q$ simmetriche definite positive, si dimostri che per $\gamma > 0$ sufficientemente grande il controllo $u(t) = -\gamma B^T Px(t)$ è robustamente asintoticamente stabilizzante.

2. **Percorso minimo**. Dato un grafo a sei nodi collegati da archi con pesi $Pa(1,4) = 5$, $Pa(1,2) = 2$, $Pa(1,5) = 3$, $Pa(2,3) = 3$, $Pa(2,5) = 2$, $Pa(3,5) = 1$, $Pa(3,6) = 1$, $Pa(4,5) = 1$, $Pa(5,6) = 4$, si determini la funzione cost–to–go:

$$V(i) = \{\text{costo del cammino minimo per arrivare al nodo 1 partendo dal nodo } i\}.$$

3. **Value set**. Si consideri la retroazione unitaria negativa di $F(s)$ e $G(s)$:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}, \qquad G(s) = \frac{1}{s+1},$$

con $1 \leq a \leq 2$ e $1 \leq b \leq 2$. Si disegni il value set del polinomio caratteristico ad anello chiuso alla frequenza $\omega = 1$.

4. **Identificazione**. Sia dato il modello

$$y(k) = p_1 y(k-1) + p_2 y(k-2) + q_1 u(k-1) + q_2 u(k-2)$$

e i dati $u(0), u(1), u(2), u(3), u(4), u(5), u(6), u(7)$ e $y(0), y(1), y(2), y(3), y(4), y(5), y(6), y(7)$, $y(8)$. Si scrivano le matrici $\Phi$ e $\Gamma$ per la stima di $\theta = [p_1 \ p_2 \ q_1 \ q_2]$ nel senso dei minimi quadrati: min $\|\Phi\theta - \Gamma\|^2$.

5. **Robustezza**. Si consideri la famiglia di polinomi

$$(s^2 - 1)(s + 2) + p,$$

con $p$ parametro incerto ma limitato: $|p| \leq 1$. Si dica se la proprietà di stabilità è verificata in modo robusto.

6. **Ping Pong**. Un punto al tempo $t_0$ ha coordinate $(x_0, y_0)$ con $y_0 > 0$ e si muove con velocità **costante** $\dot{x} = v$, $\dot{y} = w < 0$ (ovvero verso l'asse $x$). Una paletta di ampiezza $2a$ ha il centro in posizione $z_0$ sull'asse $x$ (bordo di un tavolo di larghezza $2b$) e si può muovere con velocità controllata lungo l'asse $x$: detta $z$ l'ascissa del centro della paletta, si ha

$$\dot{z}(t) = u(t).$$

Progettare una legge di controllo (ampia scelta) in modo tale che

- se si prevede che il punto raggiunga l'asse $x$ nell'intervallo $[-b, b]$ allora incontri la paletta;
- altrimenti la paletta deve posizionarsi al centro del tavolo: $z = 0$.

7. **Controllo ottimo**. Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, siano $Q = \text{diag}\{1, 1\}$, $R = 1$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare il controllo a retroazione dello stato che ottimizza

$$\int_0^\infty [x^\top(t)Qx(t) + Ru^2(t)]dt.$$