Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi e del Controllo - 20 Dicembre 2011 [1]

1. **Osservatore.** Si consideri l'osservatore a cui equazione è

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} y \tag{1}$$

per un sistema del secondo ordine la cui uscita e' $y = x_1$. Determinare A, B, C del sistema.

2. **Cancellazioni.** Dato il sistema con matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determinare una retroazione dello stato $u = Kx$ in modo tale che la funzione di trasferimento del sistema sia

$$F(s) = \frac{1}{s+4}$$

Il sistema é asintoticamente stabile?

3. **Cetaev.** Si dimostri la instabilitá del pendolo inverso

$$\ddot{\theta}(t) = sin(\theta(t))$$

nel punto di equilibrio $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = 0$ utilizzando la funzione di Cetaev $V = \theta\dot{\theta}$.

4. **Operazionali.** Realizzare con operazionali la funzione di trasferimento

$$\frac{\kappa s}{1 + \tau s}$$

5. **Vasche** Sia dato il sistema idraulico a due vasche

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= -\gamma r(t)\sqrt{h(t)} + \bar{q} \\ \dot{r}(t) &= \kappa[h(t) - \bar{h}] \\ \dot{s}(t) &= \gamma r(t)\sqrt{h(t)} - (2\gamma) r(t)\sqrt{s(t)} \end{aligned}$$

dove $\bar{q} > 0$ é la portata entrante, $\bar{h} > 0$ il riferimento di livello della vasca superiore, $h(t)$ e $s(t)$ sono i livelli delle vasche, $r(t)$ é l'apertura di una valvola di regolazione intermedia.

Si assuma $\gamma > 0$. Si linearizzi il sistema. Si dica per quali valori di κ, costante di regolazione, il sistema é stabile asintoticamente (guardare la matrice !!!!).

6. **Funzione di Lyapunov di controllo.** (Diventa tale se si applica un controllo). Si consideri il sistema del primo ordine

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)$$

con $f(0) = 0$. Si assuma che $|f(x)| \leq L|x|$, L costante positiva. Si faccia vedere che $V(x) = x^2$ diventa una funzione di Lyapunov per il sistema se si applica il controllo $u = -\kappa x$ con κ "grande". Quanto grande??