Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi e del Controllo - 12 Gennaio 2012 [1]

1. **Margine di guadagno.** Si consideri il sistema la cui equazione è

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \tag{1}$$

Si determini un regolatore lineare stabilizzante a retroazione dello stato $u = k_1x_1 + k_2x_2$ che abbia margine do guadagno infinito ovvero tale che

$$u = \mu[k_1x_1 + k_2x_2]$$

garantisca la stabilità asintotica per ogni $\mu \geq 1$.

2. **Braccio rotante sbilanciato** Dato il sistema

$$\ddot{\theta}(t) = sin(\theta(t)) + c(t)$$

determinare una retroazione $c(t) = \phi(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ in modo tale che il sistema sia globalmente asintoticamente stabile (ovvero $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \to 0$ da ogni condizioni iniziale).

3. **Punti di equilibrio stabili**. Si determino le coppie di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$, con $\bar{x}_1 > 0$ e $\bar{x}_2 > 0$ per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)^2 - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

Dire per quali di queste coppie $(\bar{x}, \bar{u})$ il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.

4. **Robustezza**. Sia data la famiglia di sistemi lineari in cui la cui matrice A é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1+\Delta \end{bmatrix} \qquad |\Delta| < \mu$$

Sia $\mathcal{P}$ = stabilitá asintotica. Dire per quali valori di $\mu > 0$ tale proprietá é robusta. (Non sono ammesse domande su questo esercizio).

5. **Trovare una funzione di Lyapunov**. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)(1 + x_2(t)^2) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) - x_2(t)^3 \end{aligned}$$

Si deteminini i punti di equilibrio e, ove possibile, una funzione di Lyapunov.

6. **Regolatore di posizione "dolce"**. Si consideri il sistema

$$\dot{y}(t) = v(t)$$

e l'indice di prestazione

$$\int_0^\infty (y^2(t) + v^2(t) + \dot{v}(t)^2)dt$$

in cui é pesata l'accelerazione $\dot{v}(t)$. Si scriva l'equazione di Riccati del problema. (É necessario introdurre una nuova equazione).

7. **Sensori ed attuatori su sistema idraulico**. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) - \alpha x_2(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

$\alpha > 0$ "piccolo". Si dispone di un solo attuatore (pompa), quindi possono essere attivi, in modo esclusivo: A1) u_1 (quindi $u_2 = 0$), oppure A2) u_2 (quindi $u_1 = 0$). Si dispone anche di un solo sensore di livello. Quindi di deve scegliere se: S1) $y(t) = x_1(t)$ oppure se S2) $y(t) = x_2(t)$.

Volendo autovalori del sistema con parte reale $Re(\lambda) < \alpha$, quali sono le scelte corrette?