

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 10 Giugno 2010 - ¹

1. **Controllo di livelli.** Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2\sqrt{x_1(t)} + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \sqrt{x_1(t)} - \sqrt{x_2(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= \sqrt{x_1(t)} - 2\sqrt{x_3(t)} + 1\end{aligned}$$

si determini il generico punto di equilibrio preso $\bar{x}_1 = \theta^2 > 0$ quale parametro. Si determini:
a) per quali valori di θ è possibile stabilizzare il sistema linearizzato tramite retroazione dello stato; b) per quali valori di θ è possibile assegnare gli autovalori *arbitrariamente* al sistema linearizzato tramite retroazione dello stato.

2. **Controllo data la risposta impulsiva.** Dato un sistema del secondo ordine la cui risposta impulsiva è $F(t) = \sin(2t)/2$, si determini un regolatore del secondo ordine (per esempio basato sull'osservatore) assegnando gli autovalori nelle posizioni $\{-1, -2, -3, -4\}$.

3. **Stabilizzazione rete di flusso.** Sia data la rete di flusso governata dal sistema

$$\dot{x}(t) = Bu(t) - \bar{w}$$

con B matrice $n \times m$ "larga" ($m \geq n$) a rango n . Sia \bar{u} tale che $B\bar{u} = \bar{w}$. Si consideri il controllo $u = -\gamma B^T x + \bar{u}$, con $\gamma > 0$ e si dimostri che il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile (potrebbe essere utile ricordare che se M ha rango n , la matrice MM^T di dimensioni $n \times n$...).

4. **Osservatore con disturbo.** Sia dato il sistema lineare e invariante $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y = Cx(t) + w(t)$, con w disturbo non misurabile. Si consideri l'osservatore $\dot{z}(t) = [A - LC]z(t) + Bu(t) + Ly(t)$ e si scriva l'equazione dell'errore $e(t) = z(t) - x(t)$. Con i dati

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si determini L in modo tale che gli autovettori dell'osservatore siano $\{-1, -2\}$. Si determini la funzione di trasferimento da $w(t)$ a $e_2(t)$ (errore sulla **seconda** componente).

5. **Stima del disturbo (www...).** Nell'esercizio precedente, assunto $e(0) = 0$, si determini una stima per il massimo errore e_2 , ovvero μ tale che $\sup_{t \geq 0} |e_2(t)| \leq \mu$ con $|w(t)| \leq 1$.
6. **Raggio di stabilità** Dato il sistema lineare e invariante con un parametro incerto e costante δ , limitato $|\delta| < p$ dicesi raggio di stabilità il massimo valore della costante $p > 0$ per cui è garantita la stabilità asintotica. Si consideri la funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{1-s}{s^2 + (2+\delta)s}$$

e il regolatore proporzionale $u = -\kappa y$. Si dica per quali valori di κ si ha stabilità asintotica per $\delta = 0$. Si scelga κ all'interno del dominio di ammissibilità e si determini il corrispondente raggio di stabilità.

7. **Margine di guadagno infinito** Sia dato un sistema lineare invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

asintoticamente stabile che comunque necessita di un controllo. Si prenda P soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

con Q simmetrica definita positiva. Si dimostri che il controllo $u = -\gamma B^T P x$ è stabilizzante per qualsiasi $\gamma > 0$.