Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi e del Controllo - 24 gennaio 2013 Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non risolubili. In tal caso spiegare perchè.

1. **Poli invarianti**. Dato il sistema

$$\ddot{\theta}(t) = \sin(\theta(t)) + u(t)$$

sia $\bar{\theta}$ un generico angolo di equilibrio. Si trovi una retroazione dello stato $x(t)$, $u(t) = K(\bar{\theta})(x(t) - \bar{x})$ parametrizzata in $\bar{\theta}$ che stabilizzi il sistema nel corrispondente stato di equilibrio $(\bar{\theta}, 0)$ e tale che il sistema risultante, linearizzato in tale punto di equilibrio, abbia autovalori $-1, -1$, indipendentemente da $\bar{\theta}$.

2. **Ottimalità**. (Niente domande) Si consideri il sistema

$$\dot{y}(t) = \arctan(y(t)) + u(t)$$

Si scelga un controllo $u = K(y)$ (non necessariamente lineare) che porti $y(t)$ a zero da ogni $y(0)$ ottimizzando il funzionale

$$\int_0^{\infty} \left[y(t)^2 + \alpha^2(\dot{y}(t))^2\right] dt$$

3. **A regime!** Dato il sistema a due ingressi e uno stato

$$\dot{x}(t) = \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t) - d$$

dove $d > 0$ è un ingresso esterno costante, si dimostri che il controllo $u = -\gamma B^T x$ ovvero $u_1 = -\gamma\beta_1 x$ e $u_2 = -\gamma\beta_2 x$, $\gamma > 0$: 1) è stabilizzante, 2) il valore del controllo $\bar{u}$ **a regime** è ottimo in norma ovvero, tra gli infiniti controlli che garantiscono l'equilibrio, minimizza $u_1^2 + u_2^2$. **È chiaro "a regime"???**

4. **Funzione di Lyapunov robusta**. Sia dato il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \delta(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la retroazione $u = -ky$. Sia $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2$ una candidata funzione di Lyapunov. Si calcoli **per ogni κ reale** quale è l'incertezza tollerabile, ovvero il massimo p tale che il sistema è stabile robustamente con $|\delta(t)| \leq p$.

5. **Controllo basato sul gradiente.** Sia (A, B) un sistema asintoticamente stabile e raggiungibile che necessita di controllo. Sia $x^T P x$ una qualsiasi funzione di Lyapunov. Si dimostri che il controllo basato sul gradiente $u(t) = -\gamma B^T P x(t)$, $\gamma > 0$, è stabilizzante e ha margine di guadagno infinito (è stabile per ogni $\gamma > 0$).

6. **Posizionare il sensore.** Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \phi(x_1) && (1) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - x_1(t) + u(t) && (2) \end{aligned}$$

con ϕ funzione nota e u variabile di controllo (nota). Avete un solo sensore e potete scegliere una sola delle uscite $y = x_1$ oppure $y = x_2$. Realizzare un osservatore per il sistema in modo tale che $\hat{x}(t) - x(t)$ converga a zero asintoticamente per ogni $x(0)$.

7. **Stimare q_0 e q_1.** Si consideri il modello

$$y(k) = q_0 u(k) + q_1 u(k-1)$$

$u(k) = 0$, $k < 0$. Per $k = 0, 1, \ldots, 4$ sono raccolti i dati $u = [1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1]$ e $y = [1;\ 1/2;\ 1/2;\ 1/2;\ 1/2]$. Stimare q_0 e q_1.