



UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI UDINE

---

Facoltá di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria elettronica

La Teoria dei Sistemi  
spiegata attraverso un approccio "Case Analysis"

a cura di:

Andrea Badiali

relatore:

prof. Franco Blanchini

4 dicembre 2007

---

Anno accademico 2006/07

... ai miei genitori, ai miei parenti e a tutte le persone che mi vogliono bene. . .

## Sommario

Questo testo si propone di approfondire ed illustrare, mediante una raccolta di esempi e problemi specifici gli argomenti affrontati nei corsi di teoria dei sistemi tenuti dal prof. Franco Blanchini. Gli obiettivi principali sono:

- approfondire e integrare aspetti teorici e temi correlati.
- affrontare problemi, ispirati da situazioni pratiche, per i quali occorra applicare le metodologie di analisi e sintesi di sistemi.
- analizzare e implementare numericamente algoritmi numerici in ambiente Matlab.

Il materiale é stato ripartito in sezioni con lo scopo di creare un testo che possa essere di ausilio, di confronto o approfondimento per gli studenti di teoria dei sistemi, controlli e automatica. In particolare, dove necessario, i problemi vengono preceduti da una breve sezione teorica che ne descriva i concetti base. Seguirà quindi la risoluzione analitica e la simulazione al calcolatore. I risultati saranno evidenziati da grafici. Saranno anche forniti i listati dei programmi sviluppati.

# Indice

<b>1</b>	<b>Raggiungibilità e Osservabilità</b>	<b>5</b>
1.1	Analisi simultanea di raggiungibilità e osservabilità . . . . .	5
1.2	Metodo numerico per il calcolo del polinomio caratteristico e test di malcondizionamento . . . . .	6
1.2.1	Problemi numerici nel calcolo del polinomio caratteristico . . . . .	7
1.3	Norma di Matrice . . . . .	10
1.4	Simulazione numerica di un sistema continuo asintoticamente stabile sottoposto a ingresso limitato . . . . .	11
1.5	Simulazione di un sistema BIBO stabile con sottosistema divergente . . . . .	14
1.6	Raggiungibilità da stato iniziale diverso da zero . . . . .	16
1.7	Sulla BIBO stabilità . . . . .	17
1.8	Raggiungibilità di uno stato assegnato con tempo assegnato (sistema tempo continuo)	17
1.9	Controllabilità di uno stato assegnato con tempo assegnato (sistema a tempo discreto)	19
1.10	Sistema conto corrente . . . . .	21
1.10.1	Estinzione di un debito . . . . .	21
1.10.2	Rata variabile . . . . .	22
1.11	Evoluzione da stato iniziale non raggiungibile . . . . .	22
1.12	L'insieme di Raggiungibilità nell'intervallo $[0; \tau]$ , dati ingressi limitati, é un insieme convesso . . . . .	23
1.13	Sulla raggiungibilità di una coppia (A, B) ... evitando conti inutili . . . . .	24
1.14	Base dello spazio non osservabile . . . . .	24
1.15	Un semplice circuito . . . . .	25
1.16	Sulle condizioni iniziali . . . . .	27
1.16.1	Determinazione delle condizioni iniziali data l'uscita . . . . .	27
1.16.2	Determinazione della forma di stato e delle condizioni iniziali . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Regolazione e controllo</b>	<b>29</b>
2.1	Regolazione tramite retroazione dello stato con compensazione non lineare . . . . .	29
2.2	Osservatore di un sistema termico con ingresso esterno . . . . .	33
2.3	Retroazione dello stato stimato . . . . .	37
2.4	Osservatore discreto con ingresso esterno incognito ma costante . . . . .	40
2.5	Simulazione di un osservatore a tempo continuo . . . . .	44
2.6	Osservatore con compensazione non lineare e simulazione con approssimante di Eulero	49
2.7	Controllo ad anello aperto . . . . .	52
2.8	Retroazione dello stato con piú ingressi controllabili . . . . .	54
2.9	Insieme di regolatori stabilizzanti . . . . .	55
2.10	Retroazione senza oscillazioni . . . . .	56
2.11	Retroazione dinamica per sistema statico . . . . .	58
2.12	Velocità di convergenza . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Catene di Markov</b>	<b>60</b>
3.1	Proprietà fondamentale della matrice di Markov . . . . .	61
3.2	Distribuzione asintotica di probabilità di una catena di Markov e simulazione . . . . .	62
3.3	Catene di Markov simmetriche . . . . .	64
3.4	Creazione di una catena di Markov tramite retroazione . . . . .	65

3.5	Buffer di lavorazione . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Realizzazioni e forme minime</b>	<b>69</b>
4.1	Implementazione tramite operazionali per le realizzazioni . . . . .	69
4.2	Realizzazione diagonale . . . . .	72
4.3	Realizzazione bidiagonale . . . . .	74
4.4	Realizzazione minima duale per sistemi a piú ingressi e uscite . . . . .	74
4.5	Sintesi di circuiti . . . . .	76
4.6	Realizzazione tramite operazionali . . . . .	78
4.7	Realizzazione statica . . . . .	78
4.8	Sul parallelo e serie di sistemi . . . . .	79
4.9	Realizzazione di un PID digitale . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Robustezza</b>	<b>81</b>
5.1	Stabilità robusta in retroazione . . . . .	81
5.2	Margine di stabilità robusta . . . . .	83
5.3	Robustezza del sistema linearizzato . . . . .	84
5.4	Osservatore Robusto . . . . .	85
5.5	Criterio di Routh-Hurwitz per polinomi di grado maggiore al secondo . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Sistemi oscillanti</b>	<b>88</b>
6.1	Coseno di matrice e applicazione ai sistemi oscillanti . . . . .	89
6.2	Sistema meccanico di oscillatori accoppiati . . . . .	90
6.3	Determinazione dei parametri . . . . .	94
6.4	Controllo attivo di vibrazioni . . . . .	96
6.5	Perdita di raggiungibilità e controllabilità sotto campionamento . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Sistemi non lineari e funzioni di Lyapunov</b>	<b>100</b>
7.1	Saturazione del controllo . . . . .	101
7.2	Robustezza studiata con le funzioni di Lyapunov . . . . .	102
7.3	Stima del dominio di attrazione e verifica numerica . . . . .	103
7.4	Stabilità marginale . . . . .	106
7.5	Funzione di Lyapunov per sistemi lineari, caso di $A$ in forma simmetrica . . . . .	106
7.6	Energia del transitorio ed equazione di Lyapunov . . . . .	107
7.7	Equazione di Lyapunov duale per sistemi lineari . . . . .	108
7.8	Analisi di stabilità tramite linearizzazione (sistema a tempo discreto) . . . . .	108
7.9	Criterio di instabilità di Cetaev . . . . .	110
7.10	Sistema a commutazione per la descrizione di un impatto . . . . .	111
<b>8</b>	<b>Cenni sul controllo ottimo</b>	<b>114</b>
8.1	Esempi di controllo ottimale . . . . .	115
8.2	Tempo minimo di controllo . . . . .	116
<b>A</b>		<b>117</b>
A.1	Appendice1: programma per la simulazione dell'osservatore non lineare . . . . .	117
A.2	Appendice2: programma per la simulazione del buffer . . . . .	118
A.3	Appendice3: simulazione del volano controllato in anello aperto . . . . .	119
A.4	Appendice4: simulazione del carrello con giunto elastico . . . . .	120
A.5	Appendice5: programma per la stima del dominio di attrazione . . . . .	121
A.6	Appendice6: programma per la costruzione della tabella di Routh-Hurwitz . . . . .	124
A.7	Appendice7: programma per la simulazione dell'osservatore continuo . . . . .	126

# Elenco delle figure

1.1	esempio di sistema lineare mal condizionato . . . . .	7
1.2	schema per lo studio dell'equivalente discreto . . . . .	11
1.3	simulazione sistema BIBO stabile . . . . .	14
1.4	simulazione ed errori di calcolo per arrotondamento numerico . . . . .	16
1.5	sistema di distribuzione idrica . . . . .	18
1.6	raggiungibilit� di uno stato assegnato con tempo $\tau$ fissato . . . . .	19
1.7	Controllabilit� a zero con T assegnato . . . . .	21
1.8	studio della raggiungibilit� e osservabilit� per un circuito elettrico . . . . .	26
2.1	schema per la retroazione dello stato . . . . .	29
2.2	sistema meccanico non lineare . . . . .	30
2.3	schema retroazione dello stato attorno ad un punto di riposo . . . . .	32
2.4	schema per cancellazione delle non linearit� per il braccio meccanico . . . . .	33
2.5	schema base di un osservatore . . . . .	34
2.6	Sistema termico analizzato . . . . .	35
2.7	schema osservatore con ingresso esterno noto . . . . .	36
2.8	sistema meccanico per retroazione dello stato stimato . . . . .	38
2.9	Stimatore asintotico per sistema discreto con ingresso non noto ma costante . . . . .	42
2.10	evoluzione di $x_1, x_2$ , e dell'errore . . . . .	44
2.11	Stimatore asintotico a tempo continuo . . . . .	46
2.12	Simulazione dell'osservatore a tempo continuo . . . . .	48
2.13	spiegazione grafica dell'approssimante di Eulero . . . . .	50
2.14	evoluzione del sistema e osservatore: $h = 0.0001$ s, $\Phi() = \arctan()$ , $l_{11} = l_{21} = 5$ . . . . .	51
2.15	schema a blocchi del sistema non lineare e relativo osservatore . . . . .	51
2.16	volano controllato in anello aperto . . . . .	52
2.17	simulazione del volano controllato . . . . .	53
2.18	retroazione tramite pi� ingressi di controllo . . . . .	54
2.19	punti sul piano $(k_1, k_2)$ relativi ai regolatori stabilizzanti . . . . .	56
2.20	modello di un serbatoio con valvola controllata . . . . .	57
2.21	regolatore in retroazione per sistema statico . . . . .	58
3.1	calcolo della probabilit� dello stato successivo . . . . .	60
3.2	catena di Markov per il lancio della moneta . . . . .	63
3.3	simulazione della catena di Markov . . . . .	64
3.4	evoluzione di una catena di Markov simmetrica . . . . .	65
3.5	grafo degli stati e delle transizioni del buffer . . . . .	67
3.6	simulazione del buffer per diversi $P_0, P_1, P_2$ . . . . .	68
4.1	risposta in frequenza del filtro da realizzare . . . . .	70
4.2	schema a blocchi che implementa le equazioni della realizzazione . . . . .	70
4.3	circuito a operazionali . . . . .	71
4.4	risposta al gradino del circuito . . . . .	71
4.5	confronto uscita del derivatore (rosso) con derivata teorica (verde) . . . . .	72
4.6	circuito con operazionale 1 . . . . .	77
4.7	risposta a gradino e ad ingresso sinusoidale . . . . .	77
4.8	circuito con operazionale 2 . . . . .	78

5.1	schema a blocchi retroazionato . . . . .	81
5.2	simulazione robustezza in retroazione . . . . .	82
5.3	simulazione di robustezza sotto variazione parametrica . . . . .	84
6.1	sistema oscillante formato da 4 molle accoppiate . . . . .	90
6.2	simulazione del sistema oscillante formato da 4 molle accoppiate . . . . .	93
6.3	evoluzione libera in modo normale di oscillazione . . . . .	94
6.4	le prime tre soluzioni non banali dell'oscillatore armonico considerato . . . . .	96
6.5	carrello con giunto elastico . . . . .	96
6.6	simulazione del carrello con giunto elastico con e senza controllo . . . . .	98
7.1	grafico della derivata di $V$ . . . . .	102
7.2	grafici della derivata di $V$ per $\delta = 3, 4, 5$ . . . . .	103
7.3	grafici di $V$ e sua derivata nel primo caso . . . . .	104
7.4	traiettorie per diverse condizioni iniziali . . . . .	104
7.5	grafici di $V$ e sua derivata nel secondo caso . . . . .	105
7.6	stime del dominio di attrazione per inversione e con le superfici di livello di $V(x)$ nei due casi . . . . .	105
7.7	traiettorie del sistema non lineare instabile nell'origine . . . . .	110
7.8	schema impatto . . . . .	111
7.9	traiettoria relativa all'impatto simulata numericamente . . . . .	113
A.1	verifica del dominio calcolato . . . . .	123

# Capitolo 1

## Raggiungibilità e Osservabilità

In questo capitolo, saranno presentati alcuni problemi relativi alla raggiungibilità e osservabilità di sistemi lineari.

Per i problemi successivi di questa sezione in particolare, ma anche per le successive, si supporranno note le forme di stato  $(A, B, C, D)$  con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  vettore di stato,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  vettore di ingresso e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  vettore delle uscite. Inoltre verranno supposte note le nozioni di sottospazio di raggiungibilità  $X_r(x)$ :

$$X_r(x) = Ra(R), \quad R = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ]$$

ed osservabilità  $X_o(x)$ :

$$X_o(x) = Ker(O), \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

mentre verranno illustrati i criteri di Popov di raggiungibilità e osservabilità, e quando necessario le forme di Kalman. Infine si supporranno note le formule per il cambiamento di base, le equazioni per ricavare i sistemi lineari approssimanti per sistemi non lineari attorno ad un punto di equilibrio e le nozioni base di algebra lineare.

### 1.1 Analisi simultanea di raggiungibilità e osservabilità

Dato un sistema lineare è possibile verificare simultaneamente la raggiungibilità e l'osservabilità.

Si consideri il sistema  $(A, B, C)$  ad un ingresso ed una uscita e la matrice  $M$   $n \times n$  definita come:

$$M = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^nB \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots & CA^{n+1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & CA^{n+1}B & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}$$

il sistema è simultaneamente raggiungibile ed osservabile se  $M$  ha rango pieno. Infatti, se il sistema  $(A, B, C)$  è SISO e completamente raggiungibile ed osservabile, le matrici:

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

sono quadrate  $n \times n$  ed a rango pieno: in tal caso esistono le matrici inverse  $R^{-1}$  e  $O^{-1}$ . Si può verificare facilmente che la matrice  $M$  risulta essere il prodotto di tali matrici, sviluppando opportunamente il prodotto partizionato:

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^nB \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots & CA^{n+1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & CA^{n+1}B & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}$$

Ogni partizione della matrice  $M$  risulta uno scalare in quanto prodotto di matrici  $[1 \times n] \times [n \times 1]$ . Esistendo  $R^{-1}$  e  $O^{-1}$  è definita anche l'inversa di  $M$ , come è noto, dall'espressione:

$$M^{-1} = (OR)^{-1} = R^{-1}O^{-1}$$

$M$  è quindi invertibile ed ha rango pieno.

## 1.2 Metodo numerico per il calcolo del polinomio caratteristico e test di malcondizionamento

*Viene presentato un metodo, basato sull'identità di Cayley - Hamilton, che permette di ricavare il polinomio caratteristico della matrice di stato di una coppia  $(A, B)$ .*

Si consideri il sistema raggiungibile  $(A, B)$  ad un ingresso. Il polinomio caratteristico associato ad  $A$  risulta essere:

$$P(s) = \det(sI - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

Per il calcolo dei coefficienti, si consideri il sistema lineare di equazioni algebriche:

$$[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -A^n B \quad (1.1)$$

Dove  $n$  è la dimensione del sistema  $A$   $[n \times n]$ . Da questa espressione è possibile ricavare, sotto opportune ipotesi, la relazione che intercorre tra le incognite del sistema e i coefficienti del polinomio caratteristico.

Osserviamo subito che il sistema è nella forma  $Rx = c$  ed ha come matrice dei coefficienti la matrice di raggiungibilità  $R$ : come è noto, per avere una soluzione unica è necessario che il nucleo di tale matrice sia banale, e questo accade se e solo se la matrice dei coefficienti è quadrata ed invertibile. Tale proprietà è soddisfatta se  $B$  ha una sola colonna, cioè il sistema presenta un solo ingresso, e la coppia  $(A, B)$  è completamente raggiungibile ( $\det(R) \neq 0$ ). Sfruttando le proprietà delle matrici partizionate<sup>1</sup> possiamo sviluppare il sistema in questo modo:

$$Bx_1 + ABx_2 + A^2Bx_3 + \dots + A^{n-1}Bx_n + A^nB = 0$$

raccogliamo  $B$  a destra e riordinando i vari termini:

$$[A^n + A^{n-1}x_n + \dots + A^2x_3 + Ax_2 + x_1] B = 0$$

Perché questa equazione sia verificata occorre che il termine tra parentesi quadre sia nullo, dato che non abbiamo posto condizioni su  $B$ : ci viene in aiuto in questo caso l'identità di Cayley - Hamilton che qui riportiamo brevemente:

<sup>1</sup>per il quale si possono sviluppare i prodotti matriciali trattando sottomatrici o sottovettori simbolicamente come se fosse scalari. Tutto ciò è lecito se si suppone che le dimensioni dei sottoblocchi siano coerenti ed il prodotto matriciale tra i sottoblocchi è quindi ben definito.

data una matrice  $A$  quadrata, é sempre possibile calcolarne il polinomio caratteristico:

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + s^{n-1}p_{n-1} + \dots + sp_1 + p_0$$

L'identitá di Cayley - Hamilton afferma che la matrice  $A$  é radice del proprio polinomio caratteristico  $p(A) = 0$ . Quindi sostituendo ad  $s$  le potenze di  $A$  otteniamo<sup>2</sup>:

$$A^n + A^{n-1}p_{n-1} + \dots + Ap_1 + p_0 = 0$$

Si capisce bene allora, confrontando questa equazione con quella ricavata dal sistema iniziale, che il vettore delle soluzioni sará:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$$

Le incognite del sistema 1.1 sono quindi i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ordine  $x_i = p_{i-1}$ .

### 1.2.1 Problemi numerici nel calcolo del polinomio caratteristico

Tuttavia, il metodo di calcolo presentato puó essere numericamente inefficace: per sistemi di grosse dimensioni, ossia con un numero elevato di variabili di stato, l'algoritmo produce risultati molto diversi da quelli teorici, in quanto diventa un problema mal condizionato. Per problema mal condizionato, si intende un problema per cui piccole perturbazioni sui dati iniziali provocano grosse perturbazioni sul risultato. Si capisce che, volendo implementare numericamente un algoritmo per la risoluzione di tale problema le approssimazioni numeriche introdotte dal calcolatore possono dare risultati che si scostano notevolmente dai dati teorici. Facciamo un esempio, considerando il semplice sistema  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} -3x_1 + 1x_2 &= 7 \\ -5.9x_1 + 2.1x_2 &= 5 \end{aligned}$$

esso consiste nel trovare l'intersezione delle due rette:

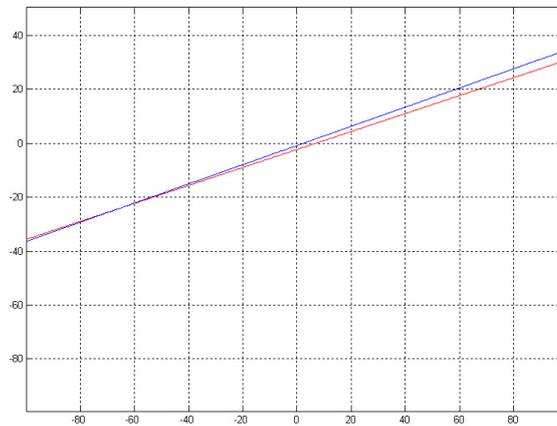


Figura 1.1: esempio di sistema lineare mal condizionato

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 + 7 \\ x_2 &= \frac{5.9}{2.1}x_1 + \frac{5}{2.1} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>La proprietá é di facile verifica se  $A$  é diagonalizzabile. In tal caso, come verrá spiegato a breve,  $P(A) = TP(\Lambda)S$ , con  $P(\Lambda)$  matrice che ha sulla diagonale il polinomio caratteristico calcolato per  $s = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , quindi  $P(\Lambda) = 0$ .

la matrice dei coefficienti di questo sistema  $Rx = b$  risulta essere:

$$R = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5.9 & 2.1 \end{bmatrix}$$

che come é facile vedere é una matrice *quasi* singolare, in quanto le sue colonne sono vettori sí linearmente indipendenti ma quasi allineati. Possiamo prendere il determinante di  $R$  come indicatore di quanto siano allineate le sue colonne: nel caso in esame esso risulta -0.4 e, in generale, esso sar  tanto piú piccolo quanto piú questa patologia é forte (nel caso di colonne linearmente dipendenti la matrice é singolare e il determinante si annulla). Se adesso ipotizziamo di perturbare di poco i termini noti delle equazioni prese in considerazioni ci accorgiamo che l'intersezione delle due rette si allontana da quella teorica di una quantit  di un ordine di grandezza maggiore rispetto a quella di perturbazione. La stessa cosa non accadrebbe invece se le due rette fossero perpendicolari.

Ritorniamo al nostro sistema: come prima cosa, essendo la coppia  $(A, B)$  completamente raggiungibile per ipotesi, possiamo prendere come matrici rappresentative quelle in forma di *Frobenius*. Questo tipo di rappresentazione é quella usualmente utilizzata per la realizzazione minima di un sistema raggiungibile e, in generale, per sistemi SISO raggiungibili esiste sempre una matrice di trasformazione  $T$  invertibile tale che il sistema nella nuova rappresentazione di stato assume la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

data la dimensione  $n$ , generiamo un polinomio caratteristico test con il seguente algoritmo:

$$p(s) = (s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)\dots(s-n+1)(s-n)$$

di cui numericamente ricaviamo i coefficienti  $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}$ .

Ora possiamo costruire le matrici  $A$  e  $B$  in forma di Frobenius e implementare l'algoritmo per verificare se i  $p'_0, p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_{n-1}$  calcolati sono quelli di partenza.

Sperimentalmente si é potuto constatare che il sistema per il calcolo dei coefficienti per dimensioni superiori a 15 produce risultati sui coefficienti molto diversi rispetto a quelli teorici. Cercheremo qui di darne una interpretazione: avendo scelto per il test  $A$  con autovalori distinti,  $A$  si pu  scrivere nella forma:

$$A = T\Lambda S \tag{1.2}$$

dove  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  é la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di  $A$ ,  $T$  é la matrice che ha per colonne gli autovettori  $\bar{t}$  destri di  $A^3$ , che risultano tutti linearmente indipendenti se  $A$  ha autovalori distinti e in particolare la prima colonna é l'autovettore associato a  $\lambda_1 \dots$ , ed  $S$  l'inversa di  $T$ . Una generica potenza  $m$ -esima di  $A$  si pu  esprimere come:

$$A^m = T\Lambda S T\Lambda S T\Lambda S \dots T\Lambda S = T\Lambda^m S \tag{1.3}$$

dove  $\Lambda^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \dots, \lambda_n^m)$  perch , essendo  $\Lambda$  in forma diagonale, le sue potenze si possono applicare elemento per elemento<sup>4</sup>. Questo risultato importante ci permette di riscrivere  $A$  nella forma seguente, partizionando  $T$  in righe ed  $S$  in colonne e sviluppando il prodotto<sup>5</sup>:

$$A^m = [\bar{t}_1 \ \bar{t}_2 \ \dots \ \bar{t}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1}^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_1^T \\ \bar{s}_2^T \\ \vdots \\ \bar{s}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n t_k s_k^T \lambda_k^m = \sum_{k=1}^n Z_k \lambda_k^m$$

<sup>3</sup>si calcolano risolvendo il sistema lineare  $A\bar{t} = \lambda\bar{t}$ ,  $\bar{t}$  si dice autovettore associato all'autovalore  $\lambda$  e la soluzione  $\bar{t}$  che risolve il sistema non é unica (si fissano delle variabili per ricavare un vettore rappresentativo dell'autospazio)

<sup>4</sup>si pu  facilmente verificare sviluppando il prodotto matriciale

<sup>5</sup>tale procedimento é del tutto generale: se  $f$  é una funzione analitica, cio  sviluppabile in serie di potenze, si pu  estendere in maniera analoga a funzione di matrice. Si veda la sezione 6.1

dove introduciamo le matrici (quadrato)  $Z_k = t_k s_k^T$ . Se ordiniamo gli autovalori dal maggiore in modulo al minore come segue:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$$

per potenze elevate di  $A$  nella sommatoria prevale il primo termine, cioè:

$$A^m \simeq t_1 s_1^T \lambda_1^m = Z_1 \lambda_1^m$$

Ora se analizziamo la matrice  $R$ , essa é composta dalle potenze  $0 < m < n-1$  di  $A$ , e per  $n$  elevati risulta approssimativamente:

$$R = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ \simeq Z_1 B \lambda_1^{n-2} \ \simeq Z_1 B \lambda_1^{n-1}]$$

dove le ultime colonne tendono ad essere tutte allineate al vettore riga  $Z_1 B$  (e la potenza di  $\lambda$  risulta essere una costante proporzionale). Quindi, per  $n$  elevati  $R$  tende ad avere colonne che corrispondono a vettori *quasi* allineati e gli arrotondamenti numerici, introdotti per invertire  $R$  e determinare il vettore delle incognite, comportano un allontanamento progressivo dal risultato teorico. Dai risultati sperimentali ottenuti con Matlab notiamo che possiamo adottare come indice di condizionamento  $\|R\| \cdot \|R\|^{-1}$ , per giustificare tale quantità occorre ricorrere alla definizione di norma di matrice:

$$\|R\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Rx\|}{\|x\|} \quad (1.4)$$

dove  $\|x\|$  é la norma vettoriale considerata (per esempio quella euclidea). In altre parole,  $\|R\|$  é il massimo fattore di "allungamento" o "contrazione" che si ottiene applicando la trasformazione lineare  $R$  ad un generico vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  (se  $\|R\| < 1$  tutti i vettori dello spazio  $y = Rx$  saranno "accorciati", se  $\|R\| > 1$  alcuni vettori saranno "allungati"). Per un generico  $x$  vale quindi la proprietà submoltiplicativa:

$$\|Rx\| \leq \|R\| \cdot \|x\| \quad (1.5)$$

Utilizzeremo questa relazione per quantificare lo scostamento dei risultati dovuto ad una perturbazione sui termini noti. Consideriamo due soluzioni  $x$  e  $\tilde{x}$  dei due sistemi lineari:

$$Rx = c, \quad R\tilde{x} = c + \delta c$$

dove  $\delta c$  é un vettore di perturbazione  $\delta c \in \mathbb{R}^n$ . Sottraendo le due equazioni abbiamo:

$$R(x - \tilde{x}) = \delta c$$

essendo il sistema raggiungibile,  $R$  non é singolare ed é lecito scrivere:

$$(x - \tilde{x}) = R^{-1} \delta c$$

passando ora alle norme, si ottiene:

$$\|x - \tilde{x}\| = \|R^{-1} \delta c\| \leq \|R^{-1}\| \cdot \|\delta c\|$$

d'altro canto per la 1.5:

$$\|c\| = \|Rx\| \leq \|R\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|R\|}{\|c\|}$$

Quindi, considerando le equazioni precedenti, possiamo scrivere:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|R\| \cdot \|R^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta c\|}{\|c\|}$$

Notiamo immediatamente che l'indice di condizionamento esprime il legame tra gli errori relativi della perturbazione sui termini noti e delle incognite. Se tale indice é elevato Matlab da' un segnale di warning segnalando la scarsa attendibilitá dei risultati (va precisato che la perturbazione che interessa l'algoritmo nel nostro caso é sull'inversione della matrice  $R$ ,  $\tilde{x} = [(R)^{-1} + \delta]c$  e non su approssimazioni introdotte sui termini noti, tuttavia si puó dimostrare che questo indice rimane indicativo di tale patologia). Riportiamo i risultati su tabella relativi al calcolo dei coefficienti per dimensione crescente:

dimensione n	errore massimo assoluto sui coefficienti	indice di condizionamento
1	0	1
2	0	10.9
3	0	367
...	...	...
12	0	6.82e+024 (warning)
13	-15360	6.57e+027 (warning)
14	206848	7.38e+030 (warning)

e il listato Matlab per la scrittura del programma per risolvere il sistema:

```
function pol(n)

p = poly([1:1:n]);
A = [ zeros(n-1,1) eye(n-1); -p(n+1:-1:2)];
B = [zeros(n-1,1);1];

R = B;
col = B;
for h=1:n-1
    col = A*col;
    R=[R col];
end

r = -A*R(1:n,n);
vet=inv(R)*r;
vet=vet';
pcal = [1 vet(n:-1:1)];
pcal
p
diff = p-pcal
disp('||inv(R)||*||R|| come test di condizionamento');
norm(inv(R))*norm(R)
```

### 1.3 Norma di Matrice

*Nella sezione precedente si é fatto riferimento al concetto di norma di matrice che viene qui richiamato brevemente.*

Ricordando la definizione di norma di Matrice indotta dalla norma vettoriale  $\|x\|$ , si può verificare che se  $\|A\| < 1$  allora, necessariamente, gli autovalori di  $A$  hanno modulo inferiore ad 1. Ricordando la definizione di norma di matrice 1.4 e la proprietà 1.5:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

consideriamo il sistema a tempo discreto  $x(k+1) = Ax(k)$  e applichiamo la norma a tale equazione:

$$\|x(k+1)\| = \|Ax(k)\| \leq \|A\| \|x(k)\| < \|x(k)\|$$

dove la seconda maggiorazione vale per l'ipotesi  $\|A\| < 1$ . Dovendo valere tale relazione  $\forall k$ , tale relazione impone che per  $k \rightarrow \infty$   $\|x(k)\| \rightarrow 0 \Rightarrow x(k) \rightarrow 0$ . Tale deduzione é coincidente alla proprietà di asintotica stabilità del sistema discreto, per cui  $A$  deve necessariamente avere autovalori inferiori all'unità.

## 1.4 Simulazione numerica di un sistema continuo asintoticamente stabile sottoposto a ingresso limitato

In questa sezione studieremo alcune proprietà di sistemi stabili e stabili in senso BIBO. Viene inoltre descritto come è possibile implementare numericamente le equazioni di un sistema a tempo continuo ricavando l'equivalente sistema a tempi campionati.

Per simulare numericamente un sistema lineare continuo tempoinvariante considereremo, per ora, il particolare insieme delle funzioni di ingresso costanti a tratti con passo  $T_c > 0$ :

$$U = \{u(t), \quad u(t) = u(kT_c), \quad kT_c \leq t < (k+1)T_c\}$$

È possibile ricavare un sistema discreto che permette di ricavare esattamente i campioni con passo  $T_c$  dell'evoluzione dello stato e dell'uscita del sistema di partenza<sup>6</sup>, sollecitato da tale classe di ingressi  $U$ . Si consideri lo schema seguente:



Figura 1.2: schema per lo studio dell'equivalente discreto

dove  $u(kT_c) \in U$ . Utilizziamo l'equazione generale dell'evoluzione dello stato assunto  $x(kT_c)$  stato iniziale noto:

$$x(t) = e^{A(t-kT_c)}x(kT_c) + \int_{kT_c}^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \quad (1.6)$$

e valutiamo tale espressione per il tempo  $t = (k+1)T_c$  (campione successivo), ricordando che in tale intervallo di tempo  $u(\sigma) = u(kT_c)^*$  è costante e si può portare fuori dal segno di integrale:

$$x((k+1)T_c) = e^{A[(k+1)T_c-kT_c]}x(kT_c) + \left( \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \right) u(kT_c)^*$$

$$x((k+1)T_c) = e^{AT_c}x(kT_c) + \left( \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \right) u(kT_c)^*$$

notiamo che il termine tra parentesi tonde tramite il cambiamento di variabili  $\xi = (k+1)T_c - \sigma$  può essere riscritto come segue:

$$\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c-\sigma)}Bd\sigma = \int_{T_c}^0 e^{A\xi}B(-d\xi) = \int_0^{T_c} e^{A\xi}Bd\xi$$

dunque questo integrale non dipende dal parametro  $k$ , cioè dal tempo  $kT_c$ , ed è in realtà una matrice costante che chiameremo  $B_D$ . Facendo un analogo calcolo per l'evoluzione dell'uscita, troviamo il seguente sistema di equazioni alle differenze:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_D x(k) + B_D u(k)^* \\ y(k)^* &= C_D x(k) + D_D u(k)^* \end{aligned}$$

In cui per semplicità lasciamo sottointeso l'intervallo temporale, ovvero  $x(kT_c) = x(k)$ . Ovviamente  $T_c$  determina le espressioni delle matrici costanti  $A_D, B_D, C_D$ <sup>7</sup>:

$$A_D = e^{AT_c}, \quad B_D = \int_0^{T_c} e^{A\xi}Bd\xi, \quad C_D = C, \quad (D_D = D) \quad (1.7)$$

<sup>6</sup>vale se il sistema è lineare

<sup>7</sup>il sistema a tempo discreto è cioè lineare tempoinvariante

Ricapitolando, il sistema discreto permette, dati i campioni dell'ingresso  $u(k)^*$  costante a tratti, di calcolare  $y(k)^*$  che é l'uscita  $y(t)$  campionata negli istanti  $kT_c$ .

Si può facilmente dimostrare che la proprietà di stabilità del sistema continuo si esporta a quello a tempo discreto, infatti se supponiamo  $A$  diagonalizzabile<sup>8</sup>, calcoliamo la matrice esponenziale con lo sviluppo in serie applicando le formule 1.2 e 1.3:

$$\begin{aligned}
 e^{AT_c} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T_c^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T \Lambda^k S T_c^k}{k!} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k T_c^k}{k!} S = T e^{\Lambda T_c} S = \\
 &= [\bar{t}_1 \ \bar{t}_2 \ \dots \ \bar{t}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T_c} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T_c} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 T_c} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_{n-1} T_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n T_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_1^T \\ \bar{s}_2^T \\ \vdots \\ \bar{s}_n^T \end{bmatrix} \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Infatti essendo  $\Lambda$  diagonale la serie di matrice si può applicare elemento per elemento della diagonale,  $T$  é la matrice degli autovettori,  $S$  la sua inversa come precedentemente descritto.

Quindi all'autovalore del sistema continuo  $\lambda$  con modo associato  $e^{\lambda t}$ , corrisponde l'autovalore  $e^{\lambda T_c}$  discreto con modo associato  $[e^{\lambda T_c}]^k$ . Ciò implica, assumendo  $\lambda = \mu + j\sigma$ :

$$|e^{\lambda T_c}| = e^{\mu T_c} |\cos(\sigma) + j \sin(\sigma)| = e^{\mu T_c}$$

Quindi il sistema campionato é asintoticamente stabile se e solo se il sistema di partenza é asintoticamente stabile, infatti:

$$Re[\lambda] = \mu < 0, \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad e^{\mu T_c} < 1$$

In altri termini, il sistema discreto presenta autovalori in modulo minori di 1 se quello di partenza ha autovalori a parte reale negativa.

\* \* \* \*

Sia dato il sistema lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u(t) \\
 y(t) &= x_1(t) + 2x_2(t)
 \end{aligned}$$

Si considerino tutti i possibili ingressi  $u(t)$  soggetti al vincolo  $|u(t)| \leq \mu$ . Si vuole determinare, se esiste, l'estremo superiore di  $|y(t)|$  per  $t \geq 0$ , a partire da condizioni iniziali nulle.

Il semplice sistema preso in considerazione ammette la rappresentazione matriciale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2]$$

Per cominciare riportiamo la definizione di stabilità in senso *BIBO*, che ci verrà utile in seguito:

*Un sistema é stabile in senso BIBO se, assunto  $x(0) = 0$ , ad ingressi limitati corrispondono uscite limitate. Questo é equivalente a dire che il sottospazio raggiungibile ed osservabile dello spazio degli stati  $\mathbb{R}^n$  é asintoticamente stabile.*

Chiaramente ogni sistema asintoticamente stabile é stabile in senso *BIBO* (il sottospazio raggiungibile e osservabile é sicuramente asintoticamente stabile). D'altro canto, un sistema con autovalori a parte reale positiva non é asintoticamente stabile ma può essere stabile in senso *BIBO* se l'evoluzione divergente riguarda esclusivamente variabili interne al sistema che non influiscano

<sup>8</sup>se  $A$  non fosse diagonalizzabile occorrerebbe studiare la forma di Jordan diagonale a blocchi e i conti sarebbero piú complicati

sul rapporto ingresso-uscita (per questo problema vedere il successivo paragrafo). In questo caso  $A$  é in forma diagonale e possiede autovalori -1, -2: dunque abbiamo stabilitá asintotica. Possiamo quindi fin da ora assumere l'esistenza di una limitazione superiore per  $y(t)$ .

Per trovare tale limitazione per  $y(t)$  possiamo prendere in considerazione la soluzione generale di tale sistema. Come é noto, l'espressione generale dell'uscita per un sistema lineare tempoinvariante si può scrivere nella forma seguente che tiene conto della risposta libera e quella forzata:

$$y(t) = Ce^{At}x(o) + \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma + Du(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \quad (1.9)$$

dove il secondo passaggio é dovuto al fatto che consideriamo condizioni iniziali nulle e  $D = 0$ .

Per sviluppare l'integrale calcoliamo la matrice esponenziale di  $A$  con lo sviluppo in serie dato dall'equazione 1.8: in questo caso particolare  $A$  é già in forma diagonale, allora:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

e l'integrale 1.9 risulta particolarmente facile da risolvere:

$$y(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(t-\sigma)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\sigma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\sigma)d\sigma$$

sviluppando i calcoli e valutando il modulo dell'uscita otteniamo:

$$|y(t)| = \left| \int_0^t (e^{(t-\sigma)} + 2e^{(t-\sigma)})u(\sigma)d\sigma \right| \leq \int_0^t |(e^{(t-\sigma)} + 2e^{t-\sigma})u(\sigma)|d\sigma = \int_0^t |e^{(t-\sigma)} + 2e^{t-\sigma}| \cdot |u(\sigma)|d\sigma$$

e assumendo la limitazione  $u(t) \leq \mu$  come segue:

$$|y(t)| \leq \mu \int_0^t (e^{(t-\sigma)} + 2e^{(t-\sigma)})d\sigma = \mu(2 - e^{-t} - e^{-2t})$$

Quindi si ha una maggiorazione che permette di stimare l'evoluzione dell'uscita istante per istante. Non sorprende il fatto che tale maggiorazione dell'uscita corrisponde all'ingresso piú sfavorevole che in questo caso é un gradino pari al valore massimo consentito  $|u(\sigma)| = \mu$ . Rispetto a tale ingresso  $y(t) \rightarrow 2\mu$  per  $t \rightarrow \infty$  (il sistema ha guadagno in continua pari a 2), perciò  $y(t) \leq 2\mu$ .

Si può testare questa proprietá simulando numericamente il sistema. Sviluppando i calcoli<sup>9</sup> per il nostro esempio otteniamo le matrici 1.7:

$$A_D = \begin{bmatrix} e^{-T_c} & 0 \\ 0 & e^{-2T_c} \end{bmatrix}, \quad B_D = \int_0^{T_c} \begin{bmatrix} e^{-\xi} & 0 \\ 0 & e^{-2\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} -(e^{-T_c} - 1) \\ -0.5(e^{-2T_c} - 1) \end{bmatrix}, \quad C_D = [1 \ 2]$$

Si riporta il grafico delle risposte del sistema per ingresso a gradino, sinusoidale (a tratti) e random-con passo di campionamento  $T_c = 0.1sec$  e visualizzando i punti a pallino corrispondenti all'uscita e i segnali ad interpolazione lineare agli ingressi corrispondenti. La simulazione é stata effettuata implementando il seguente sistema alle differenze finite, dove la funzione richiede di passare in ingresso il passo di campionamento e il vettore dei campioni dell'ingresso:

```
function [y,t] = uscita(T_c, u)
y = zeros(size(u));
t=0:T_c:T_c*(length(u)-1);
n = length (u);
```

```
%calcola i parametri delle matrici dell'equivalente discreto
A = [ exp(-T_c) 0 ; 0 exp(-2*T_c)];
B = [-(exp(-T_c) - 1) ; -0.5*(exp(-2*T_c) - 1)];
C = [1 2];
```

<sup>9</sup>ricordiamo che gli operatori lineari di integrazione e derivazione applicati a vettori e matrici si applicano agli elementi, e che matrici costanti possono essere trattate come costanti scalari

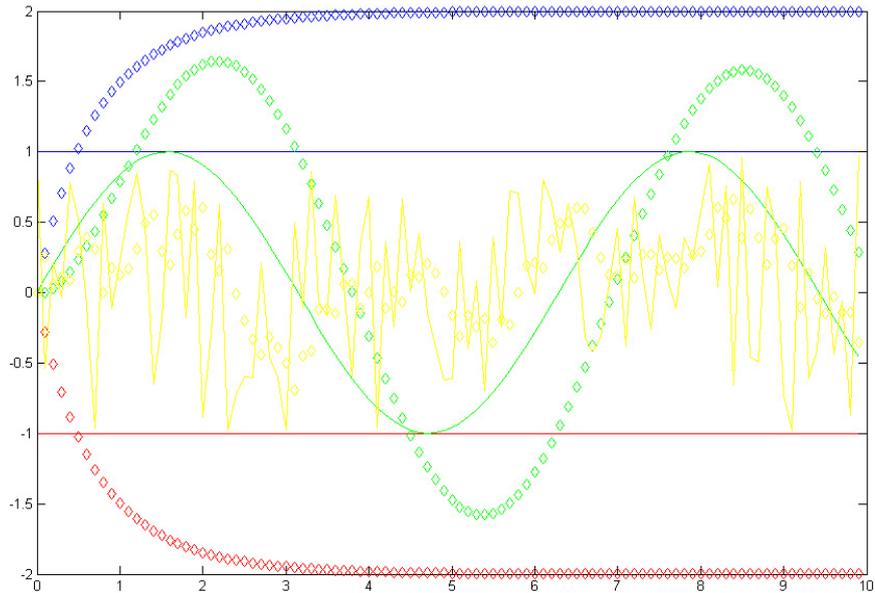


Figura 1.3: simulazione sistema BIBO stabile

```
%condizioni iniziali
x = [0 ; 0];
x_new = [0 ; 0];

for i=1:n;
    x_new = A * x + B * u(i);
    y(i) = C * x;
    x = x_new;
end
plot(t,y);
```

## 1.5 Simulazione di un sistema BIBO stabile con sottosistema divergente

*Per capire come il concetto di stabilità BIBO (esterna) sia fallace, consideriamo la simulazione di un sistema internamente divergente.*

Sia dato il sistema lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 6x_1(t) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -3x_3(t) \\ y(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)\end{aligned}$$

Anche in questo caso si considerino tutti i possibili ingressi  $u(t)$  soggetti al vincolo  $|u(t)| \leq \mu$ . Si vuole determinare, se esiste, l'estremo superiore di  $|y(t)|$  per  $t \geq 0$ , a partire da condizioni iniziali nulle.

Il semplice sistema preso in considerazione ammette la rappresentazione matriciale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

In questo caso  $A$  risulta triangolare a blocchi ed é facile verificare che i suoi autovalori<sup>10</sup> sono 1, -4, -3. Perché esista una limitazione per  $y(t)$  occorre che il sistema risulti stabile in senso BIBO, e quindi che l'autovalore  $\lambda = 1$  determini la dinamica degli eventuali sottosistemi non raggiungibili o non osservabili. In questo caso l'autovalore 1 risulta non osservabile come si può verificare applicando il criterio di *Popov* per l'osservabilità:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}_{\lambda=1} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3 \quad (1.10)$$

(in generale, tale matrice ha una caduta di rango, in questo caso da  $n = 3$  a 2, se viene calcolata per autovalori corrispondenti al sottosistema non osservabile).

Ciò implica che il sottosistema raggiungibile e osservabile risulta asintoticamente stabile e nel complesso il sistema risulta stabile in senso BIBO. Per calcolare la limitazione superiore per  $|y(t)|$  conviene procedere diversamente dal caso precedente. Riprendendo la soluzione generale con condizioni iniziali nulle, posto  $\mu = 1$  ( $|u(t)| \leq 1$ ) allora:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t C e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma \right| = \left| \int_0^t C e^{A\xi} B u(t-\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_0^t |C e^{A\xi} B| \cdot |u(t-\xi)| d\xi \leq \int_0^t |C e^{A\xi} B| d\xi \leq \int_0^\infty |C e^{A\xi} B| d\xi \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove si é anche effettuato il cambiamento di variabili  $\xi = t - \sigma$ : quest'ultimo integrale 1.11 rappresenta l'area del modulo della risposta impulsiva. Per ricavarla, invece di esplicitare il conto della matrice esponenziale, possiamo passare nel dominio della trasformata di Laplace e calcolare la funzione di trasferimento come segue:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{-2(s-1)(s+3)}{(s+4)(s+3)(s-1)} = \frac{-2}{s+4} \quad (1.12)$$

in cui notiamo una seconda cancellazione stabile per l'autovalore -3, ed infatti si può verificare che esso appartiene al sottospazio non raggiungibile applicando il criterio di *Popov* per la raggiungibilità:

$$\text{rank}[\lambda I - A \quad B]_{\lambda=-3} = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3 \quad (1.13)$$

(tale matrice ha una caduta di rango, in questo caso da  $n = 3$  a 2, se viene calcolata per autovalori corrispondenti al sottosistema non raggiungibile).

Antitrasformando e calcolando l'area della risposta impulsiva abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{s+4} &\xrightarrow{L^{-1}} -2e^{-4t} \\ \int_0^\infty |-2e^{-4t}| d\xi &= 2 \left[ \frac{e^{-4\xi}}{-4} \right]_0^\infty = 0.5 \end{aligned}$$

Vengono riportati brevemente i passaggi per il calcolo dell'equivalente discreto diagonalizzando la matrice  $A$ , il che riduce il numero di integrali per il calcolo di  $B_D$ :

$$A_D = e^{AT_c} = T e^{\Lambda T_c} S, \quad B_D = \int_0^{T_c} e^{A\xi} B d\xi = T \int_0^{T_c} e^{\Lambda\xi} d\xi S B, \quad C_D = C$$

Per calcolare  $T$  ed  $S$  Possiamo risolvere il sistema a mano o con semplici comandi Matlab<sup>11</sup>, quindi:

$$A_D = \begin{bmatrix} 1.6383 & 0.5400 & 0 \\ 3.2400 & 1.0983 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0498 \end{bmatrix} \quad B_D = \begin{bmatrix} 3.2400 \\ 1.0983 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_D = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

<sup>10</sup>per matrici triangolari a blocchi gli autovalori sono quelli dei sottoblocchi quadrati sulla diagonale

<sup>11</sup>utilizzando il comando  $[T, \Lambda] = \text{eig}(A)$ , i vettori colonna  $t$  vengono normalizzato a  $\|t\| = 1$

La simulazione numerica di tale sistema, come é lecito attendersi, risulta problematica. Infatti  $y(t)$  é pur sempre una opportuna combinazione di variabili di stato, in questo caso divergenti. L'uscita  $y(t)$  rispecchia l'andamento teorico solo per un piccolo intervallo iniziale: vengono infatti introdotte approssimazioni e arrotondamenti numerici per calcolare  $x_i(t)$  che pregiudicano il fatto che la loro combinazione lineare rimanga limitata. Riportiamo i grafici relativi all'inizio della simulazione, dove si può vedere come la comparsa degli errori di calcolo portino alla divergenza dell'uscita. Come prima, in grafico le curve a pallini corrispondono alle uscite e quelle ad interpolazione lineare all'ingresso:

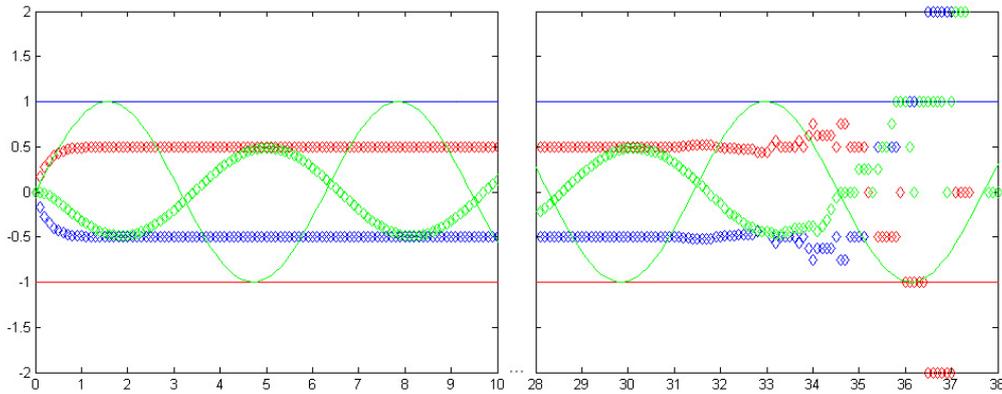


Figura 1.4: simulazione ed errori di calcolo per arrotondamento numerico

## 1.6 Raggiungibilit  da stato iniziale diverso da zero

Ci proponiamo di dimostrare che se un sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  é completamente raggiungibile (da zero), allora ogni stato  $x_2$  é raggiungibile da ogni stato  $x_1$  in un intervallo  $[0, \tau]$  arbitrario, ovvero  $x(0) = x_1$ ,  $x(\tau) = x_2$  e non ci sono limitazioni per  $u(t)$ .

A tal scopo, consideriamo la funzione di transizione per calcolare l'evoluzione dello stato all'istante  $\tau$ :

$$x(\tau) = e^{A\tau} x_1 + \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma \quad (1.14)$$

che in questo caso deve tenere conto della risposta libera. Essendo il sistema completamente raggiungibile, esiste sicuramente un generico ingresso  $u^*(\cdot)$  che permette di raggiungere nell'intervallo  $[0; \tau]$  lo stato  $x_2$  finale:

$$x_2 = \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu^*(\sigma) d\sigma$$

Se consideriamo ingressi espressi nella forma del tipo:

$$u(\sigma) = u^*(\sigma) + u^\diamond(\sigma) \quad (1.15)$$

per cui l'espressione dell'evoluzione dello stato risulta:

$$x(\tau) = e^{A\tau} x_1 + \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu^*(\sigma) d\sigma + \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu^\diamond(\sigma) d\sigma$$

imporre che all'istante  $\tau$   $x(\tau) = x_2$  significa:

$$\int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu^\diamond(\sigma) d\sigma = -e^{A\tau} x_1$$

condizione che equivale al problema della raggiungibilit  da zero dello stato  $-e^{A\tau} x_1$  in  $[0; \tau]$ . In questo caso é possibile soddisfare tale equazione con un opportuno ingresso  $u^\diamond(\sigma)$  perch  lo spazio degli stati raggiungibili é  $\mathbb{R}^n$ . Quindi  $x_2$  é raggiungibile da  $x_1$  con una generica funzione d'ingresso  $u(\sigma)$  del tipo 1.15 definita come sopra.

## 1.7 Sulla BIBO stabilit 

Per testare la stabilit  BIBO   comodo utilizzare il criterio di Popov se si conoscono gli autovalori del sistema. Questo permette di prendere in considerazione i soli autovalori instabili.

Ad esempio si consideri il sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [ 1 \quad 0 ]$$

Si vogliono determinare i valori di  $\alpha$  per cui il sistema   raggiungibile e per cui   BIBO stabile.

Per la completa raggiungibilit  calcoliamo il rango di  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} \alpha & 6 - \alpha \\ 1 & \alpha - 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = \alpha(\alpha - 2) - (6 - \alpha) = \alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -2$$

quindi  $R$  ha rango pieno per  $\alpha \in \mathfrak{R} - \{3, -2\}$ . Gli autovalori del sistema sono:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s + 1 & -6 \\ -1 & s + 2 \end{bmatrix} = s^2 + 3s - 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4$$

Affinch  il sistema sia BIBO stabile, l'autovalore instabile  $\lambda_1 = 1$  deve appartenere ai sottosistemi non raggiungibili o non osservabili. Si pu  verificare la completa osservabilit  del sistema:

$$\text{rank}(O) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 2$$

che non dipende da  $\alpha$ . Dobbiamo allora imporre che  $\lambda_1 = 1$  appartenga al sottosistema non raggiungibile e possiamo a tal scopo utilizzare il criterio di *Popov*:

$$\text{rank}[\lambda I - A \quad B]_{\lambda=1} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -6 & \alpha \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} < 2$$

tale relazione   verificata se le due righe di tale matrice sono proporzionali, e quindi scegliendo  $\alpha = -2$ <sup>12</sup>.

## 1.8 Raggiungibilit  di uno stato assegnato con tempo assegnato (sistema tempo continuo)

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) - u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

Queste equazioni modellano un sistema di distribuzione idrica a due serbatoi (vedi figura 1.5) con livelli  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , flussi controllati  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e domanda  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$ .   sempre possibile assumere  $d_1 = d_2 \equiv 0$  traslando  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_1(t) - d_2(t) - d_1(t) \\ v_2(t) &= u_2(t) - d_2(t) \end{aligned}$$

Data la condizione iniziale generica  $x_1(0), x_2(0)$  vogliamo determinare l'ingresso che, nel tempo assegnato  $\tau$ , porti il sistema nello stato generico  $x_1(\tau) = x_{1fin}, x_2(\tau) = x_{2fin}$ .

---

<sup>12</sup>in tal caso  $\lambda_2 = -4$  risulta raggiungibile. Viceversa, se si sceglie  $\alpha = 3$

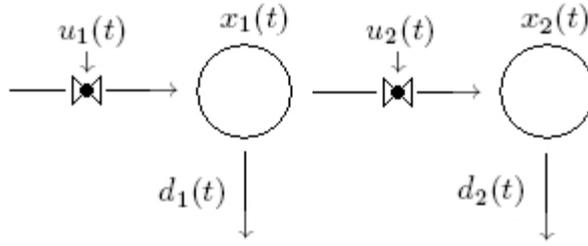


Figura 1.5: sistema di distribuzione idrica

Il sistema ammette rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$A$  si trova in una forma di Jordan che presenta un autovalore  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica 2 e grado 1: ciò garantisce la stabilità del sistema che evolverà col solo modo  $t^0 e^{0t} = 1$  (in evoluzione libera lo stato rimane costante e pari alle condizioni iniziali). Come prima cosa verifichiamo che il sistema sia completamente raggiungibile, perché si richiede l'arbitrarietà dello stato finale<sup>13</sup>. Calcoliamo per questo la matrice di raggiungibilità:

$$R = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno uguale a 2, e quindi lo spazio di raggiungibilità è  $X_r(x) = Ra(R) = \mathbb{R}^2$ . In particolare, analizzando le singole colonne di  $B$ , notiamo che il sistema sottoposto al solo ingresso  $u_1(t)$  può raggiungere stati appartenenti al sottospazio con vettore di base<sup>14</sup> ( $v_1 = [1 \ 0]^T$ ), viceversa sottoposto al solo ingresso  $u_2(t)$  può raggiungere quello generato da ( $v_2 = [-1 \ 1]^T$ ), con  $v_1$  e  $v_2$  linearmente indipendenti. Questo garantisce che una combinazione lineare dei due ingressi porti alla combinazione dei relativi spazi di raggiungibilità.

Prendiamo in considerazione la soluzione generale dell'evoluzione dello stato 1.14:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$$

lo sviluppo in serie 1.8 per il calcolo della matrice esponenziale è in questo caso banale:

$$e^{A(t-\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-\sigma)^k}{k!} = I + 0 + 0 + \dots$$

quindi lo stato al tempo  $\tau$  risulta:

$$x_{fin}(\tau) = x(0) + B \int_0^{\tau} u(\sigma)d\sigma$$

Nel problema della raggiungibilità si hanno in genere molte possibilità per scegliere la  $u(\sigma)$  candidata al nostro scopo. Per semplicità assumiamo di prendere un *ingresso costante*  $u(t) = \bar{u}$ : in tal caso per determinarlo occorre risolvere il sistema lineare  $2 \times 2$  seguente:

$$x_{fin}(\tau) = x(0) + B\tau\bar{u} \quad \Rightarrow \quad B\bar{u} = \frac{x_{fin}(\tau) - x(0)}{\tau}$$

$B$  è quadrata e invertibile, quindi  $\bar{u}$  è un vettore univocamente determinato da:

$$\bar{u} = \frac{B^{-1}}{\tau}[x_{fin}(\tau) - x(0)] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1fin} - x_1(0) \\ x_{2fin} - x_2(0) \end{bmatrix}$$

<sup>13</sup>il testo richiede anche che lo stato iniziale sia arbitrario: si è dimostrato però che se il sistema è completamente raggiungibile da zero, lo è anche da stato arbitrario. Vedere a riguardo la sezione 1.6

<sup>14</sup>basta calcolare la matrice  $R$  con  $A$  e la prima colonna di  $B$

da cui:

$$\bar{u}_1 = \frac{x_{1fin} - x_1(0) + x_{2fin} - x_2(0)}{\tau}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{x_{2fin} - x_2(0)}{\tau}$$

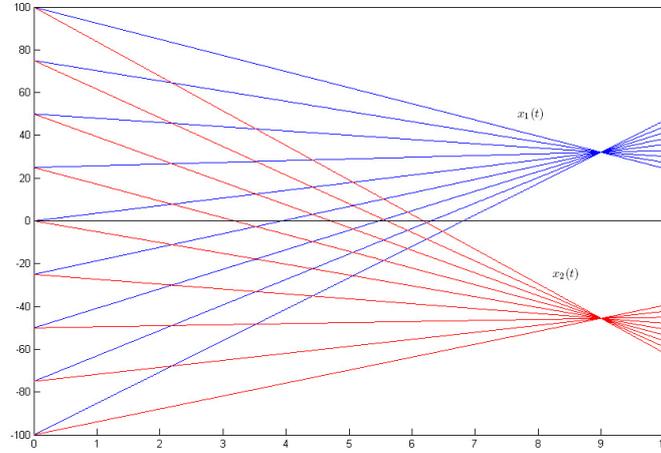


Figura 1.6: raggiungibilità di uno stato assegnato con tempo  $\tau$  fissato

Per simulare il sistema ne ricaviamo l'equivalente discreto con le stesse equazioni precedenti, valide perché abbiamo scelto l'ingresso  $u$  costante<sup>15</sup>. Le espressioni delle matrici 1.7 sono le seguenti:

$$A_D = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_D = \int_0^{T_c} e^{A\xi} B d\xi = \int_0^{T_c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} T_c & -T_c \\ 0 & T_c \end{bmatrix}$$

Si é simulato il sistema con passo  $T_c = 0.01sec$  per 1000 passi, dato  $\tau = 9sec$ , generando con la funzione `rand` uno stato finale  $x_{fin}(\tau)$  random, prendendo diverse condizioni iniziali  $x(0)$  e calcolando opportunamente i valori dell'ingresso. Per il grafico in figura lo stato finale generato dal programma é stato  $x_{fin} = [32.1407 \quad -45.5530]^T$ .

## 1.9 Controllabilità di uno stato assegnato con tempo assegnato (sistema a tempo discreto)

Consideriamo ora la versione a tempo discreto del sistema di distribuzione visto nella sezione precedente:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + u_1(t) - u_2(t) - d_1(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + u_2(t) - d_2(k)$$

nella forma  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)$ . La versione a tempo discreto é più adatta rispetto a quella a tempo continuo quando si parla di magazzini il cui bilancio é fatto periodicamente (per esempio giornalmente).

Dato lo stato iniziale:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e assunto l'ingresso esterno  $d$  di richiesta costante e pari a  $d_1(k) = d_2(k) = 5 \forall k$  vogliamo determinare  $T$  e una sequenza  $u(k)$   $k = 0, 1, \dots, T$  tale che  $x(T) = 0$ .

<sup>15</sup>e a maggior ragione sará costante a tratti con passo  $T_c$

Il sistema ammette rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{bmatrix}$$

anche in questo caso  $A$  si trova in una forma di Jordan, con autovalore  $\lambda = 1$  di molteplicità algebrica 2 e grado 1: anche per il sistema a tempo discreto ciò garantisce la stabilità imposta dal modo  $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} 1^k = 1$ . Raggruppando la matrice degli ingressi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ d_1(k) \\ d_2(k) \end{bmatrix}$$

calcoliamo la matrice di raggiungibilità:

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno uguale a 2 anche in questo caso. Merita precisare che, mentre per sistemi a tempo continuo il problema della raggiungibilità da 0 e della controllabilità a 0 sono equivalenti e vi è uguaglianza dei sottospazi di raggiungibilità e controllabilità  $X_R(x) = X_C(x)$ , questo non vale in generale per sistemi a tempo discreto per cui si ha in generale  $X_R(x) \subseteq X_C(x)$ , e si ha l'uguaglianza tra i due sottospazi solo quando  $A$ , come nel nostro caso, risulta invertibile.

L'espressione generale dell'evoluzione dello stato di sistemi discreti, in termini di evoluzione libera e forzata, è:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h) \quad (1.16)$$

essendo  $A = I$ , nel nostro caso si ottiene:

$$x(k) = x(0) + B \sum_{h=0}^{k-1} u(h)$$

Se si impone  $x(k=T) = 0$  e si tenta di risolvere il problema con un ingresso costante  $\bar{u}$  anche in questo caso, si ottiene:

$$B \sum_{h=0}^{T-1} \bar{u} = T B \bar{u} = -x(0) \Rightarrow T \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - 5) &= -4 \\ T(\bar{u}_2 - 5) &= 2 \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= \frac{2}{T} + 5 \\ \bar{u}_1 &= -\frac{2}{T} + 10 \end{aligned}$$

Si è simulato il sistema, assegnando  $T$  compreso tra 0 e 10, visualizzando l'evoluzione dei livelli  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$  assunti dai due magazzini.

L'applicazione degli esempi 1.8 e 1.9 è la seguente: supponendo di dover gestire una coppia di magazzini come in figura 1.5, lo stato finale rappresenta il livello di scorta desiderato, mentre l'ingresso determinato rappresenta la produzione nell'intervallo assegnato in modo da raggiungere tale livello.

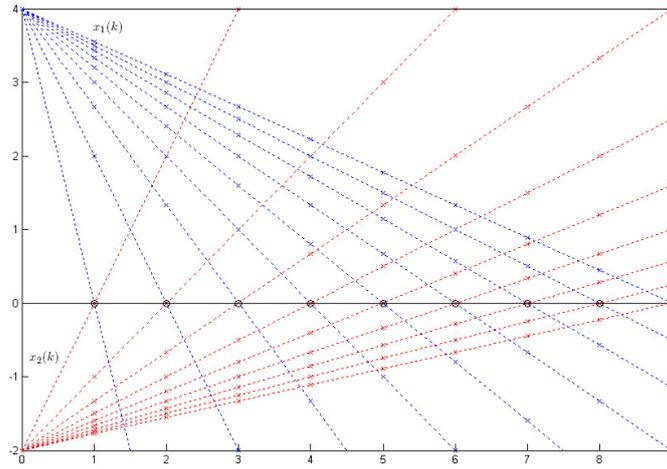


Figura 1.7: Controllabilità a zero con  $T$  assegnato

## 1.10 Sistema conto corrente

Esaminiamo un semplicissimo sistema dinamico che descrive il saldo su un conto corrente. Tale sistema è rappresentato da una equazione alle differenze del primo ordine:

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - d(k) + ix(k)$$

riferita ad un tempo di campionamento prefissato (tipicamente di un giorno o di un mese). Lo stato  $x(k)$ , gli ingressi  $u(k)$  e  $d(k)$  sono rispettivamente il saldo, i depositi e i prelievi del periodo corrente, mentre  $i$  è il tasso di interesse.

\* \* \* \*

### 1.10.1 Estinzione di un debito

Vediamo in che termini l'estinzione di un debito possa essere vista come un problema di controllabilità a zero: supponiamo  $x(0) = -C$  il debito iniziale e di volerlo estinguere in  $T$  passi,  $x(T) = 0$ . Per il solo problema del mutuo poniamo  $d(k) = 0 \forall k$ , nell'ipotesi che non vengano effettuati prelievi, e una rata costante  $u(h) = \bar{u}$ <sup>16</sup>. In questo caso particolare otteniamo il sistema discreto:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) + \bar{u}$$

con  $A = \alpha = 1+i$  e  $B = 1$ . Per cui l'evoluzione dello stato 1.16 si particolarizza come:

$$x(k) = \alpha^k(-C) + \sum_{h=0}^{k-1} \alpha^{k-h-1} \bar{u}$$

Imponendo  $x(T) = 0$  ricaviamo il valore di  $\bar{u}$ :

$$x(T) = 0 = \alpha^T(-C) + \sum_{h=0}^{T-1} \alpha^{T-h-1} \bar{u}$$

invertiamo tale equazione e moltiplichiamo e dividiamo per il fattore  $(1-\alpha)$ :

$$C = \frac{(\alpha^{T-1} + \alpha^{T-2} + \dots + \alpha^2 + \alpha + 1)}{\alpha^T} \cdot \bar{u} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha}$$

da cui si ricava:

$$C = \frac{1-\alpha^T}{(1-\alpha)\alpha^T} \bar{u} \Rightarrow \bar{u} = \frac{\alpha^T(\alpha-1)}{\alpha^T-1} C$$

<sup>16</sup>la somma di quota capitale e quota di interesse deve essere costante

per cui, risostituendo  $\alpha = 1 + i$ , otteniamo la nota formula per il calcolo della rata per l'estinzione del debito in  $T$  passi in funzione dell'interesse  $i$ :

$$\bar{u} = \frac{(1+i)^T i}{(1+i)^T - 1} C$$

### 1.10.2 Rata variabile

Consideriamo ora una variante del problema precedente. Dato un debito iniziale  $-C$ , si vuole determinare una regola per la determinazione delle rate affinché:

1. ogni rata sia proporzionale al debito corrente.
2. in  $T$  mesi,  $T > 0$  intero assegnato, il debito sia dimezzato.

La condizione di debito iniziale e di rate proporzionali si traducono sulle condizione iniziale  $x(0) = -C$ , e sull'ingresso  $u(k) = -\mu x(k)$ . L'equazione nel nostro caso diventa:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) - \mu x(k) \quad \Rightarrow \quad x(k+1) = (1+i-\mu)x(k)$$

data la condizione sulle rate il sistema evolve in risposta libera:

$$x(k) = (1+i-\mu)^k x(0)$$

Per la determinazione di  $\mu$  occorre imporre:

$$-\frac{C}{2} = (1+i-\mu)^T (-C)$$

$$1+i-\mu = \sqrt[T]{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mu = 1+i - \sqrt[T]{\frac{1}{2}}$$

## 1.11 Evoluzione da stato iniziale non raggiungibile

In un sistema non raggiungibile, assunto lo stato  $x(0) \notin X_r(x)$  l'insieme di raggiungibilità da  $x(0)$  non è un sottospazio.

Sia dato il sistema a tempo continuo con lo stato iniziale indicato:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mostriamo che l'insieme di tutti gli stati raggiungibili a partire da tale stato iniziale è la striscia:

$$S = \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < 1, \quad x_1 \text{ arbitrario}\}$$

Si può verificare inizialmente la mancata raggiungibilità del sistema applicando il criterio di Popov:

$$\text{rank} [\lambda I - A \quad B]_{\lambda=-1} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank} [\lambda I - A \quad B]_{\lambda=-2} = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Quindi esiste un sottosistema non raggiungibile che evolve con autovalore  $-2$ . Costruiamo la matrice di raggiungibilità:

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il sottospazio raggiungibile da zero é l'immagine della matrice  $R$ , ovvero quello generato dalle colonne di  $R$  linearmente indipendenti:

$$X_r(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e  $x(0)$  non appartiene quindi a  $X_r(x)$ . Per dimostrare che la generica traiettoria del sistema é contenuta nella striscia  $S$  occorre sviluppare l'espressione dell'evoluzione dello stato. Essendo  $A$  in forma diagonale i conti sono particolarmente semplici:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\sigma)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\sigma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\sigma) d\sigma \\ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\sigma)} u(\sigma) d\sigma \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-(t-\sigma)} u(\sigma) d\sigma \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione contiene in sé il risultato:  $x_2(t)$  é in evoluzione libera ed assume valori compresi tra 1 per  $t = 0$ , e 0 per  $t \rightarrow \infty$ , mentre  $x_1(t)$  é influenzato dall'ingresso e può assumere valori arbitrari. Essendo il sottosistema non raggiungibile asintoticamente stabile,  $x_2 \rightarrow 0$  e asintoticamente i valori che assume lo stato tendono verso l'insieme degli stati raggiungibili  $X_r(x)$ .

## 1.12 L'insieme di Raggiungibilit  nell'intervallo $[0; \tau]$ , dati ingressi limitati, é un insieme convesso

Un sottoinsieme  $P \subseteq R^n$  é convesso se per ogni coppia di punti  $x_1 \in P$ ,  $x_2 \in P$ , allora anche il segmento che li congiunge é interamente contenuto in  $P$ :

$$sgm = P\{x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad \alpha \in R, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset P$$

Mostriamo che per un sistema lineare invariante  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  con un solo ingresso ( $m = 1$ ) limitato  $|u(t)| \leq u_{max}$ , l'insieme di raggiungibilit  nell'intervallo  $[0; \tau]$   $X_{r[0; \tau]}$  con  $\tau > 0$  é convesso. Sia  $x_1 \in X_{r[0; \tau]}(x) \Rightarrow \exists u_1(\sigma)$  tale che lo stato é raggiungibile da zero nell'intervallo  $[0; \tau]$ :

$$x_1 = \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} B u_1(\sigma) d\sigma$$

Sia  $x_2 \in X_{r[0; \tau]}(x) \Rightarrow \exists u_2(\sigma)$  tale che lo stato é raggiungibile da zero nell'intervallo  $[0; \tau]$ :

$$x_2 = \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} B u_2(\sigma) d\sigma$$

Come noto, lo spazio di raggiungibilit  non dipende da  $\tau$ :  $X_{r[0; \tau]}(x) = X_r(x)$  ed é l'immagine della matrice  $R$ :

$$X_{r[0; \tau]}(x) = X_r(x) = Ra(R), \quad X_r(x) = \{[t_1], [t_2], [t_3], \dots, [t_r]\}$$

dove i vettori colonna  $[t_i]$  sono i vettori che formano la base dello spazio di raggiungibilit  ovvero, come gi  menzionato, le colonne linearmente indipendenti di  $R$ . Per la propriet  degli spazi vettoriali della chiusura rispetto alla somma, lo stato  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X_r(x)$ . Questo si pu  subito verificare se si esprimono gli stati  $x_1$  e  $x_2$  come combinazione dei  $[t_i]$ :

$$x_1 = \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2 + \gamma_3 t_3 + \dots + \gamma_r t_r$$

$$x_2 = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 + \dots + \beta_r t_r$$

allora:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 = k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 + \dots + k_r t_r$$

anche  $x$  risulta essere combinazione lineare dei vettori colonna  $[t_i]$ , prese le costanti  $k_i = \alpha \gamma_i + (1 - \alpha)\beta_i$ , e quindi appartenente a  $X_r(x)$ .

Data la limitazione dell'ingresso, resta da verificare che esista l'ingresso  $|u(\cdot)| < u_{max}$  tale che  $x$  sia raggiungibile nell'intervallo  $[0; \tau]$ . A tal scopo sviluppiamo l'espressione di  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 = \alpha \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} B u_1(\sigma) d\sigma + (1 - \alpha) \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} B u_2(\sigma) d\sigma = \\ &= \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} B [\alpha u_1(\sigma) + (1 - \alpha)u_2(\sigma)] d\sigma \end{aligned}$$

chiamiamo  $u(t) = u_1(t) + (1 - \alpha)u_2(t)$  e valutiamone il modulo:

$$|u(t)| = |u_1(t) + (1 - \alpha)u_2(t)| \leq |\alpha u_1(t)| + |(1 - \alpha)u_2(t)|$$

per la disuguaglianza di Schwartz. I valori consentiti per  $\alpha$  sono positivi ma  $\alpha \leq 1$ , quindi:

$$|u(t)| \leq \alpha |u_1(t)| + (1 - \alpha) |u_2(t)| \leq \alpha u_{max} + (1 - \alpha)u_{max} = u_{max}$$

Perciò  $x \in X_{r[0;\tau]}(x)$  rispettando il vincolo imposto sull'ingresso  $u(t)$ .

### 1.13 Sulla raggiungibilità di una coppia (A, B) ... evitando conti inutili

Si consideri il sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & \alpha & 0 \\ -13 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \beta & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e cerchiamo i valori dei parametri per cui il sistema è completamente raggiungibile.

Analizzando la forma delle matrici  $A$  e  $B$  ci accorgiamo che l'ultima equazione risulta:

$$\dot{x}_5(t) = \gamma x_5(t)$$

e per qualsiasi valore di  $\gamma$  tale sottosistema evolve in evoluzione libera senza influenza dell'ingresso  $u(t)$ , il che equivale a dire che  $\gamma$  è un autovalore della parte non raggiungibile del sistema. Il problema quindi non è solubile perché  $\forall$  valore di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  il sistema ammette una parte non raggiungibile.

### 1.14 Base dello spazio non osservabile

*Sappiamo che una base del sottospazio di non osservabilità è ricavabile come nucleo della matrice di osservabilità. È possibile effettuare il calcolo in altro modo nel caso in cui  $A$  abbia autovalori distinti.*

Vogliamo verificare, in tal caso, che una base dello spazio non osservabile del sistema a tempo continuo  $(A, B, C)$  è data da tutti gli autovettori associati agli autovalori non osservabili. Se  $A$  ha autovalori distinti, allora è sempre diagonalizzabile. Scegliamo la matrice degli autovettori così ordinata:

$$T = [ \bar{t}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \dots \quad \bar{t}_h \mid \bar{t}_{h+1} \quad \bar{t}_{h+2} \quad \dots \quad \bar{t}_n ] = [ T_1 \mid T_2 ]$$

dove le prime  $h$  colonne sono gli autovettori associati agli autovalori non osservabili  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$ . Quindi, utilizzando la 1.2:

$$A = T \begin{bmatrix} \Lambda_{n.oss.} & \bar{0} \\ \bar{0} & \Lambda_{oss.} \end{bmatrix} S =$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \bar{t}_1 & \bar{t}_2 & \dots & \bar{t}_h & \bar{t}_{h+1} & \bar{t}_{h+2} & \dots & \bar{t}_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{h+1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \bar{s}_h \\ \hline \bar{s}_{h+1} \\ \bar{s}_{h+2} \\ \vdots \\ \bar{s}_n \end{array} \right]$$

Come noto, una trasformazione di stato non modifica né i modi del sistema né gli spazi di raggiungibilità e osservabilità. Se si attua quindi una trasformazione di stato  $x(t) = T\hat{x}(t)$  scegliendo la matrice di base  $T$ :

$$\hat{A} = T^{-1}AT = SAT = \Lambda, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT$$

si ottiene il sistema trasformato nella forma partizionata a blocchi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda_{n.oss.} & \bar{0} \\ \bar{0} & \Lambda_{oss.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si é cioè portato il sistema nella forma di Kalman di osservabilità<sup>17</sup>: la prima equazione, che indica l'evoluzione delle componenti del vettore di stato  $\hat{x}_1(t)$ , é governata dai soli autovalori non osservabili, inoltre  $C_1 = \bar{0}$  perché per definizione l'uscita non risente in modo alcuno dei modi non osservabili (o meglio l'evoluzione di  $\hat{x}_1(t)$  produce uscita nulla). Ciò implica che nella nuova base  $T$  lo spazio non osservabile é l'insieme dei vettori che hanno solo le prime  $h$  componenti non nulle:

$$\hat{X}_{no} = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$$

e quindi gli stati non osservabili nel sistema originario:

$$x = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_1 \hat{x}_1$$

sono combinazioni lineari delle colonne di  $T_1$ , come volevasi dimostrare.

## 1.15 Un semplice circuito

Si consideri il parallelo di due impedenze  $Z_1$  costituita dalla serie di una capacità  $C$  e una resistenza  $R_C$ ,  $Z_2$  costituita dalla serie di una induttanza  $L$  e una resistenza  $R_L$ . Assunto come ingresso la tensione applicata a tale parallelo, indichiamo per quali valori dei parametri il sistema é raggiungibile. Assunta come uscita la tensione ai capi di  $R_L$ , mostriamo che il sistema é non osservabile.

Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{aligned} u(t) &= R_L i_L(t) + L \dot{i}_L(t) \\ u(t) &= v_C(t) + R_C C \dot{v}_C(t) \end{aligned}$$

dove  $v_C(t)$  e  $i_L(t)$  sono le variabili di stato. In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_C C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_C C} \end{bmatrix} u(t)$$

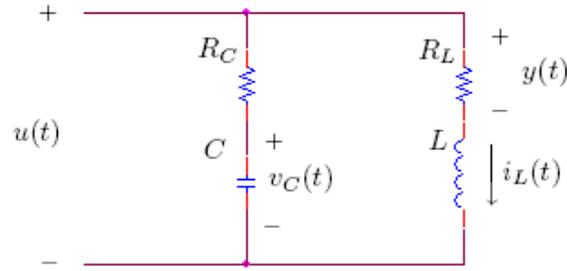


Figura 1.8: studio della raggiungibilità e osservabilità per un circuito elettrico

Costruiamo la matrice di raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R_L}{L^2} \\ \frac{1}{R_C C} & -\frac{1}{R_C^2 C^2} \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = -\frac{1}{LR_C^2 C^2} + \frac{R_L}{L^2 R_C C}$$

tale determinante rimane diverso da zero se  $\frac{R_L}{L} \neq \frac{1}{R_C C}$ , ossia i poli associati all'induttore e al condensatore sono distinti. Data l'uscita:

$$y(t) = \begin{bmatrix} R_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

la matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} R_L & 0 \\ -\frac{R_L^2}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

non ha rango pieno. Quindi il sistema non è osservabile indipendentemente dai parametri.  $X_{no} = Ker(O)$  con dimensione:

$$n.colonne(O) = rank(O) + dim[Ker(O)] \Rightarrow dim[Ker(O)] = 1$$

per cui una base del nucleo si può calcolare come segue:

$$\begin{bmatrix} R_L & 0 \\ -\frac{R_L^2}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e fissando  $v_2 = 1$  ricaviamo la base  $X_{no} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ , informazione che ci dice che data l'uscita  $y(t)$  non è possibile risalire univocamente alla tensione iniziale  $v_C(0)$  ai capi del condensatore o, parimenti, che l'evoluzione dell'uscita non è interessata dal modo  $\lambda = -\frac{1}{R_C C}$ , come si può verificare con *Popov*:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}_{\lambda = -\frac{1}{R_C C}} = \det \begin{bmatrix} \frac{R_L}{L} - \frac{1}{R_C C} & 0 \\ 0 & 0 \\ R_L & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Quanto visto ha la seguente applicazione: supponiamo di voler calcolare la corrente istantanea  $i_L(t)$  in un avvolgimento potendo solo effettuare misure di tensione. La cosa sarebbe attuabile

<sup>17</sup>vedere problema 2.2: la forma generale presenta matrice  $\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{no} & A_{no,o} \\ 0 & A_o \end{bmatrix}$  in cui  $A_{no,o}$  indica l'influenza del sottospazio osservabile su quello non osservabile ed in questo caso è la matrice nulla

misurando la tensione ai capi della resistenza  $v_{R_L}(t)$  ma non é possibile perché  $R$  ed  $L$  non sono fisicamente separabili in un avvolgimento. Occorre invece aggiungere un circuito  $RC$  in parallelo, come in figura 1.8, in modo tale da rendere non raggiungibile il sistema. Infatti, nel caso di mancata raggiungibilità  $\frac{R_L}{L} = \frac{1}{R_C C}$ :

$$R^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{R_C C L} \\ \frac{R_L}{L} & -\frac{R_L}{R_C C L} \end{bmatrix}$$

quindi:

$$X_r = Ra(R) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ R_L \end{bmatrix} \right\}$$

Segue che, in tali condizioni, sotto l'azione dell'ingresso é possibile raggiungere solo stati in cui tensione e corrente sono proporzionali:

$$v_C(t) = R_L i_L(t)$$

e dalla misura di  $v_C(t)$  é possibile risalire ad  $i_L(t)$ .

## 1.16 Sulle condizioni iniziali

### 1.16.1 Determinazione delle condizioni iniziali data l'uscita

*Il problema dell'osservabilità consiste nel determinare le condizioni iniziali date le informazioni esterne  $u(t)$  e  $y(t)$ .*

Ad esempio, dato il sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [ 1 \quad 1 ]$$

e l'uscita  $y(t) = -e^{-t}$ , vogliamo determinare le condizioni iniziali del sistema.

Verifichiamo, innanzi tutto, la completa osservabilità del sistema:

$$\text{rank}(O) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

da cui si deduce che il problema é solubile. Vengono mostrate due strade possibili per la soluzione di tale problema.

- essendo il sistema diagonale e privo di ingressi forzanti, possiamo risolvere separatamente due equazioni differenziali omogenee:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) \end{aligned}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k_1 e^{-t}, & k_1 &= x_1(0) \\ x_2(t) &= k_2 e^{-2t}, & k_2 &= x_2(0) \\ y(t) &= x_1(0)e^{-t} + x_2(0)e^{-2t} \end{aligned}$$

Quindi é necessario che la condizione iniziale sia:

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Il sistema evolve in risposta libera, di cui possiamo calcolare la trasformata di Laplace:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \xrightarrow{L} Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

sviluppando i conti e trasformando l'uscita, ricordando che  $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ , si ottiene:

$$-\frac{1}{s+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

da cui, esplicitando i prodotti:

$$-\frac{1}{s+1} = \frac{x_1(0)}{s+1} + \frac{x_2(0)}{s+2} \Rightarrow x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 0$$

### 1.16.2 Determinazione della forma di stato e delle condizioni iniziali

*Ovviamente, il problema della osservabilità é solubile se é data una forma di stato.*

Data l'equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

la soluzione d'uscita  $y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + 1$ , e la forzante  $u(t) = 1$  per  $t \geq 0$ , possiamo determinare le condizioni iniziali in termini di  $y(0)$  e  $y'(0)$ . Questo è un problema di osservabilità se assumiamo come variabili di stato  $x_1(t) = y(t)$  e  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ . Il sistema di equazioni differenziali che si ottiene risulta dunque:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_2(t) - 2x_1(t) + u(t) \end{aligned}$$

con rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

anche in questo caso conviene passare al dominio della trasformata di Laplace per sviluppare i conti, sapendo che:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

le trasformata corrispondenti all'ingresso e all'uscita sono:

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}^{18}$$

quindi deve valere l'uguaglianza:

$$\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)s}$$

uguagliando i coefficienti ed il numeratore si ricavano i valori di  $x_1(0)$  e  $x_2(0)$ . Sviluppando però i conti, arriviamo all'equazione:

$$\frac{s^2 + 2s + 2}{(s^2 + 3s + 2)s} = \frac{[(s+3)x_1(0) + x_2(0)]s + 1}{(s^2 + 3s + 2)s}$$

per cui si deduce l'impossibilità di eguagliare i termini noti dei due polinomi a numeratore. Ciò implica che il sistema, dato l'ingresso non può ammettere una tale soluzione d'uscita. Un altro modo per accorgersi di questo fatto è sostituire le equazioni temporali dell'uscita e delle sue derivate all'interno dell'equazione differenziale, verificando che non risulta una identità.

<sup>18</sup>il problema é solubile in quanto l'uscita di un sistema dinamico evolve attraverso una opportuna combinazione lineare di modi interni al sistema e modi appartenenti all'ingresso: in questo caso il sistema ha autovalori pari ad 1 e 2, l'ingresso a gradino l'autovalore 0

## Capitolo 2

# Regolazione e controllo

In questo capitolo verranno risolti dei problemi di sintesi di controllo. In alcuni casi i risultati saranno testati tramite simulazione.

### 2.1 Regolazione tramite retroazione dello stato con compensazione non lineare

In questa sezione viene ricavato il modello di un sistema meccanico, illustrata la teoria di base della retroazione dello stato e l'applicazione di tale metodo per un sistema non lineare.

La teoria della retroazione dello stato per sistemi lineari prevede di studiare un sistema nella forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

supposto  $C = I$ , cioè di avere come uscita del sistema tutte le variabili di stato. Lo scopo è quello di assegnare ad arbitrio gli autovalori del sistema lineare con un opportuno regolatore in retroazione. Si può constatare facilmente che un regolatore statico del tipo:

$$u(t) = Kx(t) + v(t) \quad (2.1)$$

può assolvere alle specifiche di progetto<sup>1</sup>: tale regolatore si dice statico in quanto non presenta variabili di stato,  $K$  è una matrice di parametri liberi settabile a piacere,  $v(t)$  un segnale di ingresso esterno con condizioni iniziali nulle. Inserendo tale equazione nel sistema precedente risulta:

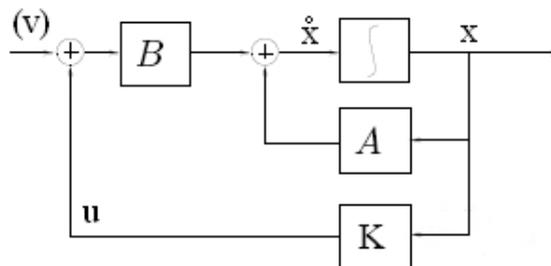


Figura 2.1: schema per la retroazione dello stato

$$\dot{x}(t) = [A + BK]x(t) + Bv(t)$$

<sup>1</sup>se  $C \neq I$ , una retroazione statica dell'uscita  $y(t) = Kx(t)$  non permette di allocare ad arbitrio le radici ad anello chiuso, perché queste sono vincolate a rimanere sul luogo delle radici.

Si noti che tali parametri  $K$  intervengono a modificare la matrice della dinamica  $A$  ad anello aperto e che  $v(t)$  assume il ruolo di riferimento di ingresso del sistema retroazionato. Se si pone  $v(t) = 0$  si ottiene un sistema che evolve in risposta libera con matrice della dinamica  $[A + BK]$ . Non sempre si possono allocare ad arbitrio gli autovalori del sistema originale: il concetto è presto detto se adoperiamo la scomposizione di Kalman di raggiungibilità, per cui esiste una trasformazione di stato  $T$ , costruendo  $T$  con una base di  $X_r(x)$  e affiancando un completamento di  $\mathfrak{R}^n$ , che porta il sistema nella forma a matrici partizionate:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ \dot{x}_{nr}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_r & A_{r,nr} \\ \bar{0} & A_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(t) \\ x_{nr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ \bar{0} \end{bmatrix} u(t) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} K_r & K_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(t) \\ x_{nr}(t) \end{bmatrix} + v(t) \end{aligned}$$

Dove il pedice  $r$  individua le matrici del sottosistema raggiungibile e  $nr$  di quello non raggiungibile. Le equazioni ad anello chiuso risultano:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ \dot{x}_{nr}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r + B_r K_r & A_{r,nr} + B_r K_{nr} \\ \bar{0} & A_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(t) \\ x_{nr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ \bar{0} \end{bmatrix} v(t)$$

in cui si osserva che la matrice della dinamica ad anello chiuso, essendo triangolare a blocchi, presenta autovalori:

$$\Lambda_c = \sigma(A_r + B_r K_r) \cup \sigma(A_{nr})$$

e quindi non sono allocabili gli autovalori della parte non raggiungibile del sistema. Se il sistema è completamente raggiungibile esistono diverse tecniche per ricavare i parametri  $k_i$  della matrice  $K^2$  per assegnare in retroazione arbitrariamente, sotto il vincolo del coniugio, le radici del polinomio caratteristico, o meglio gli elementi dell'insieme  $\Lambda_c$  spettro di  $[A + BK]$ . Nel problema che segue, ci si riconduce a questa parte teorica studiando, però, un problema non lineare e viene introdotta la tecnica delle cancellazioni.

\* \* \* \*

Si consideri il seguente sistema meccanico, composto da due bracci privi di massa collegati da un giunto, vincolati ad un corpo di massa  $m$  costretto a muoversi su un piano inclinato senza attrito. All'estremità del primo braccio si considera una coppia applicata  $C_m(t)$ , che sarà il nostro ingresso:

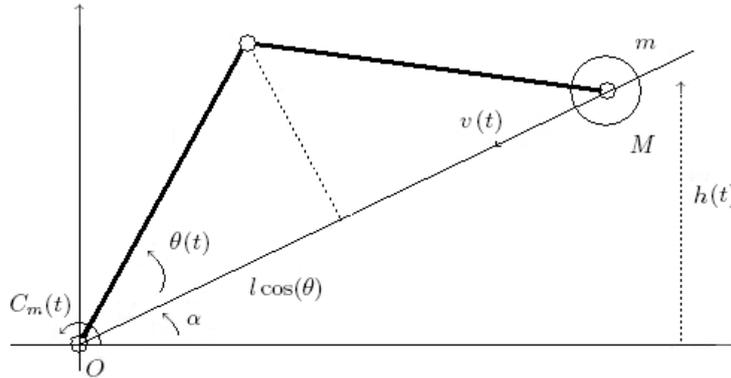


Figura 2.2: sistema meccanico non lineare

Si vuole sintetizzare un regolatore a retroazione dello stato che stabilizzi il sistema nel generico punto di equilibrio:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\omega} = 0 \end{bmatrix}$$

<sup>2</sup>in generale occorre attuare una trasformazione di stato per porre le matrici in forma di Frobenius, per cui risulta facile settare i valori di  $K$ : tale matrice di trasformazione può essere calcolata invertendo l'equazione di trasformazione della matrice di raggiungibilità  $R = TR_F$ . Successivamente si attua la trasformazione inversa. Tuttavia se  $B$  ha un solo elemento diverso da zero si può procedere diversamente come verrà ripreso

qualunque sia la condizione iniziale  $x(0)$ .

Come prima cosa, ricaviamo le equazioni differenziali che descrivono il comportamento di tale sistema. Fissato il verso di rotazione positivo antiorario, partiamo da un bilancio energetico uguagliando la potenza fornita dalla coppia alla variazione dell'energia meccanica del corpo:

$$C_m \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{d}{dt} (mgh) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) + mg \frac{d}{dt} (h)$$

Dove, per semplicitá, non si é indicata la ovvia dipendenza temporale delle variabili e si noti che il verso della velocità  $v$  non conta in quanto occorre calcolarne il quadrato. Occorre ricavare un sistema di equazioni nelle due variabili di stato  $\theta(t)$  e  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ . Per questo occorre esplicitare  $v(t) = v(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ ,  $h(t) = h(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ .

$$OM = 2l \cos(\theta) \quad h = OM \sin(\alpha) = 2l \cos(\theta) \sin(\alpha) \quad v = \frac{d}{dt}(OM) = \frac{d}{dt}(2l \cos(\theta)) = -2l \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Inseriamo tali equazioni nell'espressione precedente ed esplicitiamo una equazione differenziale per la sola variabile  $\theta$ :

$$C_m \dot{\theta} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (4l^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2) + mg \frac{d}{dt} (2l \cos(\theta) \sin(\alpha))$$

$$C_m \dot{\theta} = 2ml^2 \frac{d}{dt} (\sin^2(\theta) \dot{\theta}^2) + 2mgl \sin(\alpha) \frac{d}{dt} (\cos(\theta))$$

$$C_m \dot{\theta} = 2ml^2 [2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^3 + 2\dot{\theta} \ddot{\theta} \sin^2(\theta)] - 2mgl \sin(\alpha) \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Semplifichiamo  $\dot{\theta}$  e otteniamo:

$$C_m = 4ml^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + 4ml^2 \sin^2(\theta) \ddot{\theta} - 2mgl \sin(\alpha) \sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} 4ml^2 \sin^2(\theta) = C_m - 4ml^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + 2mgl \sin(\alpha) \sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = C_m \frac{1}{4ml^2 \sin^2(\theta)} - \dot{\theta}^2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{g \sin(\alpha)}{2l \sin(\theta)} \quad (2.2)$$

Abbiamo ottenuto una equazione differenziale di secondo grado non lineare che é possibile scomporre in un sistema di due equazioni di primo grado. Chiamiamo le variabili di stato e l'ingresso come:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ C_m(t) \end{bmatrix}$$

Allora:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_2 = \left[ \frac{g \sin(\alpha)}{2l \sin(x_1)} - x_2^2 \cot(x_1) \right] + u \frac{1}{4ml^2 \sin^2(x_1)} \quad (2.4)$$

Con il chiaro significato dei simboli, definiamo le funzioni  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  che saranno utili in seguito<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \Phi_1(x_1, x_2) + \Phi_2(x_1)u \end{aligned}$$

che é un particolare caso di sistema *non lineare*, chiamata  $\rho$  la corrispondente funzione di transizione:

$$\dot{x} = \rho(x, u) \quad (2.5)$$

Per affrontare il problema successivo della sintesi del regolatore, utilizzeremo la teoria classica della retroazione dello stato, adattandola al caso specifico. Supponiamo quindi di avere a disposizione

<sup>3</sup>per semplicitá non si é riportata l'analisi dimensionale delle equazioni. Si può verificarne comunque la correttezza.

due sensori che forniscano in uscita il segnale angolare  $x_1(t) = \theta(t)$  e quello della velocità angolare  $x_2(t) = \omega(t)$ . Per i nostri scopi porremo  $v(t) = 0^4$  e vogliamo ottenere un sistema che evolvi in risposta libera e si posizioni nel punto di equilibrio specificato.

Il problema che sorge é quello della *non linearit * del sistema: si potrebbe pensare allora di studiarlo attorno al punto di equilibrio specificato  $(\bar{x}, \bar{u})$ . In questo caso le tecniche precedenti possono essere ancora adottate direttamente: occorre linearizzare il sistema attorno al punto di equilibrio considerato e ricavare le matrici  $A_{(\bar{x}, \bar{u})}$  e  $B_{(\bar{x}, \bar{u})}$  corrispondenti. Quindi sintetizzare il regolatore lineare  $K$  che prende come ingresso le variazioni dei segnali  $x(t)$  e  $u(t)$  attorno al tale punto di equilibrio, cio :

$$z(t) = x(t) - \bar{x}(t), \quad v(t) = u(t) - \bar{u}(t)$$

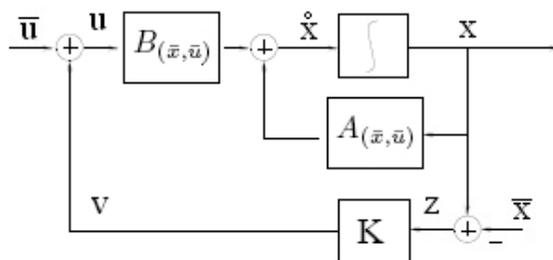


Figura 2.3: schema retroazione dello stato attorno ad un punto di riposo

Tale schema, descritto in figura 2.3, funzionerebbe, per , *solo per condizioni iniziali opportune nell'intorno del punto di riposo  $(\bar{x}, \bar{u})$*  per cui siano ancora validi gli approssimanti lineari. Si ricorda che i sistemi non lineari hanno la caratteristica di avere un comportamento stabile o instabile, per piccole variazioni, che dipende dal punto di lavoro considerato e, quindi, non   garantito che il regolatore cos  costruito funzioni per condizioni iniziali generiche.

Quello che si pu  fare   sintetizzare un *regolatore con precompensazione non lineare*. Prendiamo a tal scopo il regolatore seguente:

$$u(t) = -\Phi_1(x_1, x_2)\Phi_2^{-1}(x_1) + (k_1x_1 + k_2x_2)\Phi_2^{-1}(x_2) \quad (2.6)$$

inserendo l'equazione nel sistema ricavato precedentemente otteniamo in retroazione:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1 + k_2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Il regolatore rende lineare il sistema tramite *cancellazione delle non linearit *, e in tal modo   garantito che il sistema evolva temporalmente con gli stessi autovalori, per ogni condizione iniziale. Il polinomio caratteristico di tale matrice risulta essere:

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -k_1 & s - k_2 \end{bmatrix} = s^2 - k_2s - k_1$$

e possono essere settati arbitrariamente entrambi gli autovalori in retroazione agendo sui  $k_i$ , i quali risultano essere i coefficienti del polinomio caratteristico. Si pu  verificare, risolvendo l'equazione  $\dot{x}(t) = 0$ , che il punto di equilibrio di questo sistema risulta:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

che corrisponde al braccio completamente disteso. Se vogliamo un punto di equilibrio generico occorre traslare le variabili di stato  $x_1$  e  $x_2$  come segue:

<sup>4</sup>ogni ingresso verr  considerato come disturbo in coppia

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) - \bar{\theta} \\ \dot{\theta} \\ C_m(t) \end{bmatrix}$$

Se ricalcoliamo il sistema di partenza 2.1, sostituendo le nuove variabili otteniamo le equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \Phi_1(x_1 + \bar{\theta}, x_2) + \Phi_2(x_1 + \bar{\theta})u \end{aligned}$$

prendiamo il regolatore 2.6 così modificato:

$$u(t) = -\Phi_1(x_1 + \bar{\theta}, x_2)\Phi_2^{-1}(x_1 + \bar{\theta}) + (k_1x_1 + k_2x_2)\Phi_2^{-1}(x_1 + \bar{\theta})$$

Sostituendo tale equazione del regolatore riotteniamo lo stesso sistema con lo stesso punto di equilibrio 2.7, ma diverso significato per le variabile  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = 0 &\Rightarrow \theta(t) = \bar{\theta} \\ \bar{x}_2 = 0 &\Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0 \end{aligned}$$

Si riporta lo schema a blocchi del regolatore con compensazione delle non linearità:

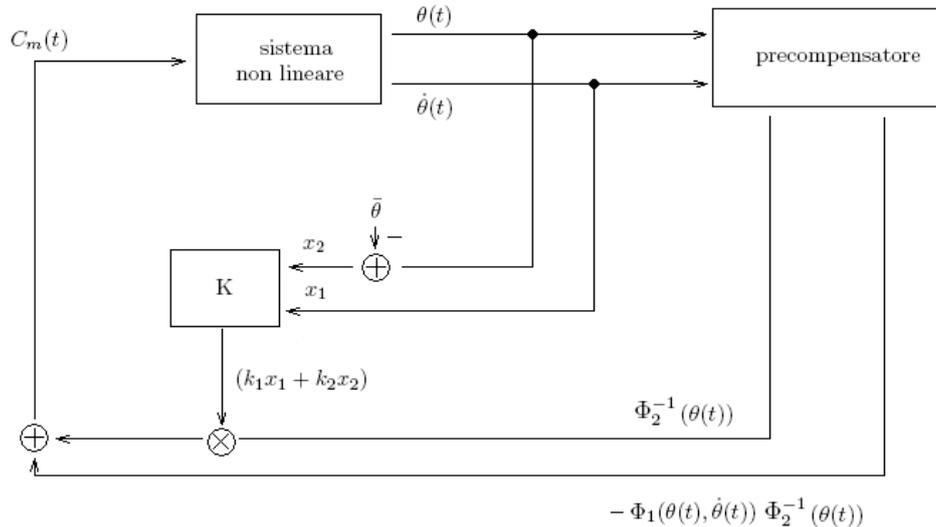


Figura 2.4: schema per cancellazione delle non linearità per il braccio meccanico

Si noti che mentre la sintesi analitica del regolatore é stata effettuata a tempo continuo, il blocco statico precompensatore non lineare é, generalmente, realizzato in maniera discreta via software: il segnale  $\theta(t)$  viene convertito da un  $A/D$  e campionato con passo  $T_c$ , mentre in uscita viene calcolato il segnale  $\Phi(\theta^*(t))$  costante a tratti tramite un mantentore  $D/A$ . In tal caso il comportamento del sistema *approssima* quello analitico in dipendenza del passo  $T_c$  considerato<sup>5</sup>.

## 2.2 Osservatore di un sistema termico con ingresso esterno

*In questa sezione viene illustrata la tecnica per la sintesi di un osservatore per la ricostruzione asintotica delle variabili di stato di un sistema lineare, ponendo l'accento sul problema di ingressi esterni noti o meno e della loro influenza sull'evoluzione dell'errore.*

<sup>5</sup>per il controllo di sistemi meccanici, il passo di campionamento dei convertitori  $A/D$   $D/A$  elettronici é generalmente sufficienti per un'ottima approssimazione delle soluzioni a tempo continuo

La teoria dell'osservazione si pone l'obiettivo di ricostruire asintoticamente i segnali corrispondenti all'evoluzione delle variabili interne di un sistema attraverso le informazioni dell'uscita misurata  $y(t)$  (ciò è dovuto al fatto che per motivi economici o fisici non è possibile avere a disposizione un sensore per ogni variabile di stato, ossia avere matrice  $C = I$  come avviene per la retroazione dello stato). La tecnica base prevede di studiare un sistema lineare del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'osservatore asintotico di Luemberger è un sistema governato dalle equazioni:

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + Bu(t) + L[y(t) - y_o(t)] \quad (2.8)$$

$$y_o(t) = Cx_o(t) \quad (2.9)$$

Esso presenta le stesse equazioni e parametri  $A$ ,  $B$ ,  $C$  del sistema di partenza, con l'aggiunta di una retroazione interna  $L$  che controlla l'evoluzione delle variabili  $x_o(t)$  confrontando l'uscita reale e quella stimata:

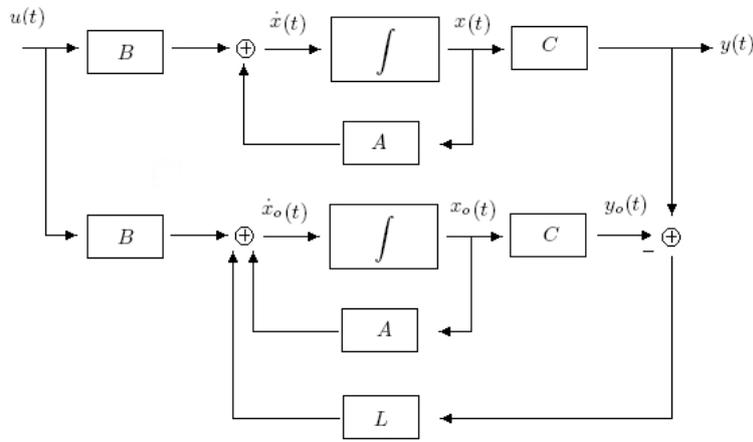


Figura 2.5: schema base di un osservatore

Si capisce come interviene la matrice  $L$  analizzando le espressioni dell'errore  $e(t) = x_o(t) - x(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_o(t) &= [A - LC]x_o(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{x}_o(t) - \dot{x}(t) = \dot{e}(t) &= [A - LC](x_o(t) - x(t)) \\ \Rightarrow \dot{e}(t) &= [A - LC]e(t)\end{aligned} \quad (2.10)$$

Notiamo che l'errore evolve sempre in risposta libera con matrice della dinamica  $[A - LC]$ : se non avessimo introdotto la retroazione con  $L$  l'errore evolverebbe, invece, con matrice della dinamica  $A$ , cioè con gli autovalori del sistema di partenza, e non avremmo alcuna possibilità di gestirne la dinamica. Settando i parametri della matrice  $L$ , a patto di ammettere un possibile errore grossolano iniziale, possiamo settare la convergenza asintotica a nostro piacere ricordando che l'osservatore è un dispositivo dinamico con lo stesso numero di variabili di stato del sistema originale. Cosa importante da sottolineare è che, anche in questo caso, non è sempre possibile modificare gli autovalori della dinamica dell'errore. Il concetto si può appurare scomponendo il sistema nella forma di Kalman di osservabilità: esiste infatti una trasformazione di stato  $T$ , che si ricava (dualmente alla forma di raggiungibilità) costruendo  $T$  con una base di  $X_{no}(x)$  e affiancando un completamento di  $\mathbb{R}^n$ , per cui il sistema nella nuova base assume la forma a matrici partizionate:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_{no}(t) \\ \dot{x}_o(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{no} & A_{no,o} \\ \bar{0} & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{no}(t) \\ x_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_o \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\bar{0} \quad C_o] \begin{bmatrix} x_{no}(t) \\ x_o(t) \end{bmatrix} + v(t)\end{aligned}$$

e l'errore dell'osservatore evolve con dinamica:

$$[A - LC] = \begin{bmatrix} A_{no} & A_{no,o} \\ \bar{0} & A_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{no} \\ L_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & C_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{no} & -L_{no}C_o \\ \bar{0} & A_o - L_oC_o \end{bmatrix}$$

Per lo stesso motivo visto precedentemente non é possibile modificare il blocco diagonale  $A_{no}$  ed i suoi autovalori. Si anticipa un modo piú elegante per vedere la stessa cosa, che sará piú chiaro quando verrá introdotto il sistema duale<sup>6</sup>. Definire lo spettro della matrice:

$$\Lambda_o = \sigma(A - LC)$$

é equivalente a definire lo spettro di  $(A - LC)^T$  perché matrici trasposte hanno gli stessi autovalori, ma:

$$(A - LC)^T = A^T + C^T(-L^T) = A_d + B_dK_d$$

e quindi il problema é equivalente alla retroazione dello stato per il sistema duale prendendo  $L = -K_d^T$ . Segue che non sono allocabili gli autovalori della parte non osservabile del sistema, e viceversa, é possibile allocare tutti gli autovalori della dinamica dell'errore se il sistema é completamente osservabile (il duale é completamente raggiungibile).

Come verrá ripreso nel problema seguente, per la convergenza dell'errore é necessario conoscere (cioé misurare) tutti i possibili ingressi del sistema.

\* \* \* \*

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(t) &= -\alpha(T_1(t) - T_2(t)) + u(t) \\ \dot{T}_2(t) &= \alpha(T_1(t) - T_2(t)) - \beta(T_2(t) - T_3(t)) \\ y(t) &= T_1(t) \end{aligned}$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri noti,  $u(t)$  é un ingresso noto,  $T_3(t)$  é un ingresso esterno e  $T_2(t)$  é l'uscita misurata. Si scrivano le equazioni di un osservatore asintotico per la stima di  $T_1(t)$  con autovalori  $-\xi_1, -\xi_2$ .

Il sistema di equazioni differenziali modella l'evoluzione dei segnali di temperatura per questo sistema termico, formato da due intercapedini con pareti di separazione:

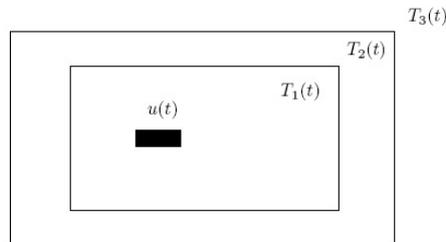


Figura 2.6: Sistema termico analizzato

dove  $\dot{T}(t)$  rappresenta una variazione di temperatura,  $u(t)$  il flusso di calore (uscente) ceduto da una sorgente nella intercapedine centrale,  $\alpha$  e  $\beta$ , sono coefficienti che legano gli scambi di flusso di calore tra le pareti in base alla differenza di temperatura delle intercapedini adiacenti.

Il sistema ammette la rappresentazione matriciale seguente a due ingressi:

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) = \begin{bmatrix} \dot{T}_1(t) \\ \dot{T}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} T_3(t) = AT(t) + Bu(t) + ET_3(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} = CT(t) \end{aligned}$$

<sup>6</sup>vedere problema 4.4

Il nostro scopo é quello di costruire un dispositivo capace di stimare asintoticamente il segnale  $T_2(t)$  della temperatura nella intrecapedine di mezzo senza avere a disposizione un sensore per la sua misura diretta. Ragionando sulle equazioni del sistema termico preso in considerazione, non basta un osservatore che prenda come riferimenti l'uscita  $y(t) = T_1(t)$  e l'ingresso noto  $u(t)$ , perché in tal caso l'equazione dell'errore diventa:

$$\begin{aligned}\dot{T}_o(t) &= [A - LC]T_o(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \dot{T}(t) &= AT(t) + Bu(t) + ET_3(t) \\ \dot{T}_o(t) - \dot{T}(t) = \dot{e}(t) &= [A - LC](T_o(t) - T(t)) - ET_3(t) \\ \Rightarrow \dot{e}(t) &= [A - LC]e(t) - ET_3(t)\end{aligned}$$

Cioé l'ingresso esterno  $T_3(t)$  agisce come ingresso per l'errore la cui evoluzione risulta:

$$e(t) = e^{[A-LC]t}e(o) + \int_0^t e^{[A-LC](t-\sigma)}(-E)T_3(\sigma)d\sigma \quad (2.11)$$

e presenta quindi una parte forzata che non necessariamente converge a zero per  $t \rightarrow \infty$ . Come si può intuire facilmente dalle equazioni, il problema si può risolvere solo se anche l'ingresso esterno  $T_3(t)$  é noto e misurabile. In tal caso basta modificare le equazioni 2.8 e 2.9 dell'osservatore asintotico:

$$\begin{aligned}\dot{T}_o(t) &= T_o(t) + Bu(t) + ET_3(t) + L[y(t) - y_o(t)] \\ y_o(t) &= Cx_o(t)\end{aligned}$$

e l'equazione dell'errore torna ad essere esattamente la 2.10.

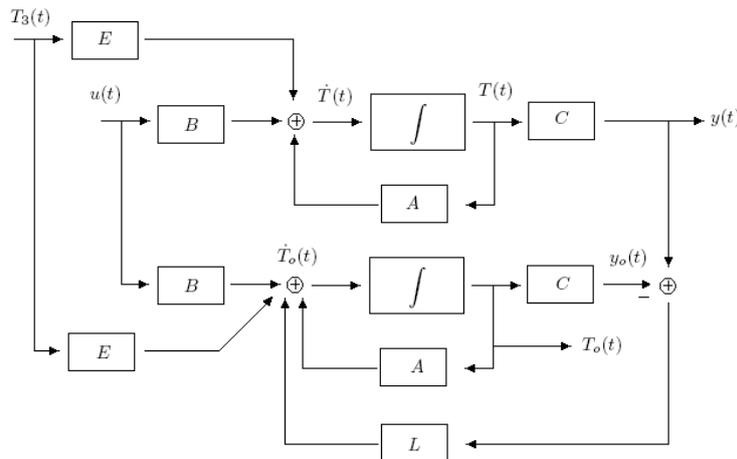


Figura 2.7: schema osservatore con ingresso esterno noto

Per poter assegnare ad arbitrio gli autovalori della matrice  $[A - LC]$   $\xi_1, \xi_2$ <sup>7</sup> si fa un test di osservabilità per la coppia  $(A, C)$  calcolando il rango della matrice di osservabilità  $O$ :

$$\text{rank}(O) = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix} = 2 = n$$

$O$  risulta a rango pieno, quindi il sistema é completamente osservabile. Resta il problema di calcolare i parametri  $L$  dati  $\xi_1$  e  $\xi_2$ : esistono varie tecniche per risolvere tale problema, a mano

<sup>7</sup>nel caso continuo, per una buona convergenza asintotica occorre allocarli almeno 4-5 volte maggiori in modulo rispetto a quelli dell'evoluzione del sistema

risulta particolarmente semplice se  $C$  ha un solo elemento diverso da zero<sup>8</sup>, perché in tal modo il problema consiste nel risolvere un sistema di equazioni affini<sup>9</sup>:

$$\det(sI - [A + LC]) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -(\alpha + \beta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

esplicitando il calcolo:

$$\det\begin{bmatrix} s + \alpha - l_{11} & -\alpha \\ -\alpha - l_{21} & s + \alpha - \beta \end{bmatrix} = s^2 + (2\alpha + \beta - l_{11})s + (\alpha\beta - \alpha l_{11} - \beta l_{11} - \alpha l_{21})$$

il polinomio che vogliamo assegnare risulterà:

$$p(s) = (s - \xi_1)(s - \xi_2) = s^2 + (-\xi_1 - \xi_2)s + \xi_1\xi_2$$

Uguagliando i coefficienti dei due polinomi troviamo i vincoli per le variabili  $l_{11}$ ,  $l_{21}$ .

$$\begin{aligned} l_{11} &= 2\alpha + \beta + \xi_1 + \xi_2 \\ l_{21} &= \frac{\alpha\beta - (2\alpha + \beta + \xi_1 + \xi_2)(\alpha + \beta) - \xi_1\xi_2}{\alpha} \\ &\quad \star \quad \star \quad \star \quad \star \end{aligned}$$

Infine, merita soffermarsi sul fatto che esistono sempre ingressi esterni non noti o non misurabili, come i disturbi sugli attuatori  $w(t)$  ed errori di misura dei sensori di trasduzione  $v(t)$ . Per cui nelle applicazioni pratiche sia ha sempre:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned}$$

e quindi l'equazione dell'errore per l'osservatore comprende di fatto una parte di risposta forzata:

$$\begin{aligned} \dot{x}_o(t) &= [A - LC]x_o(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \dot{x}_o(t) - \dot{x}(t) = \dot{e}(t) &= [A - LC]e(t) - Ew(t) + Lv(t) \\ e(t) &= e^{[A - LC]t}e(0) + \int_0^t e^{[A - LC](t - \sigma)} \begin{bmatrix} -E & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(\sigma) \\ v(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma \end{aligned}$$

se il sistema é BIBO stabile, l'unica considerazione utile che si può fare é che se i segnali  $w(t)$  e  $v(t)$  sono limitati  $\|w(t)\| \leq \mu$ ,  $\|v(t)\| \leq \nu$ , a regime (con evoluzione libera conclusa) l'errore risulta limitato  $\|e(t)\| < \eta$  secondo la maggiorazione 1.11 in versione vettoriale (dove si é applicata la disuguaglianza triangolare  $\|a + b\| < \|a\| + \|b\|$ ):

$$\|e(t)\| \leq \mu \int_0^\infty \|e^{[A - LC]\xi}(-E)\| d\xi + \nu \int_0^\infty \|e^{[A - LC]\xi}L\| d\xi = \eta$$

## 2.3 Retroazione dello stato stimato

*La tecnica dell'osservatore può sostituire quella della retroazione dello stato, nel caso in cui non possano essere misurate tutte le variabili di stato. Occorre reazionare lo stato stimato:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \dot{x}_o(t) &= [A - LC]x_o(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ u(t) &= Kx_o(t) \end{aligned}$$

<sup>8</sup>allo stesso modo si procede per il problema duale dell'alocazione degli autovalori di  $[A + BK]$  se  $B$  ha un solo elemento diverso da zero

<sup>9</sup>in caso contrario il sistema da risolvere sarà non lineare

sostituendo le equazioni si arriva al sistema partizionato a blocchi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A - LC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_o(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

possiamo effettuare una trasformazione di stato introducendo le variabili dell'errore  $e(t)$  al posto di  $x_o(t)$ <sup>10</sup> ottenendo il sistema nella forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ \bar{0} & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

in cui, ovviamente, la matrice della dinamica ad anello chiuso ha gli stessi autovalori della matrice del sistema 2.12, e quindi:

$$\Lambda_r = \Lambda_c \cup \Lambda_o$$

ed il sistema reazionato mediante osservatore risulta avere  $2n$  variabili di stato, mantiene gli autovalori progettati mediante retroazione dello stato ed evolve anche con gli autovalori allocati per la convergenza dell'errore. Il risultato qui ottenuto rappresenta il cosiddetto principio di separazione, per cui è possibile progettare le matrici  $K$  ed  $L$  indipendentemente. Analizzando le equazioni precedenti, il regolatore "equivalente" che si ottiene risulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_o(t) &= [A + BK - LC]x_o(t) + Ly(t) \\ u(t) &= Kx_o(t) \end{aligned}$$

\* \* \* \*

Si consideri il sistema in figura:

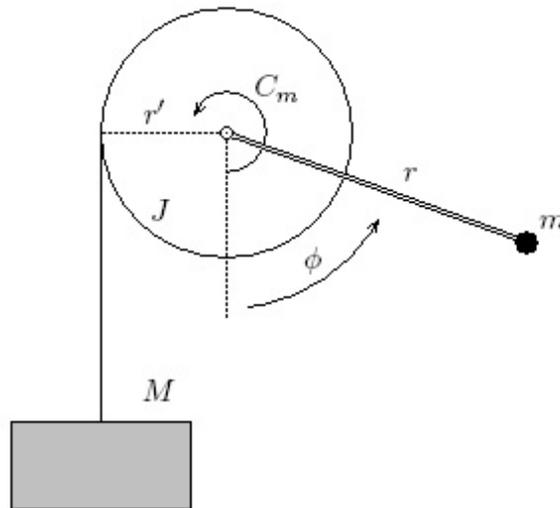


Figura 2.8: sistema meccanico per retroazione dello stato stimato

Dove  $J$  è il momento di inerzia del volano di raggio  $r'$ ,  $h$  un coefficiente viscoso di attrito dato dal contatto del volano con il perno su cui ruota,  $m$  una massa concentrata collegata al perno e al volano tramite un braccio di lunghezza  $r$ ,  $M$  la massa del bilancere della puleggia e  $C_m(t)$  una coppia applicata al volano. Si vogliono ricavare le equazioni del sistema non lineare, scrivere la rappresentazione di stato equivalente, determinare la generica coppia di equilibrio (con  $\bar{\phi}$  fissato) e analizzare la stabilità locale per  $0 \leq \bar{\phi} \leq \pi$ .

Si vuole inoltre determinare una retroazione dello stato localmente stabilizzante che assegni gli autovalori  $-\xi_1, -\xi_2$ . Avendo a disposizione solamente un encoder per rilevare il segnale angolare

<sup>10</sup>tale trasformazione corrisponde ad una matrice di base  $T = \begin{bmatrix} I & \bar{0} \\ -I & I \end{bmatrix}$

$\phi(t)$ , si sintetizzerá infine un controllore tramite retroazione dello stato stimato con autovalori dell'osservatore pari a  $-4\xi_1, -4\xi_2$ .

Applicando la legge di Newton per il bilancio delle coppie si ottiene:

$$J\ddot{\phi}(t) = -mgr \sin(\phi(t)) - h\dot{\phi}(t) + Mgr' + C_m(t)$$

dove si sono introdotti per semplicitá i simboli  $\alpha = mgr$ ,  $\beta = h$  e chiamiamo  $u(t) = Mgr' + C_m(t)$ ,  $x_1(t) = \phi(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\phi}(t)$ . La rappresentazione di stato che si ottiene é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha \sin(x_1(t)) - \beta x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Per determinare la coppia di equilibrio é necessario risolvere il sistema  $0 = \rho(\bar{x}, \bar{u})$  che porta alla soluzione:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{u} &= \alpha \sin(\bar{x}_1) \end{aligned}$$

da cui, fissando l'angolo di equilibrio desiderato, si ricava la coppia di ingresso di equilibrio corrispondente:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \left( \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \sin(\bar{\phi}) \end{bmatrix} \right)$$

Per l'analisi locale di stabilitá occorre linearizzare il sistema attorno al generico punto di equilibrio, quindi:

$$\begin{aligned} A_{(\bar{x}, \bar{u})} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos(\bar{\phi}) & -\beta \end{bmatrix} \\ B_{(\bar{x}, \bar{u})} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_{(\bar{x}, \bar{u})} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ottenendo il sistema linearizzato parametrico nelle variabili traslate:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{(\bar{x}, \bar{u})}z(t) + B_{(\bar{x}, \bar{u})}v(t) \\ w(t) &= C_{(\bar{x}, \bar{u})}z(t) \end{aligned}$$

con  $z_i = x_i - \bar{x}_i$ ,  $v = u - \bar{u}$ ,  $w = y - \bar{y}$ . Per piccole variazioni rispetto al punto di equilibrio, ricaviamo il polinomio caratteristico che risulta:

$$p(s) = s^2 + \beta s + \alpha \cos(\bar{\phi})$$

perché il polinomio di secondo grado sia stabile occorre che i coefficienti siano tutti positivi: sicuramente  $\beta > 0$  perché é un termine di attrito,  $\alpha > 0$  quindi  $\alpha \cos(\bar{x}_1) \geq 0$  per  $0 \leq \bar{x}_1 \leq \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} \text{punti equilibrio stabile} &\Rightarrow 0 \leq \bar{\phi} < \frac{\pi}{2} \\ \text{punti equilibrio instabile} &\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \bar{\phi} \leq \pi \end{aligned}$$

Per l'angolo limite corrispondente alla orizzontale  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$  il sistema linearizzato presenta un autovalore nullo e, con questo modello, non si può concludere nulla sulla stabilitá<sup>11</sup>. Se é necessario

<sup>11</sup>Nella pratica la presenza di autovalori nulli é inaccettabile, perché per perturbazioni infinitesime potrebbero spostarsi nel semipiano positivo e provocare l'instabilitá.

stabilizzare il sistema in un punto di equilibrio instabile é necessario allocare gli autovalori tramite retroazione dello stato, come nello schema di figura 2.3. Il sistema linearizzato risulta in forma canonica di raggiungibilit , quindi é sicuramente completamente raggiungibile. Essendo  $B$  con un solo elemento diverso da zero, si costruisce la matrice  $A + BK$  ad anello chiuso:

$$[A + BK] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos(\bar{\phi}) & -\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_{11} \quad k_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos(\bar{\phi}) + k_{11} & -\beta + k_{12} \end{bmatrix}$$

volendo assegnare il polinomio  $p(s) = (s + \xi_1)(s + \xi_2) = s^2 + (\xi_1 + \xi_2)s + \xi_1\xi_2$  occorre imporre:

$$\begin{aligned} \alpha \cos(\bar{\phi}) - k_{11} &= \xi_1\xi_2 & \Rightarrow & k_{11} = \alpha \cos(\bar{\phi}) - \xi_1\xi_2 \\ \beta - k_{12} &= \xi_1 + \xi_2 & \Rightarrow & k_{12} = \beta - \xi_1 - \xi_2 \end{aligned}$$

Avendo per  solo disponibile l'uscita  $w(t) = x_1(t)$  occorre costruire un osservatore asintotico. E' possibile allocare ad arbitrio gli autovalori dell'errore perch :

$$\text{rank}(O) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

quindi settiamo i parametri della matrice  $[A - LC]$  della convergenza dell'errore, essendo  $C$  ad un solo elemento diverso da zero si procede allo stesso modo:

$$\begin{aligned} \det(sI - [A - LC]) &= \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos(\bar{\phi}) & -\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} s + l_{11} & -1 \\ l_{21} + \alpha \cos(\bar{\phi}) & s + \beta \end{bmatrix} \right) = s^2 + (\beta + l_{11})s + (l_{11}\beta + l_{21} + \alpha \cos(\bar{\phi})) \end{aligned}$$

assegnando il polinomio  $p(s) = (s + 4\xi_1)(s + 4\xi_2) = s^2 + (4\xi_1 + 4\xi_2)s + 16\xi_1\xi_2$ , si fissano automaticamente i valori di  $L$ :

$$\begin{aligned} \beta + l_{11} &= 4\xi_1 + 4\xi_2 & \Rightarrow & l_{11} = 4\xi_1 + 4\xi_2 - \beta \\ l_{11}\beta + l_{21} + \alpha \cos(\bar{\phi}) &= 16\xi_1\xi_2 & \Rightarrow & l_{21} = 16\xi_1\xi_2 - \alpha \cos(\bar{\phi}) - 4\beta\xi_1 - 4\beta\xi_2 + \beta^2 \end{aligned}$$

## 2.4 Osservatore discreto con ingresso esterno incognito ma costante

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + c \\ x_2(k+1) &= -0.5x_1(k) + x_2(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{aligned}$$

Dove  $c$  é un valore di ingresso incognito.

  possibile ricostruire asintoticamente le variabili di stato e il valore  $c$  se si assume  $c$  costante: il sistema ammette rappresentazione matriciale seguente, in cui si é indicato con  $E$  la matrice che rappresenta l'attuatore dell'ingresso incognito  $c$ <sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c = Ax(k) + Ec \\ y(k) &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = Cx(k) \end{aligned}$$

Se  $c$  é costante soddisfa una particolare equazione alle differenze:

$$x_3(k) = c \quad \forall k$$

<sup>12</sup>con  $B$  in generale si é indicata la matrice degli ingressi noti

$$x_3(k+1) = x_3(k)$$

Il problema é risolubile identificando l'ingresso  $c$  come una variabile di stato ulteriore per il sistema di partenza e considerarlo in evoluzione libera:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + x_3(k) \\ x_2(k+1) &= -0.5x_1(k) + x_2(k) \\ x_3(k+1) &= x_3(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{aligned}$$

che ha rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \tilde{A}x(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \tilde{C}x(k)$$

affinché possano essere assegnati gli autovalori per l'evoluzione dell'errore occorre che tale sistema sia completamente osservabile, si può verificare la proprietà calcolando il rango della matrice<sup>13</sup>:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{A} & \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = 3 = n$$

occorre quindi sintetizzare un osservatore a tre variabili di stato, con le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x_o(k+1) &= \tilde{A}x_o(k) + L(y(k) - y_o(k)) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]x_o(k) + Ly(k) \\ y_o(k) &= \tilde{C}x_o(k) \end{aligned}$$

con la solita evoluzione dell'errore in versione discreta:

$$e(k+1) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]e(k)$$

Quindi é possibile ricostruire asintoticamente il valore delle variabili di stato con autovalori assegnati, e quindi anche il valore incognito di  $c$  in quanto:

$$x_{3o}(k) \rightarrow c, \quad k \rightarrow \infty$$

Si é voluto simulare il sistema numericamente per verificare tale proprietà.

Come prima cosa assegnamo gli autovalori per l'osservatore<sup>14</sup>, per semplicitá coincidenti:  $\xi_1 = 0.1$ ,  $\xi_2 = 0.1$ ,  $\xi_3 = 0.1$ . In tal modo, l'evoluzione libera dell'errore  $e(k)$  sará governata dai modi<sup>15</sup>  $0.1^k$ ,  $k(0.1)^k$ ,  $\frac{(k-1)k}{2}(0.1)^k$ , tutti stabili (in modulo  $< 1$ ). Essendo  $C$  ad un solo elemento diverso da zero possiamo procedere facilmente:

$$\begin{aligned} \det[sI - (\tilde{A} - L\tilde{C})] &= \det \begin{bmatrix} s & l_{11} - 1 & -1 \\ 0.5 & s + l_{21} - 1 & 0 \\ 0 & l_{31} & s - 1 \end{bmatrix} = \\ s \det \begin{bmatrix} s + l_{21} - 1 & 0 \\ l_{31} & s - 1 \end{bmatrix} &- 0.5 \det \begin{bmatrix} l_{11} - 1 & -1 \\ l_{31} & s - 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

<sup>13</sup>inoltre, per questo sistema il problema dell'osservabilità e della ricostruibilità é lo stesso perché  $A$  invertibile

<sup>14</sup>il sistema di partenza ha autovalori  $0$ ,  $0.5+j0.5$ ,  $0.5-j0.5$ , per il caso discreto occorre allocare gli autovalori dell'osservatore 4-5 volte piú piccoli in modulo

<sup>15</sup>i modi associati ad autovalori coincidenti con grado  $g$  (dimensione blocco maggiore della forma di Jordan,  $g < \mu$  molteplicitá algebrica) per il caso discreto sono  $\binom{k}{m} \lambda^k$  con  $m = 0, 1, 2, \dots, g-1$ , analogamente per il caso continuo i modi associati sono  $t^m e^{\lambda t}$ , con  $m = 0, 1, 2, \dots, g-1$

$$= s^3 + s^2(-2 + l_{21}) + s(1.5 - l_{21} - 0.5l_{11}) + (0.5l_{11} - 0.5 - 0.5l_{31})$$

assegniamo quindi il polinomio caratteristico con radici volute<sup>16</sup>:

$$p(s) = s^3 - 0.3s^2 + 0.03s - 0.001$$

e risolviamo il sistema per determinare gli  $l_{ij}$  della matrice di retroazione per l'osservatore:

$$\begin{aligned} -2 + l_{21} &= -0.3 \\ 1.5 - l_{21} - 0.5l_{11} &= 0.03 \\ 0.5l_{11} - 0.5 - 0.5l_{31} &= -0.001 \end{aligned}$$

Quindi la matrice  $L$  per la retroazione interna all'osservatore risulta:

$$L = \begin{bmatrix} -0.460 \\ 1.700 \\ -1.458 \end{bmatrix}$$

Si riporta lo schema a blocchi: notiamo che l'osservatore in questo caso *non ha alcuna informazione sull'ingresso esterno di  $c$* , a differenza del problema precedente, ma per le proprietà del segnale  $c$  il problema è solubile anche solamente elaborando *il segnale di uscita misurato  $y(k)$* :

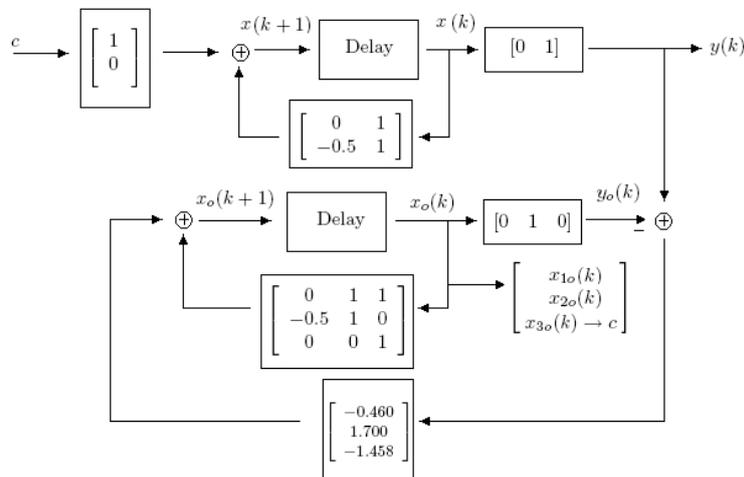


Figura 2.9: Stimatore asintotico per sistema discreto con ingresso non noto ma costante

Per la simulazione di questo sistema bisogna ricordare che i due sistemi lavorano in "parallelo". Per maggior chiarezza riportiamo i passaggi necessari per la simulazione,

1. Simulazione del sistema di partenza  $2 \times 2$ : si sono imposte condizioni iniziali nulle, e generando con Matlab il valore random dell'ingresso  $c$  compreso tra -20 e 20.

```
function [x1_plot, x2_plot, y, t, c] = sistema(n)
t=0:1:n-1;
A=[0 1 ; -0.5 1];
E=[1 ; 0];
C=[0 1];
disp('valore di c, random tra -20/20')
c=rand*40-20

%calcola i vettori d'uscita e l'evoluzione dello stato
y = zeros(1,n);
x1_plot = zeros(1,n);
```

<sup>16</sup>basta il semplice comando Matlab `poly([0.1 0.1 0.1])` per generare i coefficienti del polinomio monico

```

x2_plot = zeros(1,n);

%condizioni iniziali
x = [0 ; 0];
x_new = [0 ; 0];

for k=1:n
    x_new = A*x + E*c;
    y(k) = C*x;
    x1_plot(k) = x(1,1);
    x2_plot(k) = x(2,1);
    x = x_new;
end

```

Con il comando `[x1,x2,y,t,c]=sistema(100);` vengono calcolati i campioni per i primi 100 passi che si possono visualizzare con il comando `plot(t,x1);`.

2. si é salvato il vettore dell'uscita  $y(k)$ .
3. Ora, si é studiata *separatamente* l'evoluzione dell'osservatore  $3 \times 3$  le cui equazioni possono essere riscritte come segue:

$$x_o(k+1) = \tilde{A}x_o(k) + L(y(k) - y_o(k)) = \tilde{A}x_o(k) + Ly(k) - L\tilde{C}x_o(k) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]x_o(k) + Ly(k)$$

Quindi l'osservatore evolve con dinamica  $[\tilde{A} - L\tilde{C}]$  ed ingresso  $y(k)$  calcolato precedentemente. Si é assegnata una condizione iniziale arbitraria per l'osservatore assegnando a  $x_{1o}(0)$ ,  $x_{2o}(0)$  e  $x_{3o}(0)$  valori random tra -25 e 25.

```
function [x1o_plot, x2o_plot, x3o_plot, t] = osservatore(n, y, c)
```

```

t=0:1:n-1;
A=[0 1 1 ; -0.5 1 0 ; 0 0 1];
L=[-0.460; 1.700; -1.458];
C=[0 1 0];
disp('autovalori osservatore')
eig(A-L*C)

```

```
%calcola le stime asintotiche dell'evoluzione dello stato
```

```

x1o_plot = zeros(1,n);
x2o_plot = zeros(1,n);
x3o_plot = zeros(1,n);

%condizioni iniziali random (-25/25)
xo = [ rand*50-25; rand*50-25 ; rand*50-25 ];
xo_new = [0 ; 0 ; 0];

for k=1:n

    xo_new = (A-L*C)*xo + L*y(k);

    x1o_plot(k) = xo(1,1);
    x2o_plot(k) = xo(2,1);
    x3o_plot(k) = xo(3,1);
    xo = xo_new;
end

```

4. si sono confrontati i grafici delle evoluzioni delle risposte e dell'errore fissato. Il valore random di  $c$  generato dalla simulazione risulta  $c = -17.6843$ . Con interpolazione lineare vengono

indicate le evoluzioni delle variabili  $x(k)$ , con i pallini quelle delle stime  $x_o(k)$  corrispondenti.

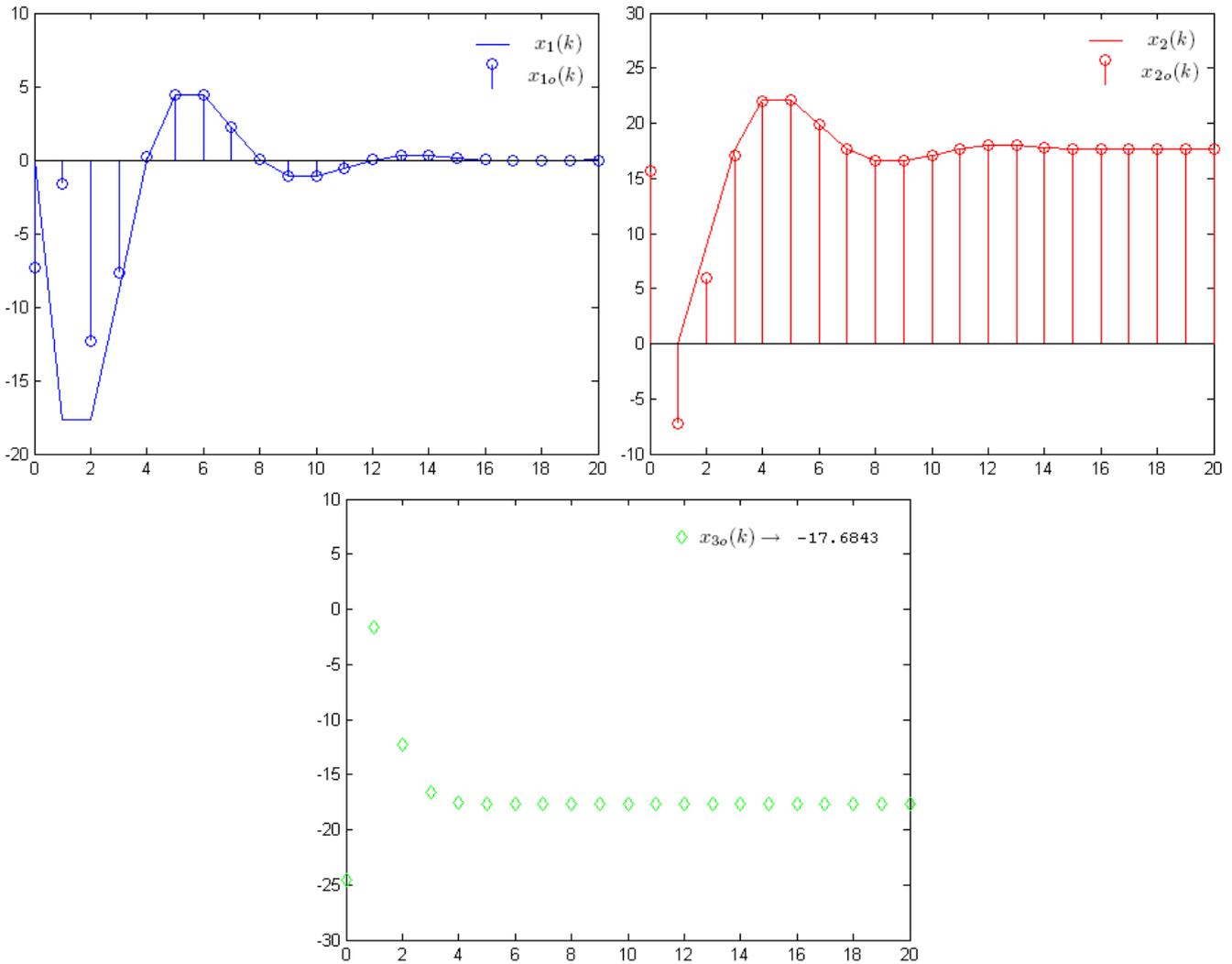


Figura 2.10: evoluzione di  $x_1$ ,  $x_2$ , e dell'errore

## 2.5 Simulazione di un osservatore a tempo continuo

La simulazione di un osservatore a tempo continuo é piú complessa rispetto al problema precedente, in quanto, se si vogliono ricavare le equazioni discrete per ricavare i campioni esatti dello stato e dell'uscita, occorre implementare un sistema di equazioni alle differenze 'tempo variante'.

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + c \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Dove  $c$  é un valore di ingresso incognito.

É possibile ricostruire asintoticamente le variabili di stato e il valore  $c$  se si assume  $c$  costante. Similmente a quanto fatto nella sezione precedente, adottiamo la rappresentazione matriciale del

sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c = Ax(t) + Ec$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

se  $c$  é costante soddisfa una particolare equazione differenziale:

$$x_3(t) = c \quad \forall t$$

$$\dot{x}_3(t) = 0$$

quindi anche in questo caso il problema é risolubile identificando l'ingresso  $c$  come una variabile di stato ulteriore per il sistema di partenza e considerare quest'ultimo in evoluzione libera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 0 \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

come prima, si introduce la notazione seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \tilde{C}x(t)$$

Si compie anche in questo caso un test di completa osservabilit :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{A} & \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

e con la stessa procedura si sintetizza l'osservatore:

$$\begin{aligned} \dot{x}_o(t) &= \tilde{A}x_o(t) + L(y(t) - y_o(t)) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]x_o(t) + Ly(t) \\ y_o(t) &= \tilde{C}x_o(t) \end{aligned}$$

con la solita evoluzione dell'errore 2.10:

$$\dot{e}(t) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]e(t)$$

cos  é possibile ricostruire asintoticamente il valore delle variabili di stato e il valore incognito di  $c$ :

$$x_{3o}(t) \rightarrow c, \quad t \rightarrow \infty$$

Si assegnano gli autovalori per l'osservatore:  $\xi_1 = -10$ ,  $\xi_2 = -5 + j$ ,  $\xi_3 = -5 - j$ <sup>17</sup>. Abbiamo che:

$$\det[sI - (A - LC)] = \det \begin{bmatrix} s + 1 + l_{11} & -1 & -1 \\ 1 + l_{21} & s + 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & s \end{bmatrix} =$$

$$= l_{31} \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ s + 1 & 0 \end{bmatrix} + s \det \begin{bmatrix} s + 1 + l_{11} & -1 \\ 1 + l_{21} & s + 1 \end{bmatrix} = s^3 + s^2(2 + l_{11}) + s(2 + l_{11} + l_{21} + l_{31}) + l_{31}$$

il polinomio caratteristico con radici volute é:

$$p(s) = (s + 10)(s^2 + 10s + 26) = s^3 + 20s^2 + 126s + 260$$

<sup>17</sup>avendo assegnato autovalori sotto il vincolo del coniugio si garantisce che la matrice  $L$  sia a elementi reali

e si risolve il sistema per determinare gli  $l_{ij}$  della matrice di retroazione interna dell'osservatore:

$$\begin{aligned} 2 + l_{11} &= 20 \\ 2 + l_{11} + l_{21} + l_{31} &= 126 \\ l_{31} &= 260 \end{aligned}$$

da cui:

$$L = \begin{bmatrix} 18 \\ -154 \\ 260 \end{bmatrix}$$

Lo schema dell'osservatore sintetizzato é riportato in figura:

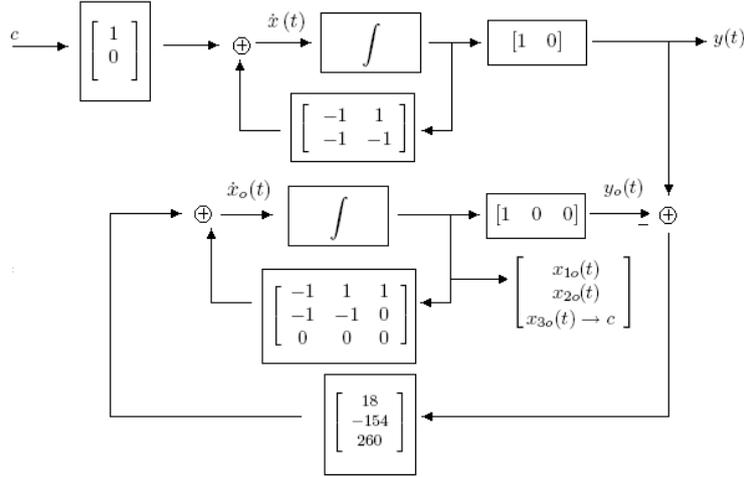


Figura 2.11: Stimatore asintotico a tempo continuo

La simulazione numerica di questa coppia di sistemi presenta alcune difficoltà, rispetto al caso precedente, che conviene illustrare. Si assume fissato il passo di campionamento  $T_c$ :

1. L'equivalente discreto del sistema originale  $2 \times 2$  ( $A, E, C$ ) non presenta difficoltà perché  $c$  per ipotesi é un segnale costante, e quindi a maggior ragione sarà costante con passo  $T_c$ . L'equivalente discreto con matrici 1.7 fornirà i campioni dell'evoluzione dello stato  $x(t)$  dell'uscita  $y(t)$  agli istanti  $kT_c$ , come precedentemente descritto<sup>18</sup>.

$$\begin{aligned} A_D &= e^{AT_c} = T_1 e^{AT_c} S_1 = T_1 e^{AT_c} S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-1+j)T_c} & 0 \\ 0 & e^{(-1-j)T_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -j0.5 \\ 0.5 & j0.5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.5e^{(-1+j)T_c} + 0.5e^{(-1-j)T_c} & -j0.5e^{(-1+j)T_c} + j0.5e^{(-1-j)T_c} \\ j0.5e^{(-1+j)T_c} - j0.5e^{(-1-j)T_c} & 0.5e^{(-1+j)T_c} + 0.5e^{(-1-j)T_c} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{T_c} \cos(T_c) & e^{T_c} \sin(T_c) \\ -e^{T_c} \sin(T_c) & e^{T_c} \cos(T_c) \end{bmatrix} \\ E_D &= \int_0^{T_c} e^{A\xi} E d\xi = T_1 \left( \int_0^{T_c} e^{A\xi} d\xi \right) S_1 E = T_1 \begin{bmatrix} \left[ \frac{e^{(-1+j)\xi} - 1}{-1+j} \right]_0^{T_c} & 0 \\ 0 & \left[ \frac{e^{(-1-j)\xi} - 1}{-1-j} \right]_0^{T_c} \end{bmatrix} S_1 E \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{(-1+j)T_c} - 1}{-1+j} & 0 \\ 0 & \frac{e^{(-1-j)T_c} - 1}{-1-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -j0.5 \\ 0.5 & j0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.5e^{-T_c} \cos(T_c) + 0.5e^{-T_c} \sin(T_c) + 0.5 \\ 0.5e^{-T_c} \cos(T_c) + 0.5e^{-T_c} \sin(T_c) - 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>18</sup>vedere il problema 1.4

$$C_D = [1 \quad 0]$$

Il sistema é stato simulato partendo da condizioni iniziali random tra  $-50$  e  $50$  e generando il valore di  $c$  random tra  $-150$  e  $150$ .

2. Ora, se vogliamo studiare l'osservatore  $3 \times 3$  con equazioni:

$$\dot{x}_o(t) = \tilde{A}x_o(t) + L(y(t) - y_o(t)) = \tilde{A}x_o(t) + Ly(t) - L\tilde{C}x_o(t) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]x_o(t) + Ly(t)$$

$$[\tilde{A} - L\tilde{C}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 \\ -154 \\ 260 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} -19 & 1 & 1 \\ 153 & -1 & 0 \\ -260 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non é possibile procedere come al punto 1 discretizzando il sistema ( $[\tilde{A} - L\tilde{C}]$ ,  $L$ ) perché le equazioni alle differenze derivate sarebbero valide, per come sono state ricavate, solo se l'ingresso  $y(t)$  di cui possediamo i campioni fosse costante a tratti con passo  $T_c$ : ciò non é possibile in quanto  $y(t)$  é l'uscita di un sistema a tempo continuo<sup>19</sup>.

Occorre quindi ragionare sulle equazioni che possiamo riarrangiare così:

$$\dot{x}_o(t) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]x_o(t) + LCx(t) = [\tilde{A} - L\tilde{C}]x_o(t) + L\tilde{C}e^{\tilde{A}t}x(0); \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) = rand \\ x_2(0) = rand \\ c \end{bmatrix}$$

sostituendo  $x(t) = e^{\tilde{A}t}x(0)$  (evoluzione del sistema di partenza come  $3 \times 3$ , introducendo la matrice  $\tilde{A}$ ): il termine scalare  $\tilde{C}e^{\tilde{A}t}x(0)$  ha il nuovo ruolo di l'ingresso. Procedendo in modo simile alla sezione teorica del problema 1.4, si può ricavare l'espressione dello stato stimato al tempo  $t = (k+1)T_c$  partendo da condizione iniziale  $x_o(kT_c)$ :

$$x_o((k+1)T_c) = e^{[\tilde{A}-L\tilde{C}]((k+1)T_c-kT_c)}x_o(kT_c) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{[\tilde{A}-L\tilde{C}]((k+1)T_c-\sigma)}L\left(\tilde{C}e^{\tilde{A}\sigma}x(0)\right)d\sigma$$

con il cambiamento di variabili  $h = (k+1)T_c - \sigma$  si ottiene l'espressione:

$$x_o((k+1)T_c) = e^{[\tilde{A}-L\tilde{C}]T_c}x_o(kT_c) + \left(\int_0^{T_c} e^{[\tilde{A}-L\tilde{C}]h}L\tilde{C}e^{\tilde{A}[(k+1)T_c-h]}dh\right)x(0)$$

Il sistema discreto presenta la matrice della dinamica:

$$[\tilde{A} - L\tilde{C}]_D = e^{[\tilde{A}-L\tilde{C}]T_c} = T_2e^{\Lambda T_c}S_2 = T_2 \begin{bmatrix} e^{-10T_c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-5+i)T_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-5-i)T_c} \end{bmatrix} S_2$$

dove omettiamo per semplicitá i valori numerici delle matrici  $T_2$ ,  $S_2$  che si possono generare con  $\text{eig}(\tilde{A}-L\tilde{C})$ .

L'integrale tra parentesi rende *tempo variante* il sistema di equazione alle differenze, poiché non é una matrice costante e dipendente in modo esplicito da  $k$ . Occorre tenere conto di ciò perché é necessario ricalcolare ad ogni ciclo tale matrice per trovare il legame tra lo stato al passo  $k$ -esimo (campione  $kT_c$ ) a quello successivo  $k+1$ -esimo (campione  $(k+1)T_c$ ). Va notato che, rispetto ai conti precedenti, tale integrale é complicato da risolvere manualmente, ma possiamo trovarne l'espressione esplicita utilizzando speciali comandi Matlab per gestire le *variabili simboliche*. Una variabile simbolica viene vista da Matlab come un oggetto di classe 'sym' a cui non é associato un valore numerico, ma su cui Matlab può effettuare operazioni come per esempio ricavare funzioni integrali indefinite, definite, funzioni derivate ecc. Si può ricavare l'espressione dell'integrale con le seguenti istruzioni:

<sup>19</sup>un sistema a tempo continuo sollecitato da un ingresso costante a tratti (treno di gradini) fornisce una uscita derivabile a tratti (treno di risposte al gradino)

```

A=[-1 1 1; -1 -1 0; 0 0 0];
L=[18; -154; 260];
C=[1 0 0];
h =sym('h');
k = sym ('k');
...
for k=0:(n-1)
    %calcola la matrice tempo variante con funzione simbolica
    matrice = expm((A-L*C)*h) * L * C * expm(A*((k+1)*T_c - h));
    integrale = int(matrice, h, 0, T_c);
    xo_new = A_o_D * xo + temp * x_0;
    ...

```

la matrice *integrale* (anch'essa di classe *sym*) é funzione della variabile letterale *k* e direttamente calcolabile ad ogni ciclo, ricordando che occorre convertirla in una matrice numerica con l'istruzione `temp=double(integrale)`<sup>20</sup>.

3. si é assegnata una condizione iniziale arbitraria per l'osservatore assegnando a  $x_{1o}(0)$ ,  $x_{2o}(0)$ ,  $x_{3o}(0)$  valori random tra -50 e 50.
4. si sono confrontati i grafici delle evoluzioni delle risposte e dell'errore fissato il passo  $T_c = 0.01sec$  per 1000 campioni. Per i listati vedere l'appendice 7.

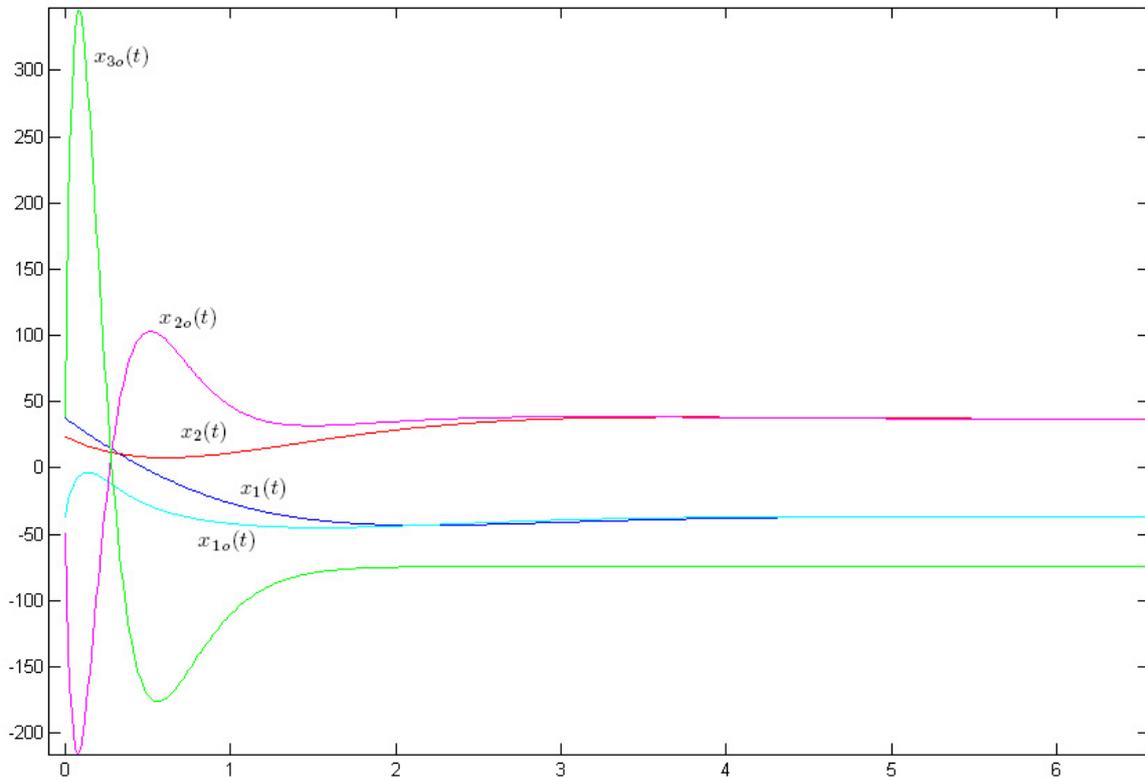


Figura 2.12: Simulazione dell'osservatore a tempo continuo

<sup>20</sup>tale procedura produce un programma molto pesante, perché ad ogni ciclo Matlab calcola la matrice con procedure simboliche. In alternativa, da linea di comando si può calcolare la matrice *integrale* una sola volta non assegnando alcun valore alla variabile simbolica *k*, visualizzarla (con l'istruzione priva del ;) e copiarla all'interno del ciclo come espressione matematica

## 2.6 Osservatore con compensazione non lineare e simulazione con approssimante di Eulero

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \Phi(x_1(t)) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

dove  $\Phi()$  é una funzione nota. Mostriamo come é possibile ricavare un osservatore dello stato il cui errore di stima converga a 0 *qualunque siano le sue condizioni iniziali e quelle del sistema*.

Il problema da affrontare é quello duale illustrato precedentemente nella sezione 2.1 per l'allocazione degli autovalori del braccio meccanico. Possiamo cioé imporre che, indipendentemente dall'evoluzione dello stato di cui non conosciamo l'espressione analitica, l'evoluzione dell'errore in evoluzione libera sia comunque descritta nella forma lineare asintoticamente stabile:

$$\dot{e}(t) = M(l_{11}, l_{21})e(t)$$

dove  $M$  é una matrice parametrica di cui possiamo settare gli autovalori<sup>21</sup>. Per giungere a questa forma é necessario, però, introdurre delle cancellazioni per eliminare le non linearità e quello che si può fare é ragionare sulle equazioni a disposizioni. Un osservatore banale per i nostri scopi risulterebbe:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1o}(t) &= x_{2o}(t) \\ \dot{x}_{2o}(t) &= \Phi(x_{1o}(t)) + u(t) \\ y_o(t) &= x_{1o}(t)\end{aligned}$$

Introduciamo ora nelle equazioni dei parametri di retroazione interna, come prevederebbe la sintesi dell'osservatore di *Luemberger*, confrontando l'uscita del sistema  $y(t)$  e quella stimata  $y_o(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1o}(t) &= x_{2o}(t) + l_{11}y(t) - l_{11}y_o(t) \\ \dot{x}_{2o}(t) &= \Phi(x_{1o}(t)) + u(t) + l_{21}y(t) - l_{21}y_o(t) \\ y_o(t) &= x_{1o}(t)\end{aligned}$$

Analizziamo cosa succede calcolando l'espressione dell'errore  $e(t) = x_o(t) - x(t)$ :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{2o}(t) + l_{11}y(t) - l_{11}y_o(t) - x_2(t) \\ \Phi(x_{1o}(t)) + u(t) + l_{21}y(t) - l_{21}y_o(t) - \Phi(x_1(t)) - u(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (x_{2o}(t) - x_2(t)) - l_{11}(x_{1o}(t) - x_1(t)) \\ \Phi(x_{1o}(t)) + l_{21}x_1(t) - l_{21}x_{1o}(t) - \Phi(x_1(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{11}e_1(t) + e_2(t) \\ \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Per rendere lineare anche l'equazione di  $\dot{e}_2(t)$  occorre modificare la seconda equazione dell'osservatore, in questo modo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1o}(t) &= x_{2o}(t) + l_{11}y(t) - l_{11}y_o(t) \\ \dot{x}_{2o}(t) &= \Phi(x_{1o}(t)) + u(t) + [\Phi(y(t))] + l_{21}y(t) - [\Phi(y_o(t))] - l_{21}y_o(t) \\ y_o(t) &= x_{1o}(t)\end{aligned}$$

Troviamo in definitiva sostituendo direttamente  $y = x_1$  e  $y_o = x_{o1}$ :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_{11}e_1(t) + e_2(t) \\ \Phi(x_{1o}(t)) + u(t) + [\Phi(x_1(t))] + l_{21}x_1(t) - [\Phi(x_{1o}(t))] - l_{21}x_{1o}(t) - \Phi(x_1(t)) - u(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -l_{11}e_1(t) + e_2(t) \\ -l_{21}(x_{1o}(t) - x_1(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{11} & 1 \\ -l_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

<sup>21</sup>e nel caso standard per sistemi lineari corrisponderebbe ad  $[A - LC]$

ottenendo quindi per l'evoluzione dell'errore il sistema lineare con matrice  $M$  seguente:

$$M = \begin{bmatrix} -l_{11} & 1 \\ -l_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico:

$$p(s) = s^2 + sl_{11} + l_{21}$$

e quindi possono essere settati ad arbitrio gli autovalori della sua evoluzione.

\* \* \* \*

Per simulare il comportamento di questa coppia di sistemi, non esiste una formula che permetta di ricavarne la soluzione in forma chiusa, però possiamo utilizzare il metodo approssimato di *Eulero* per la loro implementazione, che come noto consiste nel ricavare dal sistema a tempo continuo una successione di funzioni approssimando la derivata con un rapporto incrementale finito:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ \Rightarrow x(t+h) &= x(t) + hf(x(t)) \end{aligned}$$

e ponendo  $t = kh$  otteniamo il sistema alle differenze:

$$x(k+1) = x(k) + hf(x(k)) \quad (2.13)$$

Graficamente, il metodo consiste nell'approssimare la curva della soluzione reale con una spezzata la cui pendenza è la derivata della curva reale all'istante  $t = kh$ :

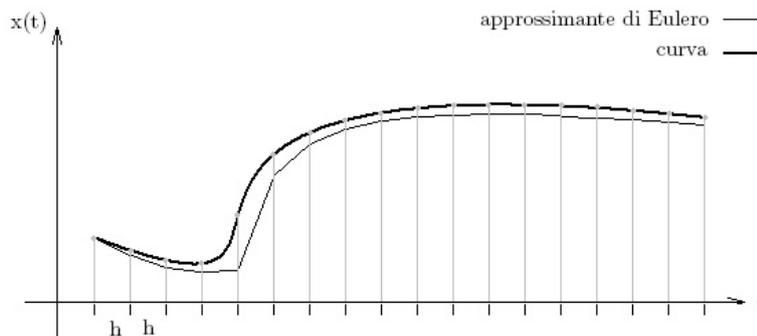


Figura 2.13: spiegazione grafica dell'approssimante di Eulero

tale approssimazione è tanto migliore tanto quanto  $h \rightarrow 0$ . Nel nostro caso, chiamata  $\rho(x(t), u(t))$  l'equazione vettoriale del sistema non lineare, l'approssimante di Eulero risulta:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + h\rho(x(t), u(t)) \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + h[\Phi(x_1(k)) + u(k)] \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned}$$

Mentre per l'osservatore, chiamata  $\rho_o(x_o(t), y(t), u(t))$  l'equazione del sistema, risulta allo stesso modo:

$$\begin{aligned} x_o(t+h) &= x(t) + h\rho_o(x_o(t), y(t) = x_1(t), u(t)) \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1o}(k+1) &= x_{1o}(k) + h[x_{2o}(k) + l_{11}x_1(k) - l_{11}x_{1o}(k)] \\ x_{2o}(k+1) &= x_{2o}(k) + h[\Phi(x_{1o}(k)) + u(k) + \Phi(x_1(k)) + l_{21}x_1(k) - \Phi(x_{1o}(k)) - l_{21}x_{1o}(k)] \end{aligned}$$

I due sistemi di equazioni alle differenze sono stati implementati in Matlab in questo ordine:

- Si é simulato il sistema di partenza sottoposto a gradino unitario e con condizioni iniziali diverse da zero.
- si é memorizzata nei vettori  $x_1$  e  $x_2$  l'evoluzione dello stato.
- si sono scelti i parametri  $l_{11} > 0$  e  $l_{21} > 0$ , in modo che l'errore converga con autovalori stabili.
- Si é simulato il sistema dell'osservatore con condizioni iniziali diverse da quelle del sistema originale, utilizzando i valori del vettore  $y(k)=x_1(k)$  per effettuare la retroazione interna.
- si é salvata l'evoluzione dello stato stimato nei vettori  $x_{1.o}$  e  $x_{2.o}$ .
- si sono visualizzati i plot relativi a  $x_1$ ,  $x_{1.o}$ ,  $x_2$  e  $x_{2.o}$ .

Le simulazioni sono state ripetute fissando diversi  $h$  e diverse funzioni non lineari  $\Phi()$ , verificando che in ogni caso, seppure le equazioni risultino approssimate, l'errore tra stato e stato stimato converge sempre a zero.

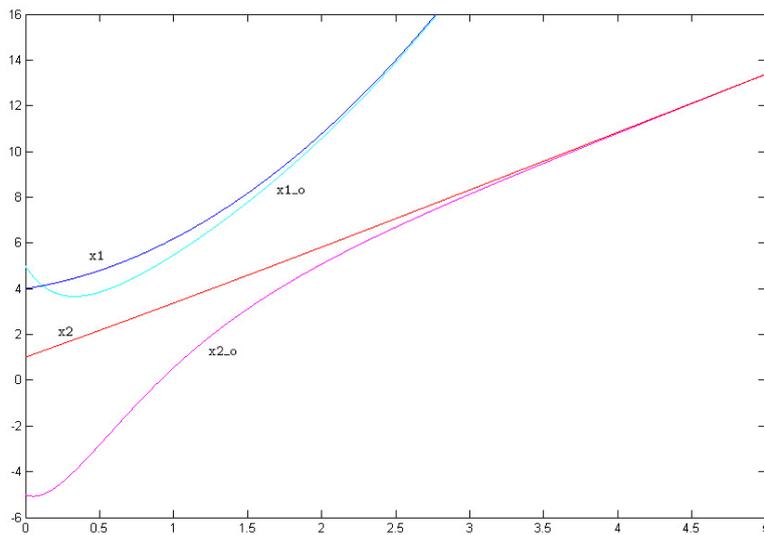


Figura 2.14: evoluzione del sistema e osservatore:  $h = 0.0001$  s,  $\Phi() = \arctan()$ ,  $l_{11} = l_{21} = 5$

il programma per costruire tali grafici é stato incluso nell'appendice 1, mentre lo schema a blocchi del sistema piú osservatore é il seguente.

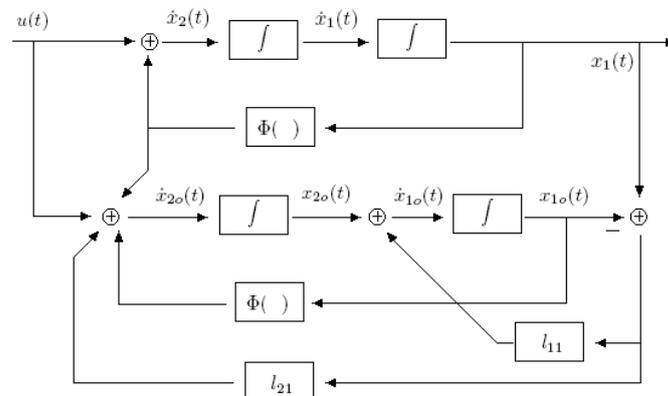


Figura 2.15: schema a blocchi del sistema non lineare e relativo osservatore

## 2.7 Controllo ad anello aperto

Dato il sistema volano  $J\ddot{\theta}(t) = C_m(t)$  si vuole determinare una funzione di ingresso  $u(t) = C_m(t)$  tale che, assunto  $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$  si abbia  $\theta(\tau) = \bar{\theta}$  e  $\dot{\theta}(\tau) = 0$  con  $\tau$  e  $\bar{\theta}$  tempo e riferimento assegnati.

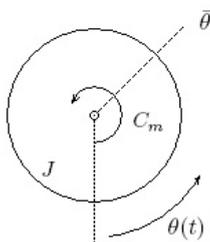


Figura 2.16: volano controllato in anello aperto

chiamate  $x_1(t) = \theta(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ ,  $y(t) = \theta(t)$  si può scrivere il sistema nella rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

per cui la matrice di raggiungibilità del sistema risulta:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

e, come ci si aspetta, il sistema risulta completamente raggiungibile, per cui *esiste* un ingresso  $u(\cdot)$  tale per cui  $x_1(\tau) = \bar{\theta}$  e  $x_2(\tau) = 0$ . Visto che il sistema parte con condizioni iniziali nulle<sup>22</sup>, si può esprimere la relazione ingresso-uscita con la sola funzione di trasferimento:

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \frac{1}{s^2}$$

Per trovare un ingresso che faccia al caso nostro si può, per esempio, imporre che l'evoluzione di  $\theta$  abbia un andamento desiderato e calcolarne l'ingresso corrispondente. Per esempio:

$$\theta(t) = \bar{\theta} \sin\left(\frac{\pi}{2\tau}t\right) \xrightarrow{L} Y(s) = \bar{\theta} \frac{\frac{\pi}{2\tau}}{s^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}}$$

a cui corrisponde l'ingresso:

$$U(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \bar{\theta} \frac{\pi}{2\tau} \frac{s^2}{s^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}}$$

Si ottiene una trasformata non strettamente propria: ciò significa che lo sviluppo di *Heaveside* contiene un termine costante e che l'antitrasformata  $u(t)$  è di carattere impulsivo nell'origine. Fisicamente, infatti, si sta imponendo che  $\dot{\theta}(0^-) = 0$  sia diversa da  $\dot{\theta}(0^+) > 0$ , e il volano passa istantaneamente da uno stato di quiete ad uno con momento angolare diverso da zero (e la coppia motrice  $C_m(t)$  dovrebbe applicare potenza infinita). Ciò basta per indicare che questa non è una

<sup>22</sup>per la trasformata di Laplace le condizioni iniziali sono  $x_1(0^-)$ ,  $x_2(0^-)$ . Per esempio, se  $f(t)$  è discontinua di prima specie in  $t = 0$  allora  $f(t)$  contiene un impulso applicato al tempo  $t = 0$  e  $L[f(t)] = sF(s) - f(0^-)$

buona legge di controllo e fisicamente non realizzabile.  
 La legge di uscita a coseno rialzato, invece:

$$\theta(t) = \frac{\bar{\theta}}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \right] \xrightarrow{L} Y(s) = \frac{\bar{\theta}}{2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \right]$$

garantisce le stesse specifiche mantenendo però  $\dot{\theta}(0^-) = \dot{\theta}(0^+)$ . Si ricava l'ingresso corrispondente<sup>23</sup>:

$$U(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\bar{\theta}}{2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \right] J s^2 = \frac{\bar{\theta} J \pi^2}{2\tau^2} \frac{s}{s^2 + \frac{\pi^2}{\tau^2}} \xrightarrow{L^{-1}} u(t) = \frac{\bar{\theta} J \pi^2}{2\tau^2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)$$

Ora, ipotizzando che si voglia mantenere il volano per  $t \geq \tau$  nella posizione raggiunta, per la proprietà di composizione della funzione di transizione soluzione del sistema, si può prendere  $\tau$  come nuovo istante iniziale, di cui si conosce lo stato iniziale  $x(\tau) = \bar{\theta}$ , e trovare un ingresso per  $t \geq \tau$  tale che  $x(t) = x(\tau)$ . Tale condizione può essere soddisfatta con ingresso nullo, infatti:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si è simulata l'evoluzione di  $\theta(t)$  implementando numericamente il sistema di equazioni, fissato un passo di campionamento  $T_c$ . Si ricorda che anche in questo caso, non essendo l'ingresso costante a tratti, occorre risolvere un sistema di equazioni alle differenze in cui le matrici dipendono dal passo  $k$ . Riprendendo le equazioni generali dell'evoluzione dello stato ed effettuando il solito cambiamento di variabili  $h = (k+1)T_c - \sigma$  si ottiene in questo caso particolare:

$$x((k+1)T_c) = e^{AT_c} x(kT_c) + \frac{\bar{\theta} J \pi^2}{2\tau^2} \int_0^{T_c} e^{Ah} B \cos\left[\frac{\pi}{\tau}[(k+1)T_c - h]\right] dh$$

si veda l'appendice 3 per lo sviluppo dei calcoli e per il listato Matlab corrispondente. La risposta è stata calcolata per  $J = 10 \text{ Kg m}^2$ ,  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ,  $\tau = 10 \text{ sec}$ ,  $T_c = 0.001 \text{ sec}$ . Intuitivamente il volano viene accelerato e quindi frenato dalla coppia motrice portandolo nella posizione voluta:

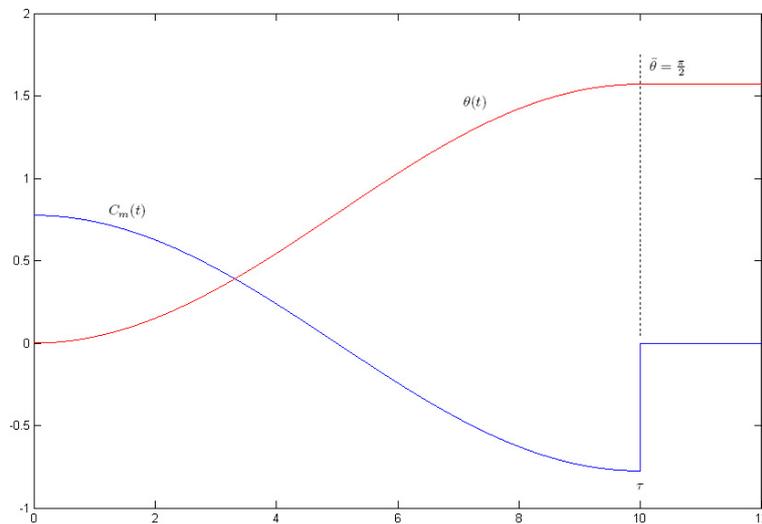


Figura 2.17: simulazione del volano controllato

Utilizzando il listato è possibile simulare un qualunque sistema di questo tipo sottoposto dall'ingresso corrispondente, specificando in ingresso i valori dei parametri del sistema. La simulazione è stata effettuata per verificare il risultato analitico.

<sup>23</sup>si può verificare anche per integrazione mantenendo tali equazioni nel tempo

## 2.8 Retroazione dello stato con piú ingressi controllabili

Nel caso in cui il sistema sia completamente raggiungibile e siano presenti piú ingressi di controllo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + [ B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_m ] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

il problema dell'allocazione degli autovalori risulta piú laborioso, rispetto al caso ad un ingresso, ma comunque solubile. Si può seguire questa procedura:

- si prende in considerazione il primo ingresso  $u_1(t)$  e si pongono gli altri ingressi a zero (non si sfruttano per il controllo)
- si sceglie una matrice  $K_1$  tale che in retroazione  $u_1(t) = K_1x(t)$  allochi tutti gli autovalori raggiungibili dal primo ingresso.
- posto  $u_1(t) = K_1x(t)$ , si prende  $u_2(t) \neq 0$ :

$$\dot{x}(t) = [A + B_1K_1]x(t) + B_2u_2(t) = A_1x(t) + B_2u_2(t)$$

e si sceglie una seconda matrice  $K_2$  tale che tramite  $u_2(t) = K_2x(t)$  vengano allocati tutti gli autovalori raggiungibili dal secondo ingresso e non raggiungibili dal primo.

- si procede considerando  $u_3(t) \neq 0$  e così via. Se il sistema é completamente raggiungibile, utilizzando al piú tutti gli  $m$  ingressi in retroazione, si allocano tutti gli autovalori del sistema.

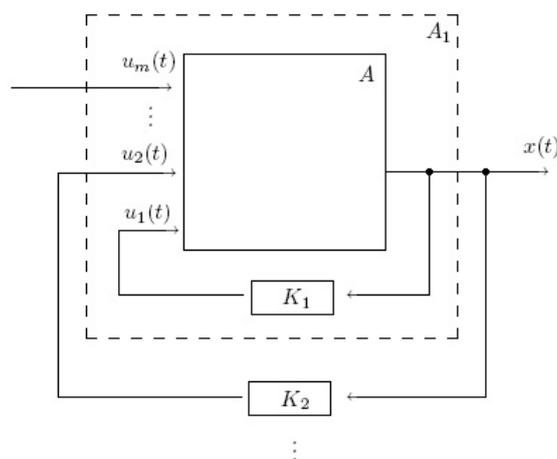


Figura 2.18: retroazione tramite piú ingressi di controllo

\* \* \* \*

Sia dato il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + 3x_2(t)^3 + x_1(t)x_2(t)^2 + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -2x_3(t) + x_1(t)^3 + u_1(t) \end{aligned}$$

si vuole determinare una retroazione dello stato che stabilizzi il sistema nell'origine.

Si può facilmente verificare che la coppia di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u}) = ([0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0]^T)$  soddisfa il sistema  $0 = \rho(\bar{x}, \bar{u})$ . Procediamo linearizzando il sistema:

$$A_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 & 9x_2^2 + 2x_1x_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3x_1^2 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_3}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [ B_1 \ B_2 ]$$

Si osserva che la coppia linearizzata  $(A_{\bar{x}, \bar{u}}, B_{\bar{x}, \bar{u}})$  è completamente raggiungibile dal primo ingresso  $u_1(t)$ , perché:

$$R_1 = [ B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno, mentre non è completamente raggiungibile dal secondo ingresso:

$$R_2 = [ B_1 \ AB_1 \ A^2B_1 ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 1. Tuttavia, in questo caso il sistema linearizzato presenta un unico autovalore instabile  $\lambda = 1^{24}$  che, come si può verificare applicando *Popov* o ragionando sulle equazioni del sistema è l'unico raggiungibile dal secondo ingresso. Infatti:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [ k_1 \ k_2 \ k_3 ] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

ed è sufficiente scegliere  $k_1 < -1$  per stabilizzare asintoticamente il sistema.

## 2.9 Insieme di regolatori stabilizzanti

Dato il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t) \end{aligned}$$

è possibile ricavare l'insieme di tutti i regolatori a retroazione dello stato per cui il sistema ad anello chiuso risulti asintoticamente stabile.

Il sistema ammette rappresentazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

si studia il polinomio caratteristico della matrice della dinamica ad anello chiuso:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [ k_1 \ k_2 ] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

<sup>24</sup>A è diagonale e gli autovalori sono sulla diagonale principale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$p(s) = \det[sI - (A + BK)] = s^2 + s(-k_2 - 2) + 2k_2 + 1 - k_1$$

e le condizioni sui coefficienti del polinomio implicano i vincoli sugli elementi  $k_1$  e  $k_2$  della matrice di retroazione:

$$\begin{aligned} k_2 &< -2 \\ k_1 &< 2k_2 + 1 \end{aligned}$$

l'insieme dei valori ammissibili  $(k_1, k_2)$  corrisponde alla porzione di piano evidenziata in figura:

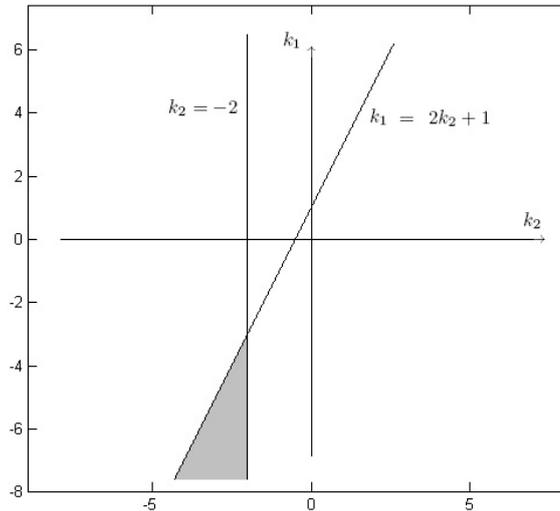


Figura 2.19: punti sul piano  $(k_1, k_2)$  relativi ai regolatori stabilizzanti

## 2.10 Retroazione senza oscillazioni

*Con il metodo dell'assegnazione degli autovalori è possibile assegnare la dinamica a piacimento in un punto di equilibrio, facendo però ricorso a regolatori di una certa complessità. In alcuni casi è possibile ottenere semplici specifiche con regolatori di complessità limitata.*

Si consideri ad esempio il sistema fisico in figura 2.20. Il problema che ci poniamo è di rendere il sistema stabile ed evitare oscillazioni attorno al punto di equilibrio specificato. A tal fine possiamo determinare la rappresentazione di stato, il punto di equilibrio e, assunto un regolatore di tipo proporzionale, individuare i valori del guadagno  $k$  in modo tale che il sistema linearizzato abbia risposta priva di oscillazioni (anche se smorzate).

La derivata del volume di liquido interno al serbatoio è uguale a:

$$\dot{h}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

dove nel nostro caso  $q_{in}(t) = q_0$  ed è una portata costante normalizzata che descrive il livello di crescita del liquido con valvola chiusa. La portata di uscita, se il liquido non è ideale ed ha perdite è uguale a:

$$q_{out}(t) = \alpha s(t) \sqrt{h(t)}$$

dove  $\alpha$  è il fattore dissipativo ed  $s(t)$  la sezione della valvola.  $s(t)$  non può essere controllata direttamente ma attraverso un motore per cui:

$$\dot{s}(t) = v(t)$$

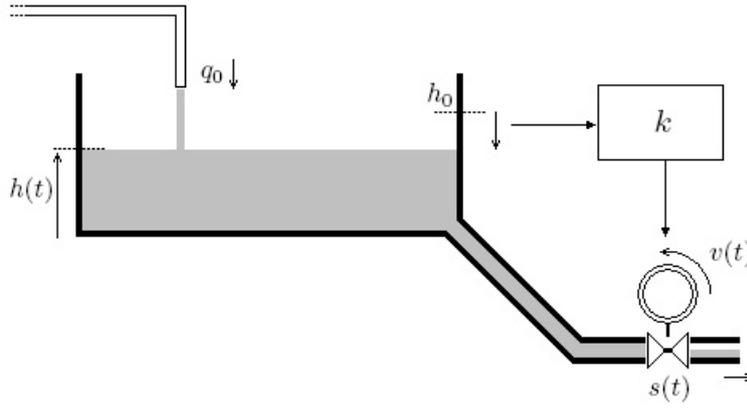


Figura 2.20: modello di un serbatoio con valvola controllata

cioé la variazione della sezione é proporzionale alla velocità di rotazione del motore (controllo attraverso un integratore). Sul segnale di controllo  $v(t)$  si effettua una retroazione misurando la variazione del liquido:

$$v(t) = -k(h(t) - h_0)$$

Dove  $h_0 > 0$  é il livello di riferimento. Quindi, complessivamente il sistema é descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= q_0 - \alpha s(t) \sqrt{h(t)} \\ \dot{s}(t) &= -k(h(t) - h_0) \end{aligned}$$

Per determinare il punto di equilibrio si risolve il sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= q_0 - \alpha \bar{s} \sqrt{\bar{h}} \\ 0 &= -k(\bar{h} - h_0) \end{aligned}$$

che fornisce:

$$\begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 \\ \frac{q_0}{\alpha \sqrt{h_0}} \end{bmatrix}$$

Linearizzando il sistema attorno a tale punto di equilibrio, chiamate le variabili traslate  $z_1 = h - h_0$  e  $z_2 = s - s_0$  si ricava il polinomio caratteristico:

$$A_{(\bar{h}, \bar{s})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial h} & \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial h} & \frac{\partial \rho_2}{\partial s} \end{bmatrix}_{(\bar{h}, \bar{s})} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha s}{2\sqrt{h}} & -\alpha\sqrt{h} \\ -k & 0 \end{bmatrix}_{\bar{h}, \bar{s}} = \begin{bmatrix} -\frac{q_0}{2h_0} & -\alpha\sqrt{h_0} \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

che, come prevedibile, risulta funzione del punto di equilibrio:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s + \frac{q_0}{2h_0} & \alpha\sqrt{h_0} \\ k & s \end{bmatrix} = s^2 + \left(\frac{q_0}{2h_0}\right)s - \alpha k \sqrt{h_0}$$

Volendo imporre che il sistema non abbiamo oscillazioni é necessario imporre che le radici di tale polinomio siano puramente reali e, di conseguenza, é necessario vincolare il discriminante  $\Delta \geq 0$ :

$$\Delta = \frac{q_0^2}{4h_0^2} + 4\alpha k \sqrt{h_0} \geq 0$$

che impone il vincolo su  $k$ :

$$k \geq -\frac{q_0^2}{16\alpha h_0^2 \sqrt{h_0}}$$

imponendo che le radici siano asintoticamente stabili, si ricava il vincolo superiore per  $k < 0$ . Quindi i valori di  $k$  ammissibili sono compresi nell'intervallo:

$$-\frac{q_0^2}{16\alpha h_0^2 \sqrt{h_0}} \leq k < 0$$

## 2.11 Retroazione dinamica per sistema statico

Capita spesso nella pratica di incontrare sistemi statici: anche se in teoria questi potrebbero essere controllati con regolatori proporzionali é bene introdurre una dinamica tramite regolatore. Si determini, ad esempio un regolatore a retroazione dell'uscita per il seguente sistema statico:

$$y(t) = au(t)$$

in modo tale che il sistema ad anello chiuso abbia un unico valore in  $-1$ .

Per questo problema seguiamo la tecnica prevista dai controlli automatici, introducendo in serie un regolatore con funzione di trasferimento  $W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ . Ad anello chiuso la funzione di trasferimento risulta:

$$Y(s) = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}a}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}a} U(s) = \frac{N(s)a}{D(s) + N(s)} U(s) = \frac{N(s)a}{D(s) + aN(s)}$$

occorre imporre che il polinomio caratteristico abbia radice pari a  $-1$ , quindi:

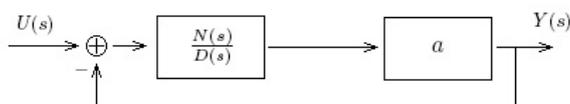


Figura 2.21: regolatore in retroazione per sistema statico

$$D(s) + aN(s) = s + 1 \Rightarrow D(s) = s, \quad N(s) = \frac{1}{a}$$

Il problema, quindi, é solubile e basta utilizzare il regolatore  $R(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s}$ . Questo modo di procedere ha il vantaggio che l'errore a regime, dato un riferimento a gradino, é nullo indipendentemente dal valore di  $a$  che può essere incerto.

## 2.12 Velocità di convergenza

La velocità di convergenza di un sistema lineare invariante  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  é un parametro  $\beta > 0$  per cui ogni modo del sistema  $e^{\lambda t}$  é tale che  $Re(\lambda) \leq -\beta$ . Dato il sistema lineare:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

si vuole determinare la massima velocità di convergenza ottenibile tramite retroazione dello stato.

Effettuando un test di raggiungibilità:

$$rank(R) = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

si deduce che esiste un sottospazio non raggiungibile di dimensione 1, e quindi solamente un autovalore é allocabile mediante retroazione dello stato. Gli autovalori del sistema sono:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 5s + 4 = (s+1)(s+2) \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$$

applicamo allora il test di *Popov* di raggiungibilit  per  $\lambda_1 = -1$ :

$$\text{rank}[\lambda I - A \ B]_{\lambda=-1} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

tale matrice ha caduta di rango: segue quindi che  $\lambda_1 = -1$  non é modificabile in retroazione e che  $\lambda_2 = -4$  é raggiungibile e perci  allocabile. Tale conclusione implica che la velocit  di convergenza del sistema risulti  $\beta = 1$ .

## Capitolo 3

# Catene di Markov

Le catene di Markov sono una categoria molto particolare di sistemi a tempo discreto che però si prestano molto bene alla trattazione di situazioni in cui entrano in gioco eventi stocastici. Saranno esaminati dei semplici casi.

Le catene di Markov sono sistemi lineari discreti particolari, le cui variabili di stato non sono grandezze fisiche ma rappresentano la probabilità che il sistema si trovi nello stato che esse rappresentano. Possono descrivere, come descritto negli esempi successivi, l'evoluzione di un automa<sup>1</sup> con transizioni aleatorie, a cui si associa alle transizioni una probabilità. Prendiamo come esempio le transizioni descritte in figura 3.1:

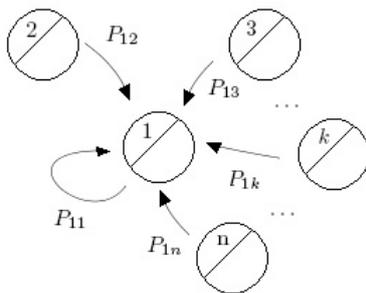


Figura 3.1: calcolo della probabilità dello stato successivo

con  $P_{ij}$  indichiamo la probabilità di transitare dallo stato  $j$  allo stato  $i$ , definita  $\forall$  coppia di stati, nel transitare dal generico  $k$ -esimo al  $k+1$ -esimo passo, e con  $x(k)$  il vettore di stato  $i$  i cui elementi  $x_i(k)$  sono le probabilità che l'automa si trovi nello stato  $i$  al passo  $k$ . Studiando il grafo si può ricavare la relazione che lega  $x(k)$  a  $x(k+1)$ . La probabilità che il sistema si trovi nello stato 1 al passo  $k+1$ , sarà:

$$P[\{1 : (k+1)\}] = P[\{\{1 : (k)\} \cap \{\Rightarrow 1\}\} \cup \{\{2 : (k)\} \cap \{\Rightarrow 1\}\} \cup \{\{3 : (k)\} \cap \{\Rightarrow 1\}\}] + \dots$$

calcoliamo la probabilità di unione di eventi tra loro disgiunti, quindi la probabilità è pari alla somma delle probabilità dei singoli eventi:

$$P[\{1 : (k+1)\}] = P[\{\{1 : (k)\} \cap \{\Rightarrow 1\}\}] + P[\{\{2 : (k)\} \cap \{\Rightarrow 1\}\}] + P[\{\{3 : (k)\} \cap \{\Rightarrow 1\}\}] + \dots$$

Se si assume che le transizioni al passo  $k$  siano indipendenti tra loro e da quelle precedenti, le probabilità di intersezioni di eventi si calcolano con il prodotto delle relative probabilità:

$$P[\{1 : (k+1)\}] = P[\{1 : (k)\}]P[\{\Rightarrow 1\}] + P[\{2 : (k)\}]P[\{\Rightarrow 1\}] + P[\{3 : (k)\}]P[\{\Rightarrow 1\}] + \dots$$

<sup>1</sup>automa finito è un sistema in cui l'insieme delle funzioni di ingresso, degli stati e delle uscite non sono spazi vettoriali ma insiemi finiti di elementi. Per le catene di Markov non vengono considerati ingressi

cioé, sostituendo alla probabilità l'elemento  $x_1(k)$ :

$$x_1(k+1) = x_1(k)P_{11} + x_2(k)P_{12} + x_3(k)P_{13} + \dots$$

formula generalizzabile come:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n P_{ij}x_j(k)$$

in forma vettoriale:

$$x(k+1) = Px(k)$$

si ricava quindi un sistema a tempo discreto che evolve in risposta libera, con  $P$  matrice di Markov con elementi  $[P_{ij}]$ . Nei problemi successivi verranno dimostrate e verificate le proprietà fondamentali di tale matrice e di questi sistemi discerti particolari.

### 3.1 Proprietá fondamentale della matrice di Markov

Si consideri il sistema discreto:

$$x(k+1) = Px(k)$$

vediamo quale condizione sulla matrice  $P$  garantisce che il sistema sia una catena di Markov. Se  $P$  é matrice di Markov, i suoi elementi sono le probabilità assegnate alle transizioni, e quindi sicuramente  $P_{ij} \geq 0$ . Per l'interpretazione di  $x(k)$  come distribuzione di probabilità,  $x(0)$  con  $x_i(0) \geq 0$  in particolare sará la distribuzione di probabilità iniziale dello stato di partenza dell'automa, ed essendo pure  $P$  ad elementi non negativi, allora vale sicuramente<sup>2</sup>:

$$x(k) \geq 0 \quad \forall k$$

e, definito il vettore riga  $\bar{1}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ , anche:

$$\bar{1}^T x(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) = 1 \quad \forall k \tag{3.1}$$

Dovendo valere tale relazione per ogni  $k$ , possiamo scrivere:

$$\bar{1}^T x(k+1) = \bar{1}^T Px(k) = 1$$

e sviluppando il conto:

$$[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = 1$$

$$\left[ \sum_{i=1}^n P_{i1} \quad \sum_{i=1}^n P_{i2} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^n P_{in} \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n P_{i1}x_1(k) + \sum_{i=1}^n P_{i2}x_2(k) + \dots + \sum_{i=1}^n P_{in}x_n(k) = 1$$

essendo pure gli elementi del vettore  $x(k)$  non negativi e di somma unitaria per la 3.1, la relazione é verificata se e solo se la somma delle colonne della matrice  $P$  é anch'essa unitaria. Tale caratteristica contraddistingue le matrici di Markov.

<sup>2</sup> $x(k)$  sará combinazione lineare di elementi positivi moltiplicati per coefficienti positivi

### 3.2 Distribuzione asintotica di probabilità di una catena di Markov e simulazione

Per la simulazione successiva è importante sottolineare un'altra caratteristica importante delle catene di Markov. Ogni matrice  $P$  possiede sicuramente come elemento dello spettro  $\sigma(P)$  l'autovalore  $\lambda = 1$ . Si può verificare tale proprietà sviluppando l'espressione che soddisfa l'autovettore sinistro associato all'autovalore unitario:

$$\bar{s}^T P = \bar{s}^T \tag{3.2}$$

mostriamo che:

$$s^T = [ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 ]$$

infatti:

$$[ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 ] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} = [ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 ]$$

sviluppando il prodotto matriciale si ottiene l'identità:

$$\left[ \sum_{i=1}^n P_{i1} \quad \sum_{i=1}^n P_{i2} \dots \sum_{i=1}^n P_{in} \right] = [ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 ]$$

Quindi, in generale, per una matrice  $P$  di una catena di Markov è sempre soddisfatta l'equazione 3.1, ed esiste sempre l'autovettore sinistro associato all'autovalore  $\lambda = 1$ . Inoltre gli autovettori sinistri sono gli autovettori destri della matrice trasposta di  $P$ , ma  $P$  e  $P^T$  sono matrici simili e  $\sigma(P) = \sigma(P^T)$ : il che implica anche l'esistenza, più importante per i nostri scopi, dell'autovettore destro associato a  $\lambda = 1$ . Per completezza si può dimostrare inoltre che  $\lambda = 1$  è l'autovalore maggiore, cioè:

$$\forall k \quad \lambda_k \in \sigma(P), \quad |\lambda_k| \leq 1$$

Questo fatto fa sì che il sistema discreto sia marginalmente stabile ed è facile ricavare informazioni sulla distribuzione asintotica di probabilità per  $k \rightarrow \infty$ .

\* \* \* \*

Una moneta non truccata viene lanciata infinite volte. Si vince una somma  $\mu$  ogni volta che appaiono due teste  $T$  consecutive senza ripetizione. Si vuole scrivere una catena di Markov che descriva il fenomeno e determinare la distribuzione asintotica.

Per capire come interpretare la catena, immaginiamo che si abbia la sequenza 'CTTTCCTCTTTT...': essa prevede tre vittorie, una esattamente al terzo lancio, una al decimo e una al dodicesimo (se dopo una sequenza  $TT$  capita un'altra  $T$ , essa non comporta una vittoria ma va eventualmente conteggiata con il risultato successivo).

Si può allora ricavare facilmente il grafo delle transizioni (quelle non segnate corrispondono a transizioni con probabilità pari a zero) e la matrice  $P$  corrispondente, che sono:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

la matrice  $P$  ha polinomio caratteristico:

$$p(s) = \det(sI - P) = \det \begin{bmatrix} s - 0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & s & 0 \\ 0 & -0.5 & s \end{bmatrix} = s^3 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}$$

si può verificare applicando ruffini che il polinomio ammette radice pari ad 1 e può essere scritto come:

$$p(s) = (s - 1) \left( s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_{23} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{4} \end{matrix}$$

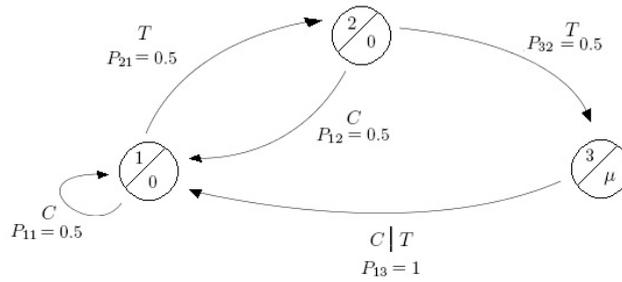


Figura 3.2: catena di Markov per il lancio della moneta

la risposta del sistema sarà del tipo:

$$x(k) = P^k x(0) = \left( \sum_{i=1}^3 \bar{t}_i \bar{s}_i^T \lambda_i^k \right) x(0) = \bar{t}_1 \bar{s}_1^T (1)^k x(0) + \sum_{i=2}^3 \bar{t}_i \bar{s}_i^T \lambda_i^k$$

per  $k \rightarrow \infty$  la sommatoria tende a zero in quanto gli autovalori minori di 1 in modulo sono asintoticamente stabili, quindi:

$$x(k) \rightarrow \bar{t}_1 \bar{s}_1^T (1)^k x(0) = \bar{t}_1 \alpha$$

Cioè il vettore di probabilità tende all'autovettore destro associato all'autovalore unitario<sup>3</sup>.  $\alpha$  è una costante che si ricava normalizzando semplicemente la somma degli elementi di  $\bar{t}_1$  che deve essere anche in questo caso una distribuzione di probabilità. Ricaviamo allora l'autovettore  $\bar{t}_1$ :

$$P \bar{t}_1 = \bar{t}_1$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}$$

da cui, moltiplicando per 2 a destra e a sinistra, si ricava il sistema:

$$\begin{aligned} t_{11} + t_{12} + 2t_{13} &= 2t_{11} \\ t_{11} &= 2t_{12} \\ t_{12} &= 2t_{13} \end{aligned}$$

per esempio, si sceglie l'autovettore fissando arbitrariamente  $t_{13} = 1$ :

$$\bar{t}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

infine si normalizzano le componenti:

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2 + 4} \Rightarrow \alpha \bar{t}_1 = \begin{bmatrix} x_1(k) \rightarrow \frac{4}{7} \\ x_2(k) \rightarrow \frac{2}{7} \\ x_3(k) \rightarrow \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Quindi, asintoticamente l'automa si trova allo stato  $i$ -esimo con questa distribuzione di probabilità. Si è verificata tale proprietà simulando il sistema supponendo che il primo lancio fosse una croce, assumendo quindi la certezza di cominciare dallo stato 1:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In altre parole, il risultato significa che la vincita media della giocata nel lungo periodo è pari a  $\frac{1}{7}\mu$  perché  $\frac{1}{7}$  è la probabilità asintotica di essere allo stato 3 di vincita.

<sup>3</sup>questo è vero se l'autovalore pari ad 1 è semplice, se esistono più autovalori in modulo uguali ad 1 non esiste limite per  $k \rightarrow \infty$

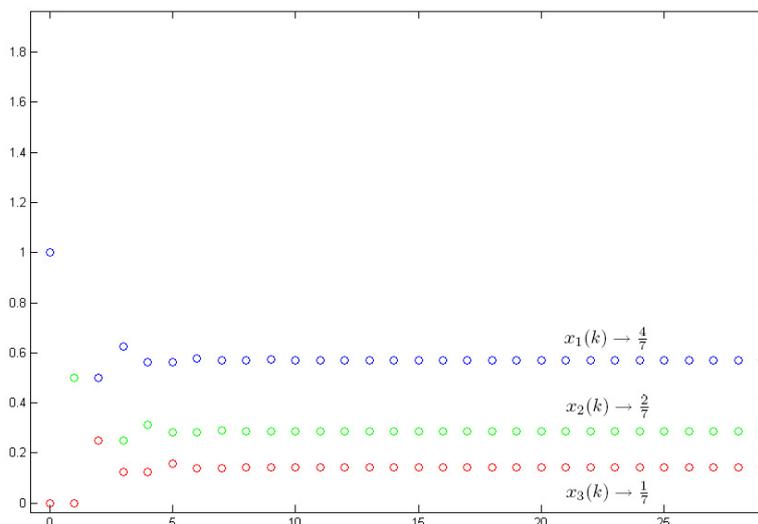


Figura 3.3: simulazione della catena di Markov

### 3.3 Catene di Markov simmetriche

Si vuole verificare che per una catena di Markov avente autovalore  $\lambda = 1$  semplice, in cui per ogni coppia di stati  $i, j$  la probabilità di transizione dallo stato  $i$  allo stato  $j$  è uguale alla probabilità di transizione dallo stato  $j$  allo stato  $i$ , la probabilità asintotica è uguale in tutti gli stati, cioè:

$$x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} p \\ p \\ \vdots \\ p \end{bmatrix}, \quad p = \frac{1}{n}$$

La proprietà di simmetria delle transizioni si riflette sulla forma della matrice di Markov, che in questo caso risulta simmetrica essendo  $P_{ij} = P_{ji}$ :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{n1} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

e quindi non solo la somma degli elementi delle colonne di  $P$  sono unitarie, ma tale proprietà si trasferisce pure alle righe. Esistendo per ipotesi la distribuzione limite, calcoliamo le equazioni del vettore  $\bar{t}_1$ :

$$\begin{aligned} P_{11}t_1 + P_{21}t_2 + \dots + P_{n1}t_n &= t_1 \\ P_{21}t_1 + P_{22}t_2 + \dots + P_{n2}t_n &= t_2 \\ P_{n1}t_1 + P_{n2}t_2 + \dots + P_{nn}t_n &= t_3 \end{aligned}$$

per la proprietà della matrice  $P$  si può verificare che la soluzione è quella supponendo tutti i  $t_i$  uguali fra loro, infatti così si ottiene:

$$\begin{aligned} (P_{11} + P_{21} + \dots + P_{n1})t &= t \\ (P_{21} + P_{22} + \dots + P_{n2})t &= t \\ (P_{n1} + P_{n2} + \dots + P_{nn})t &= t \end{aligned}$$

che é effettivamente soluzione, essendo i termini tra parentesi unitari. Quindi per  $k \rightarrow \infty$  si ha:

$$x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} t \\ t \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{nt}$$

Per esempio prendiamo la catena di Markov descritta dalla seguente matrice, con condizione iniziale indicata:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La simulazione porta le tre variabili di stato ad assumere asintoticamente lo stesso valore pari ad  $\frac{1}{3}$ .

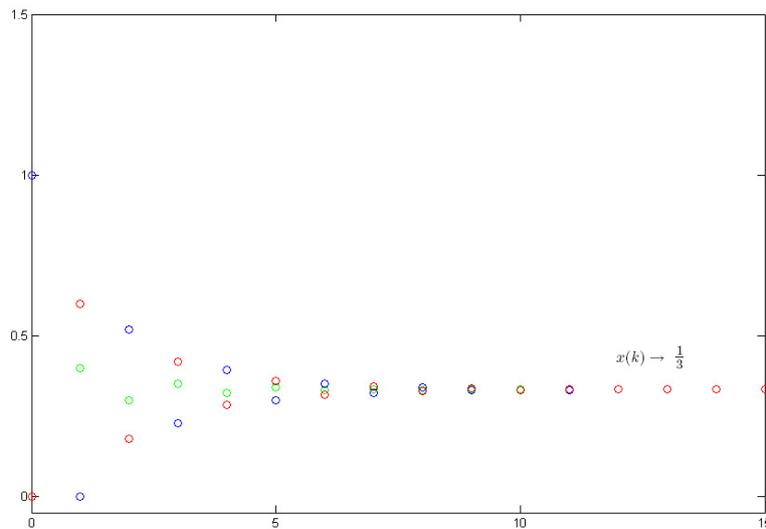


Figura 3.4: evoluzione di una catena di Markov simmetrica

### 3.4 Creazione di una catena di Markov tramite retroazione

Sia data una matrice  $A$   $n \times n$  a coefficienti non negativi. Sia  $B = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \beta]^T$  una matrice di ingresso con una sola componente non nulla,  $\beta > 0$ . Mostriamo sotto quali condizioni esiste un vettore di retroazione  $K$  tale che  $A + BK$  é una matrice di Markov e determinare le componenti di  $K$ .

Innanzitutto occorre verificare la forma della matrice finale in retroazione:

$$A + BK = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} + \beta k_1 & a_{n2} + \beta k_2 & a_{n3} + \beta k_3 & \dots & a_{nn} + \beta k_n \end{bmatrix}$$

tale matrice deve soddisfare la solita proprietà delle matrici di Markov, per cui la somma degli elementi di ogni colonna deve essere unitaria, quindi:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} + \beta k_j = 1$$

che impone il vincolo sugli elementi del vettore  $K$ :

$$k_j = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij} \right]$$

Inoltre, occorre che tutti gli elementi della matrice  $A + BK$  siano non negativi. Ciò è verificato per ipotesi per tutti gli elementi esclusi quelli dell'ultima riga, per cui deve valere:

$$a_{nj} + \beta k_j \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k_j \geq -\frac{a_{nj}}{\beta}$$

condizione che implica un vincolo sugli elementi delle colonne di  $A$ :

$$\frac{1}{\beta} \left[ 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij} \right] \geq -\frac{a_{nj}}{\beta}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \leq 1 \tag{3.3}$$

Cioè la somma degli elementi delle colonne, escluso l'ultimo elemento, devono essere inferiori all'unità. Grazie a questa proprietà è possibile creare un programma che generi una matrice di Markov generica:

```
function [A, P] = Markov(n, beta)

%crea la matrice A
A = rand(n,n);
for j=1:n
    A(1:n-1,j) = A(1:n-1,j) / (n-1);
end

B = [zeros(n-1,1) ; beta]

%crea la matrice di retroazione
for j=1:n
    sum = 0;
    for i=1:n
        sum = sum + A(i,j);
    end
    K(1,j) = (1 - sum)/beta;
end
P = A+B*K
```

Dove per far rispettare la condizione 3.3, si dividono gli elementi di ogni colonna per la loro somma massima possibile, cioè  $n - 1$  (il comando `rand` genera una realizzazione di una variabile aleatoria con distribuzione costante tra  $[0 : 1]$ , quindi 1 è il valore massimo di ogni elemento di  $A$ ).

### 3.5 Buffer di lavorazione

Consideriamo una catena di montaggio così strutturata:

stato	descrizione
1	0 pezzi da lavorare, buffer vuoto
2	1 pezzo di lavorazione, primo slot occupato
3	2 pezzi di lavorazione, due slot occupati
4	3 pezzi di lavorazione, tre slot occupati
5	4 pezzi di lavorazione, buffer completo

Supponiamo che  $\forall$  pezzo occorra un intervallo di tempo  $T = 1$  giorno di lavorazione. Vengono assegnate le probabilità che al giorno  $k$ -esimo arrivino da lavorare  $n$  pezzi:

probabilità	descrizione
$P_0$	arrivano 0 pezzi
$P_1$	arriva 1 pezzo
$P_2$	arrivano 2 pezzi
$P_3 = 0$	arrivano 3 pezzi
$P_4 = 0$	arrivano 4 pezzi
$P_5 = 0$	arrivano 5 pezzi

É utile ragionare sulla matrice di Markov  $P$  del sistema  $x(k+1) = Px(k)$  che descrive lo stato di riempimento del buffer al giorno successivo, infatti:

- $p_{11}$  é la probabilità dell'evento { il giorno successivo il buffer sarà vuoto (al passo  $k+1$  nello stato 1) avendo il giorno stesso zero pezzi da lavorare (al passo  $k$  nello stato 1) }. Tale evento é in realtà l'unione di due eventi: o il giorno stesso non arriva alcun pezzo, o arriva un solo pezzo di lavorazione. Essendo due eventi disgiunti, la probabilità  $p_{11} = P_0 + P_1$ .
- $p_{12}$  é la probabilità dell'evento { il giorno successivo il buffer conterrà un pezzo ( $k+1$  stato 1) avendo il giorno stesso un pezzo da lavorare ( $k$  stato 2) }. L'unica possibilità perché ciò avvenga é che il giorno stesso non arrivi alcun pezzo da lavorare.
- $p_{55}$  é la probabilità dell'evento { il giorno successivo il buffer conterrà 4 pezzi ( $k+1$  allo stato 5) avendo il giorno stesso 4 pezzi da lavorare ( $x(k) = 2$ ) }. Ipotizziamo che anche in questo caso le possibilità siano due: o arriva il giorno stesso un pezzo da lavorare, o nel caso ne arrivino due venga respinto uno per saturazione del buffer.

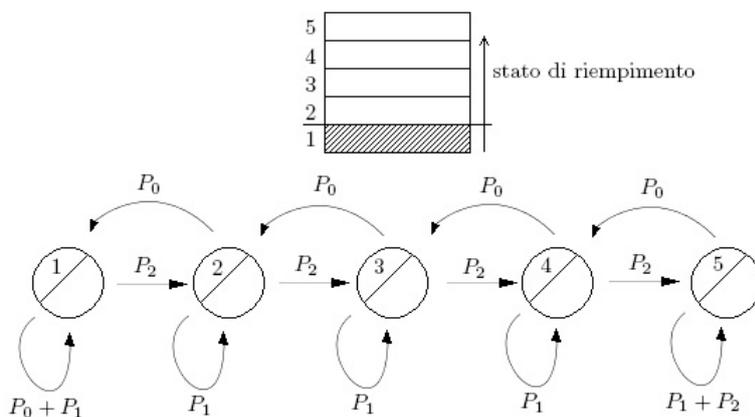


Figura 3.5: grafo degli stati e delle transizioni del buffer

Tali condizioni trovano corrispondenza con la catena di Markov:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 + P_1 & P_0 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & P_0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & P_1 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & P_1 & P_0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 & P_1 + P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}$$

assegnate le probabilità  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  si può calcolare lo stato di riempimento a regime del buffer mediante l'autovettore destro  $\bar{t}$  associato a  $\lambda = 1$ . Grazie ai comandi Matlab posti in appendice 2 é possibile ricavare automaticamente  $\bar{t}$ : infatti il sistema  $P\bar{t} = \bar{t}$  equivale a  $(P - I)\bar{t} = 0$ . E' noto dalle nozioni di algebra lineare che un sistema omogeneo ammette soluzioni non banali ( $\bar{t} \neq 0$ ) se e solo se la matrice dei coefficienti  $P - I$  non ha rango pieno: in tal caso le soluzioni sono infinite e appartenenti al nucleo  $\ker(P - I)$ <sup>4</sup>. Il comando `null(P-eye(5))` genera una base del nucleo, che nel nostro caso é l'autospazio generato dall'autovettore  $\bar{t}$ : basta quindi prendere il vettore di base e normalizzarlo. Si é simulato il sistema, vedi figura 3.6, e ricavata la distribuzione asintotica per diversi valori di  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  iniziando il buffer vuoto:

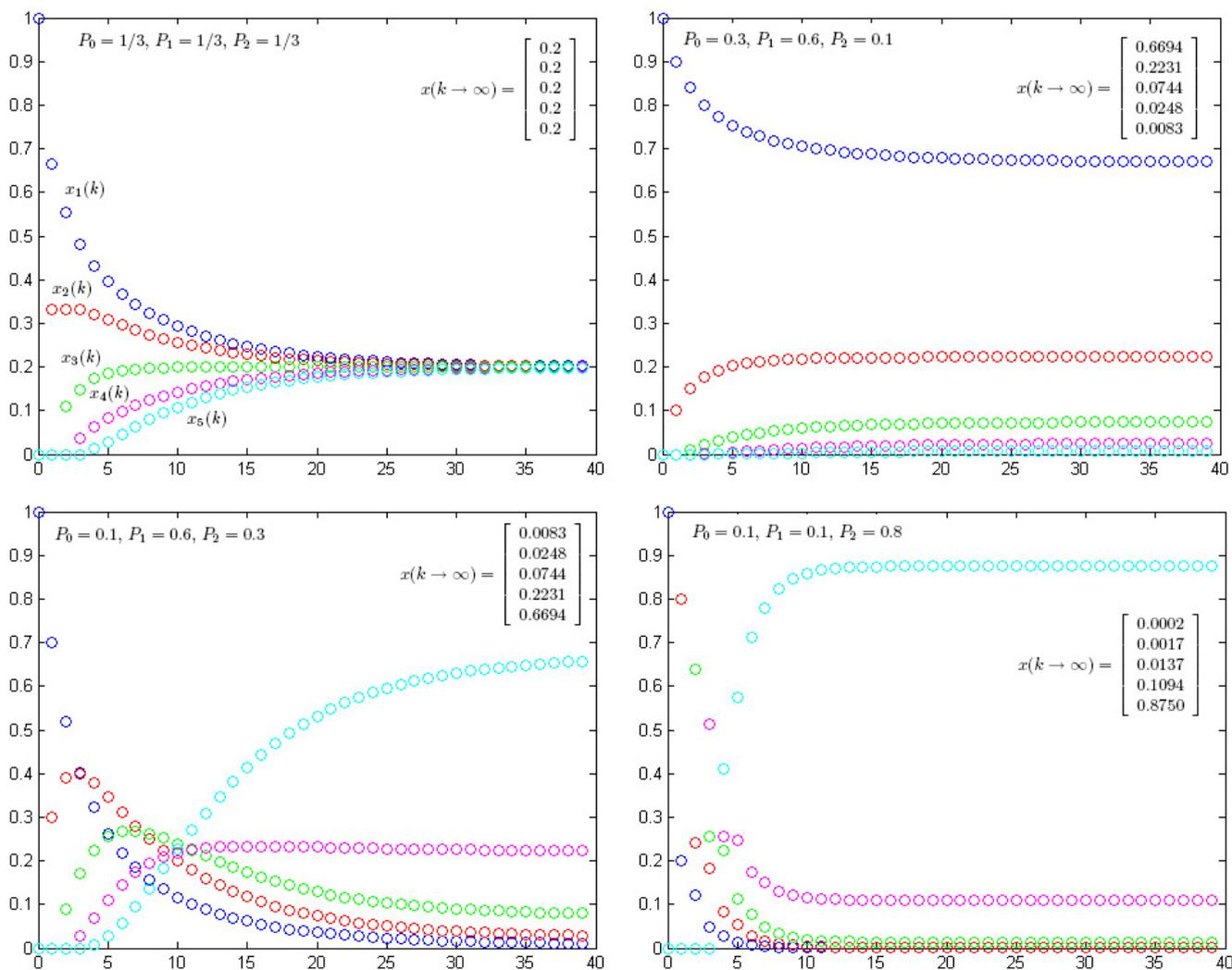


Figura 3.6: simulazione del buffer per diversi  $P_0, P_1, P_2$

chiaramente per i casi particolari:

- $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 0$ : il buffer a regime si svuota.
- $P_0 = 0, P_1 = 0, P_2 = 1$ : il buffer a regime si riempie.
- $P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = 0$ : non esiste il vettore asintotico. perché  $x(k) = x_0 \forall k$  ed il buffer rimane nello stesso stato di riempimento.

<sup>4</sup>il sistema  $Ax=b$  non ammette soluzioni se  $b \notin Ra(A)$  cioè  $rank(A) \neq rank([A \ b])$ , ammette soluzioni  $x = \bar{x} + \tilde{x}$  con  $\bar{x} \in Ra(A)$  e  $\tilde{x} \in Ker(A)$ , ammette un'unica soluzione se  $A$  é quadrata ed invertibile. Vale la relazione utile  $n^{\circ}colonne(A) = rank(A) + Dim(Ker(A))$

## Capitolo 4

# Realizzazioni e forme minime

In questo capitolo saranno studiati, in modo costruttivo, dei semplici problemi di realizzazione di sistemi.

Verranno illustrate le relazioni esistenti tra funzione di trasferimento e rappresentazione di stato dei sistemi. In generale, data una matrice  $W(s)$  di funzioni razionali strettamente proprie se  $D = 0$ , proprie se  $D \neq 0$ , si dice realizzazione una quaterna:

$$\Sigma(A, B, C, D)$$

tale che:

$$C(sI - A)^{-1}B + D = W(s)$$

tale quaterna non è univocamente determinata, infatti se  $W(s)$  ha dimensioni  $p \times m$ , le dimensioni di  $A$   $\nu \times \nu$  non sono vincolate: la realizzazione di  $W(s)$   $\Sigma(A, B, C, D)$  si dice minima se non  $\exists \Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  dove le dimensioni di  $\tilde{A}$  sono minori di quelle di  $A$ , con  $\tilde{A}$  anch'essa realizzazione. Ricordando il fatto che le cancellazioni zero-polo di una funzione di trasferimento riguardano gli autovalori della parte non raggiungibile e non osservabile del sistema, vale la seguente affermazione: data la realizzazione  $\Sigma(A, B, C, D)$  di  $W(s)$ , essa è minima se e solo se il sistema  $\Sigma(A, B, C, D)$  è completamente raggiungibile ed osservabile. In generale, quindi, data una quaterna di realizzazione, si possono isolare mediante le forme di Kalman di raggiungibilità e osservabilità le parti non raggiungibili e non osservabili, ed eliminarle. Si noti che anche la realizzazione minima non è univocamente determinata: se  $\Sigma(A, B, C, D)$  minima, data la matrice di trasformazione di stato  $T$  pure la quaterna  $\Sigma(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  è forma di stato minima.

### 4.1 Implementazione tramite operazionali per le realizzazioni

Si consideri il filtro avente la seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{50s}{(s+5)(s+10)}$$

Vogliamo determinare una realizzazione  $(A, B, C)$  con  $A$  in forma di *Frobenius* e implementare il sistema in forma analogica.

La funzione di trasferimento  $F(s)$  è quella di un derivatore e riscritta in forma di Bode risulta:

$$F(s) = \frac{s}{(\frac{1}{5}s+1)(\frac{1}{10}s+1)}$$

quindi sono presenti due poli stabili, con costanti di tempo  $T_1 = \frac{1}{5}$  e  $T_2 = \frac{1}{10}$ , che abbattano l'azione derivativa dello zero nell'origine: fisicamente infatti non è possibile realizzare un derivatore ideale perché possiede funzione di trasferimento impropria. Con i comandi Matlab:

```
F=tf([50 0],conv([1 5],[1 10]));  
Bode(F);
```

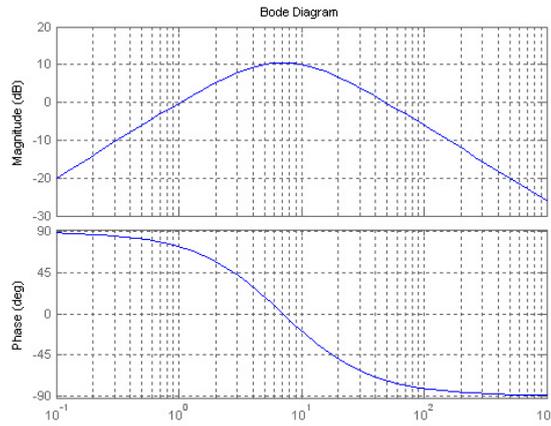


Figura 4.1: risposta in frequenza del filtro da realizzare

é possibile visualizzare direttamente il diagramma di Bode di modulo e fase. Realizziamo il filtro nella forma canonica di raggiungibilit :

$$F(s) = \frac{50s}{(s^2 + 15s + 50)}$$

quindi la terna di *Frobenius*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -15 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 50]$$

genera il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -50x_1(t) - 15x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= 50x_2(t) \end{aligned}$$

Tale forma di stato é immediatamente implementabile attraverso operazionali, grazie ai quali risulta particolarmente facile elaborare i segnali di tensione: nel nostro caso serve un sommatore, degli integratori e dei moltiplicatori per costanti. Il sistema da realizzare é visualizzato in figura 4.2:

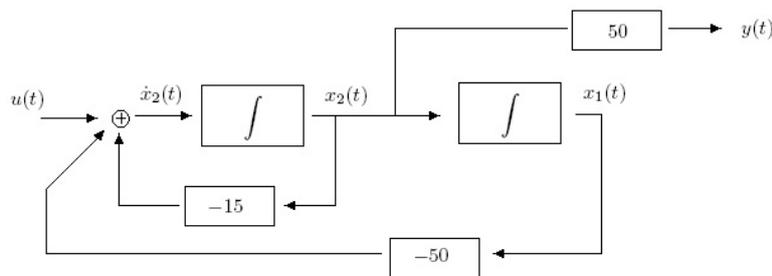


Figura 4.2: schema a blocchi che implementa le equazioni della realizzazione

e il circuito che lo realizza é quello in figura 4.3, in cui sono stati sottolineati i blocchi integratori che hanno relazione ingresso uscita:

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{R_1 C_1} \int_0^t v_{in}(t) dt$$

e si sono scelte opportunamente  $R_1 = 1 \text{ G}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ nF}$  i cui valori abbiano prodotto unitario. Il blocco sommatore la cui relazione temporale ingresso-uscita é:

$$v_{out}(t) = \sum_{i=1}^3 -\frac{R_0}{R_i} v_i(t)$$

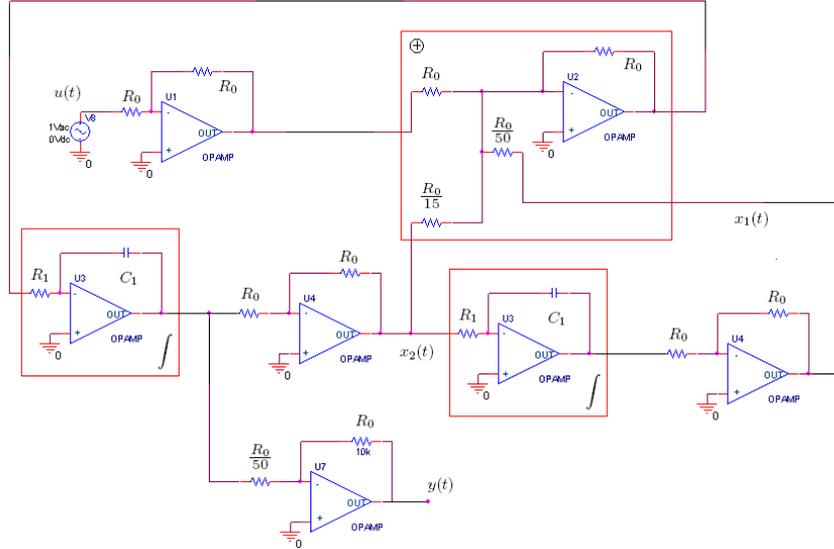


Figura 4.3: circuito a operazionali

effettua anche la combinazione lineare delle tensioni di ingresso se si scelgono opportunamente le resistenze collegate al morsetto sommatore dell'operazionale: ad esempio, per moltiplicare per  $-15$   $x_2(t)$  occorre collegare una resistenza pari ad un quindicesimo di  $R_0$ . Gli altri operazionali fungono da invertitori per coerenza di segni.

La risposta del sistema ad un gradino di tensione in ingresso risulta:

$$Y(s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{(s+5)(s+10)} = \frac{10}{s+5} - \frac{10}{s+10} \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = 10e^{-5t} - 10e^{-10t}$$

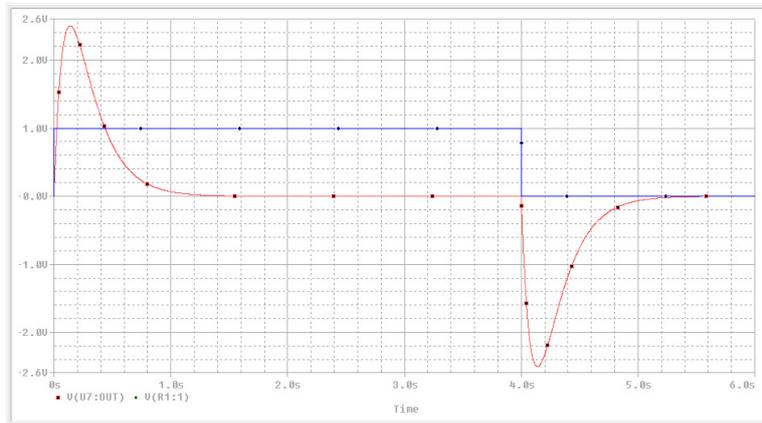


Figura 4.4: risposta al gradino del circuito

che, vista la scala dei tempi, solo molto vagamente ricorda l'impulso  $\delta(t)$ : questo perché il gradino ha uno spettro illimitato di frequenze, ma l'implementazione fisica del derivatore produce una amplificazione e uno sfasamento corretto solamente per un range limitato di frequenze. Quindi solo per segnali di ingresso con contributi spettrali a frequenze sufficientemente basse l'azione derivativa risulta efficace. Per verificarlo prendiamo il segnale di ingresso:

$$u(t) = \frac{1}{2} \sin(0.01t) + 2 \sin\left(0.1t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin\left(0.8t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

la cui derivata risulta:

$$y_t(t) = 0.005 \cos(0.01t) + 0.2 \cos\left(0.1t + \frac{\pi}{6}\right) + 1.6 \cos\left(0.8t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Sempre tramite Spice si può confrontare l'evoluzione dell'uscita teorica (verde) e quella fisica del circuito (rosso), verificandone la somiglianza a regime.

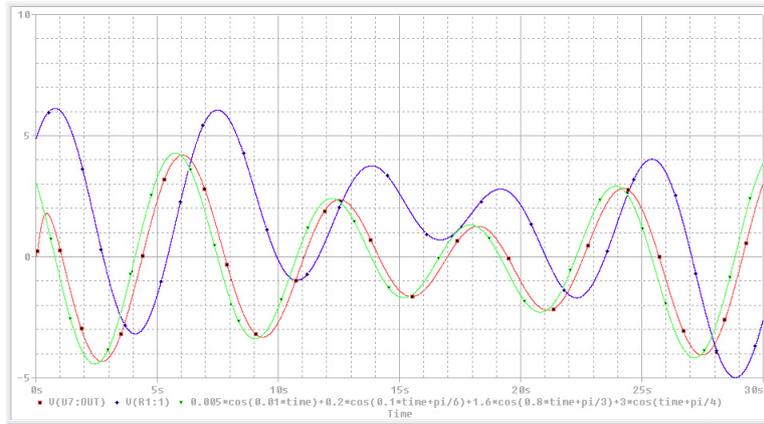


Figura 4.5: confronto uscita del derivatore (rosso) con derivata teorica (verde)

Si può concludere che per segnali il cui contributo frequenziale sia minore di almeno una decade rispetto al primo polo di abbattimento, l'amplificazione e lo sfasamento del sistema approssimano ancora bene quelli di un derivatore ideale (modulo con pendenza  $+20\text{dB/decade}$ , sfasamento di  $\frac{\pi}{2}$ ), mentre, in questo caso, già per pulsazioni  $\omega$  prossime all'unità il comportamento del filtro peggiora.

## 4.2 Realizzazione diagonale

Vogliamo ora determinare una realizzazione con  $A$  in forma diagonale per la funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{3(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

La funzione di trasferimento non risulta strettamente propria, cioè il grado del polinomio al denominatore non è strettamente minore di quello del numeratore<sup>1</sup>. Ciò implica un legame "diretto" tra ingresso e uscita e l'esistenza di una matrice  $D$  non nulla. Per ricavare numericamente le matrici, i passaggi necessari sono:

- estrazione della parte proporzionale:

$$W(s) = \frac{3s^2 + 9s + 6}{(s+3)(s+4)} = \frac{3(s^2 + 7s + 12) - (12s + 30)}{s^2 + 7s + 12} = 3 + \frac{-12s - 30}{s^2 + 7s + 12}$$

$$D = 3$$

- scrittura delle matrici in forma di *Frobenius*. La funzione di trasferimento può venire riscritta in modo generale come:

$$W(s) = \frac{n_1s + n_0}{(s^2 + p_1s + p_0)}$$

da questa forma si ricava immediatamente la forma di stato canonica di *Frobenius*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [n_0 \quad n_1] = [-30 \quad -12]$$

<sup>1</sup>se il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore la funzione di trasferimento è detta impropria e per tali realizzazioni sono necessari altri strumenti

- come già accennato, tale realizzazione di *Frobenius* viene anche chiamata *forma canonica di raggiungibilità*<sup>2</sup>, in quanto la forma di stato così realizzata è raggiungibile. Inoltre, siccome il sistema è *SISO* e la funzione di trasferimento scalare non presenta cancellazioni (numeratore e denominatore sono coprimi), il sistema così realizzato è pure osservabile. Quindi la realizzazione è in forma minima<sup>3</sup>. Come già detto, le realizzazioni minime sono determinate a meno di una trasformazione di stato  $T$ . Per realizzare una forma di stato diagonale, allora, si cerca una matrice quadrata invertibile  $T$  tale che il sistema trasformato:

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT, \quad \hat{D} = D$$

presenti  $\hat{A}$  matrice diagonale. Ci si accorge subito invertendo tale relazione che, prendendo  $T$  la matrice degli autovettori,  $\hat{A} = \Lambda$  è in forma diagonale: sono già noti gli autovalori di  $A$ ,  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = -4$ :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

si ricavano i due autovettori risolvendo i sistemi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t_{11} \\ -3t_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4t_{12} \\ -4t_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

e le matrici  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ :

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT = [-30 \quad -12] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = [6 \quad 18]$$

Un modo alternativo per ricavare tale realizzazione diagonale è quello di pensare alla funzione di trasferimento come parallelo di tre blocchi, o, se si vuole, sviluppare la funzione di trasferimento in fratti semplici con *Heaveside*:

$$3 + \frac{-12s - 40}{(s+3)(s+4)} = 3 + \frac{\alpha}{(s+3)} + \frac{\beta}{(s+4)}$$

e prendere come terna:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha \quad \beta]$$

perché se sviluppiamo l'equazione della funzione di trasferimento, si ottiene:

$$W(s) = [\alpha \quad \beta] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 + \frac{\alpha}{(s+3)} + \frac{\beta}{(s+4)}$$

Quindi, imponendo l'uguaglianza dei numeratori, si ha un sistema di due equazioni in due incognite per determinare gli elementi di  $C$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\alpha(s+4) + \beta(s+3) = -12s - 30 \Rightarrow \alpha = 6, \quad \beta = -18$$

<sup>2</sup>Se cioè una forma di stato è raggiungibile, esiste sempre una trasformazione di stato  $T$  che porta le matrici in tale forma. Esiste anche la duale forma canonica di osservabilità, per  $p = 1$  la forma:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & -p_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

in questo caso non è garantita la raggiungibilità di tale forma di stato.

<sup>3</sup>per sistemi *Single Input-Single Output*, sono presenti cancellazioni della funzione di trasferimento se e solo se il sistema non è raggiungibile e osservabile, per sistemi *MIMO*, invece, cancellazioni nella matrice di trasferimento implicano mancata raggiungibilità e osservabilità ma non viceversa

### 4.3 Realizzazione bidiagonale

Consideriamo ora il problema di determinare una realizzazione con  $A$  in forma bidiagonale <sup>4</sup>, ovvero:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [\mu \quad \nu \quad \rho]$$

per la funzione di trasferimento:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Essendo  $A$  in forma triangolare, necessariamente deve avere gli autovalori sulla diagonale principale:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Restano da ricavare i parametri di  $C$ . Un modo possibile é quello di imporre l'equazione della funzione di trasferimento:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = [\mu \quad \nu \quad \rho] \begin{bmatrix} s+1 & 1 & 0 \\ 0 & s+2 & 1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sviluppando i conti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} &= [\mu \quad \nu \quad \rho] \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & s+1 \\ \times & \times & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} [\mu \quad \nu \quad \rho] \begin{bmatrix} 1 \\ s+1 \\ (s+1)(s+2) \end{bmatrix} = \frac{\mu + \nu(s+1) + \rho(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza dei numeratori delle *f.d.t* si ricavano gli elementi di  $C$ :

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

### 4.4 Realizzazione minima duale per sistemi a piú ingressi e uscite

Se si sta cercando una realizzazione per un sistema a  $m$  ingressi e  $p$  uscite, la procedura esposta precedentemente può essere generalizzata:

- si estrae la parte proporzionale per ogni elemento di  $W(s)$

$$W(s) = \frac{N(s)}{p(s)} = \frac{N^*(s)}{p(s)} + d$$

dove  $N(s)^*$  sono le matrici polinomiali che per elementi hanno i numeratori delle *f.d.t*,  $d_{ij}$  sono gli elementi della matrice  $D$ .

<sup>4</sup>Policastro, Mario The bidiagonal realization: a tool for solving zero and pole assignment problems. Internat. J. Control 32 (1980), no. 5, 803-820.

- Si realizza la funzione strettamente propria:

$$W(s) = \frac{N_{\nu-1}^* s^{\nu-1} + N_{\nu-2}^* s^{\nu-2} + \dots + N_1 s + N_0}{s^\nu + p_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + p_1 s + p_0}$$

con la forma canonica di raggiungibilità partizionata a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{0} & I_m & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & I_m & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \bar{0} \\ -p_0 I_m & -p_1 I_m & -p_2 I_m & \dots & -p_{\nu-1} I_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$$

$$C = [N_0 \quad N_1 \quad \dots \quad N_{\nu-1}]$$

dove  $I_m$  sono blocchi identici  $m \times m$  e le dimensioni delle matrici e il numero delle variabili di stato sono:

$$A[\nu m] \times [\nu m], \quad \tilde{n} = \nu m, \quad B = [\nu m] \times m, \quad C = p \times [\nu m]$$

- La forma di stato realizzata è raggiungibile, ma non è garantita la completa osservabilità. Per avere una forma minima occorre effettuare un test di osservabilità, e nel caso esista un sottosistema non osservabile eliminarlo dalla forma di stato. Risulterà in tal caso che le variabili del sottosistema raggiungibile e osservabile sono  $n \leq \nu m$ . Tale operazione può essere evitata realizzando il sistema duale rispetto a quello di partenza. Ad un generico sistema lineare tempo invariante  $(A, B, C, D)$  possiamo associare il sistema duale trasponendo le matrici del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= A_d x_d(t) + B_d u(t) \\ y_d(t) &= C_d x_d(t) + D_d u(t) \end{aligned}$$

con:

$$A_d = A^T, \quad B_d = C^T, \quad C_d = B^T, \quad D_d = D^T$$

Il sistema duale non ha un significato fisico particolare, ma spesso è utile per sviluppare i conti. In particolare, il primale ed il duale hanno in comune i modi del sistema ( $A$  e  $A^T$  hanno lo stesso spettro). Calcolando la matrice di raggiungibilità e osservabilità del sistema duale ricaviamo:

$$R_d = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{\nu-1} C^T] = [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{\nu-1})^T] = O^T$$

$$O_d = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{\nu-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T \\ (AB)^T \\ \vdots \\ (A^{\nu-1} B)^T \end{bmatrix} = R^T$$

e siccome una matrice e la propria trasposta hanno lo stesso rango, sussiste tale relazione:

$$\begin{aligned} \sum(A, B, C, D) \text{ raggiungibile} &\Leftrightarrow \sum(A_d, B_d, C_d, D_d) \text{ osservabile} \\ \sum(A, B, C, D) \text{ osservabile} &\Leftrightarrow \sum(A_d, B_d, C_d, D_d) \text{ raggiungibile} \end{aligned}$$

per il problema successivo verrà utilizzata questa proprietà, assieme al fatto che la matrice delle funzioni di trasferimento del duale  $W_d(s) = W(s)^T$  perché il duale avrà  $m_d=p$  ingressi e  $p_d=m$  uscite.

★ ★ ★ ★

Determiniamo una realizzazione minima per la funzione di trasferimento di un sistema a due ingressi e una uscita con matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 1 & s + 2 \end{bmatrix}}{s^3 + 2s + 1}$$

applicando direttamente l'algoritmo per la realizzazione in forma di *Frobenius* si ottiene:

$$W(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{s^3 + 2s + 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha dimensione  $\tilde{n} = \nu m = 6$  ( $m = 2$ ). Tale sistema risulta però non osservabile e quindi non siamo giunti alla forma minima. Se prendiamo in considerazione il sistema duale, esso avrà matrice delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 1 \\ s + 2 \end{bmatrix}}{s^3 + 2s + 1}$$

quindi, realizziamo il duale nella forma canonica raggiungibile:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

la sua realizzazione è più vantaggiosa in quanto  $A_d$  ha dimensione  $\tilde{n}_d = \nu m_d = \nu p = 3$ , e permette di lavorare con un sistema con meno variabili di stato<sup>5</sup>. Ricaviamo le matrici per il sistema primale trasponendo queste ultime:

$$A = A_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = C_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_d = B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avendo realizzato il sistema duale raggiungibile, il primale risulta osservabile. Per avere una forma minima occorre verificare che tale rappresentazione risulta completamente raggiungibile:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$R$  ha rango pieno e, quindi, la rappresentazione trovata è già in forma minima.

## 4.5 Sintesi di circuiti

Dato il dispositivo in figura 4.6 si vogliono determinare i valori dei componenti affinché per  $u(t) = \bar{u}$  si abbia a regime  $y_\infty = -\bar{u}$  e l'amplificazione della risposta a regime al segnale  $\cos(2t)$  sia  $A = \frac{1}{2}$ . Si indicano con  $U(s)$  e  $Y(s)$  le trasformate di Laplace dell'ingresso  $u(t)$  e dell'uscita  $y(t)$ . L'operazionale è in configurazione invertente, la relazione ingresso uscita risulta quindi:

$$Y(s) = W(s)U(s) = -\frac{z}{R_1}U(s)$$

<sup>5</sup>come verrà mostrato, vengono di per se eliminati nella procedura i sottosistemi non osservabili

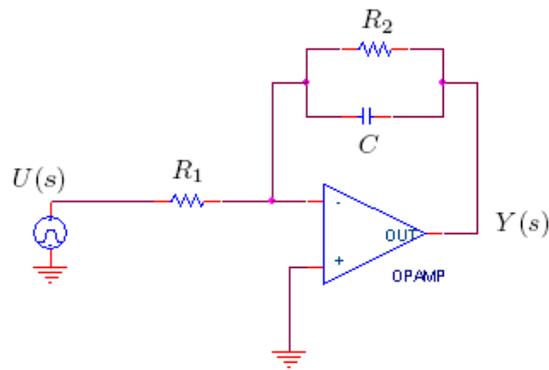


Figura 4.6: circuito con operazionale 1

con  $z = R_2 \setminus \setminus C = \frac{R_2}{1+sR_2C}$ , quindi il dispositivo ha una funzione di trasferimento del primo ordine:

$$Y(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1+sR_2C} U(s)$$

per soddisfare la prima condizione occorre imporre che il guadagno in continua  $\mu$  sia pari a  $-1$ . La funzione di trasferimento é già in forma di Bode, quindi:

$$y_\infty = -\frac{R_2}{R_1} = -\bar{u} \Rightarrow R_2 = R_1 = R$$

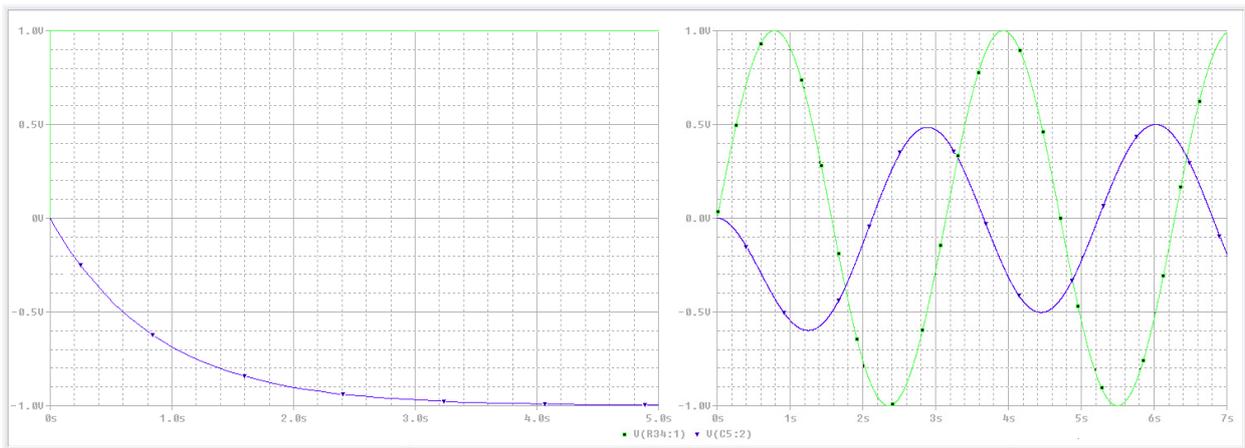


Figura 4.7: risposta a gradino e ad ingresso sinusoidale

Per la seconda condizione si consideri la funzione di trasferimento calcolata per  $s = j\omega$ :

$$W(j\omega) = -\frac{1}{1+j\omega RC}$$

per  $\omega = 2$  occorre imporre che  $|W(j2)| = \frac{1}{2}$ :

$$\left| \frac{1}{1+j2RC} \right| = \frac{1}{2}$$

quindi:

$$|1+j2RC| = 2$$

$$1+4R^2C^2 = 4$$

da cui:

$$C = \sqrt{\frac{3}{4R^2}}$$

Tali proprietà sono state verificate con una simulazione Spice, vedi figura 4.7, scegliendo  $R = 1k\Omega$  e di conseguenza  $C = 0.866mF$ .

## 4.6 Realizzazione tramite operazionali

Consideriamo il problema di realizzare la funzione di trasferimento:

$$W(s) = -\frac{as}{a + Ts}$$

con un amplificatore operazionale, un condensatore e due resistenze, indicando i loro valori in funzione di  $a$  e  $T$ . La configurazione di figura 4.8 può risolvere le specifiche: consiste in un derivatore a cui aggiungere un polo con costante di tempo  $T$ .

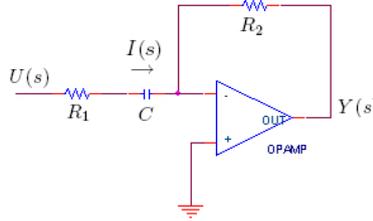


Figura 4.8: circuito con operazionale 2

Le equazioni che descrivono il semplice circuito sono:

$$Y(s) = -R_2 I(s), \quad U(s) = \left( R_1 + \frac{1}{sC} \right) I(s) = \frac{sR_1C + 1}{sC} I(s)$$

$$Y(s) = -\frac{sR_2C}{sR_1C + 1} U(s)$$

e i parametri da settare risultano:

$$\begin{aligned} R_2C &= a \\ R_1C &= T \end{aligned}$$

## 4.7 Realizzazione statica

Una particolarità della teoria della realizzazione minima è che essa può risultare puramente statica, per esempio dato il sistema a tempo continuo:

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Si nota immediatamente che il sistema è completamente non osservabile essendo  $C$  matrice con tutti elementi nulli. Avendo però il sistema una matrice  $D$  non nulla, una realizzazione minima di tale sistema è priva di stato e si traduce semplicemente nel sistema statico:

$$y(t) = Du(t)$$

Un insieme statico ha come insieme di stati il sottospazio nullo.

## 4.8 Sul parallelo e serie di sistemi

Quando si connettono piú sistemi raggiungibili e osservabili può esserci una perdita di raggiungibilità e osservabilità per il sistema complessivo. Per esaminare il fenomeno ci poniamo alcune domande.

- É vero che la connessione in serie di due sistemi  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  e  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  entrambi raggiungibili ed osservabili, é ancora raggiungibile ed osservabile?

La risposta é negativa. Infatti considerando la serie  $u(t) = u_1(t)$ ,  $u_2(t) = y_1(t)$ , e  $y(t) = y_2(t)$ , la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita risulta:

$$Y(s) = W_2(s)U_2(s) = W_2(s)Y_1(s) = W_2(s)W_1(s)U(s)$$

quindi il sistema serie ha funzione di trasferimento:

$$W_{serie}(s) = W_1(s)W_2(s)$$

e non é detto che il sistema serie evolva con l'insieme completo di autovalori  $\{\sigma(A_1)\} \cup \{\sigma(A_2)\}$  perché in tale prodotto possono avvenire cancellazioni zero-polo, indipendentemente dal fatto che le forme di stato  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  siano minime.

- Il parallelo di due sistemi si ottiene fornendo a ciascuno lo stesso ingresso e sommandone le uscite. Si consideri il sistema del primo ordine  $\Sigma_1$  con funzione di trasferimento  $\frac{1}{s+1}$  e il sistema  $\Sigma_2$ :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = [ \gamma \quad 1 ]$$

Si determinino i parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in modo che il parallelo abbia funzione di trasferimento nulla.

Calcoliamo denominatore e numeratore della funzione di trasferimento del secondo sistema dato in forma di stato:

$$\begin{aligned} p_2(s) &= s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha \\ n_2(s) &= \det \begin{bmatrix} s + \alpha & -2 & -1 \\ 0 & s + 2 & -\beta \\ \gamma & 1 & 0 \end{bmatrix} = (s + \alpha)\beta + \gamma(2\beta + s + 2) \end{aligned}$$

La relazione ingresso uscita del parallelo risulta:

$$Y(s) = W_1(s)U(s) + W_2(s)U(s) = (W_1(s) + W_2(s))U(s) = W_{parallelo}(s)U(s)$$

quindi occorre che:

$$\frac{(s + \alpha)\beta + \gamma(2\beta + s + 2)}{s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha} = -\frac{1}{s + 1}$$

e necessariamente il primo sistema deve avere una cancellazione zero-polo. Imponendo che  $p_2(s)$  abbia radice  $-1$  si ricava il valore di  $\alpha$ :

$$1 - (\alpha + 2) + 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

per cui:

$$p_2(s) = (s + 1)(s + 2)$$

ed i vincoli su  $\beta$  e  $\gamma$  si impongono ponendo  $n_2(s) = -(s + 2)$ :

$$s(\beta + \gamma) + \beta + 2\beta\gamma + 2\gamma = -s - 2$$

da cui si ricava una equazione quadratica per  $\gamma$ :

$$2\gamma^2 + \gamma - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

perció si hanno due terne possibili di parametri  $(\alpha, \beta, \gamma)$ :  $(1, 0, -1)$  e  $(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ .

## 4.9 Realizzazione di un PID digitale

Come noto, l'implementazione di regolatori avviene, nella maggior parte dei casi, per via digitale. Questo è sicuramente anche il caso dei PID.

Per sviluppare questo aspetto è necessario ricordare che l'analogo della trasformata di Laplace per i sistemi a tempo continuo:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

per i sistemi a tempo discreto è la trasformata Zeta:

$$x(k) \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

operatore lineare che associa ad una successione una opportuna serie di potenze. Tale associazione è biunivoca per il principio di identità dei polinomi. Analogamente al caso continuo valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} L[\dot{x}(t)] &= sX(s) - x(0) & , & & Z[x(k+1)] &= zX(z) - zx(0) \\ L[e^{at}] &= \frac{1}{s-a} & , & & Z[\lambda^k] &= \frac{z}{z-\lambda} \end{aligned}$$

Applicando la trasformata Zeta alle equazioni di un sistema discreto si ottiene:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) & \xrightarrow{Z} & & X(z) - zx(0) &= AX(z) + BU(z) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) & \xrightarrow{Z} & & Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

e le trasformate dello stato e dell'uscita risultano:

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= C(zI - A)^{-1}zx(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \end{aligned}$$

Quindi, se si studia solamente la parte forzata con  $x(0) = 0$ ,  $W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$  è formalmente uguale al caso continuo ponendo  $s = z$ : il denominatore degli elementi di  $W(z)$  ha per radici gli autovalori del sistema  $\lambda$  che determinano i modi di evoluzione  $\lambda^k$ . Cambiano ovviamente i criteri di stabilità rispetto al caso continuo.

\* \* \* \*

Come applicazione vediamo quindi come è possibile implementare tramite una opportuna equazione alle differenze il seguente PID digitale:

$$W(z) = C_I \frac{z}{z-1} + C_P + C_D \frac{z-1}{z}$$

Si può realizzare come parallelo di tre sistemi discreti, utilizzando le metodologie già illustrate:

1.  $C_I \frac{z}{z-1} = C_I + \frac{C_I}{z-1}$ . Quindi il primo sistema ha matrici in forma canonica di raggiungibilità:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = C_I, \quad D_1 = C_I$$

2. il secondo sistema è statico con  $D_2 = C_P$

3.  $C_D \frac{z-1}{z} = C_D - \frac{C_D}{z}$ , le matrici sono:

$$A_3 = 0, \quad B_3 = 1, \quad C_3 = -C_D, \quad D_3 = C_D$$

quindi il sistema di equazioni alle differenze corrispondente è:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_1 x_1(k) + B_1 u(k) \\ x_3(k+1) &= A_3 x_3(k) + B_3 u(k) \\ y(k) &= y_1(k) + y_2(k) + y_3(k) = C_1 x_1(k) + D_1 u(k) + D_2 u(k) + C_3 x_3(k) + D_3 u(k) \end{aligned}$$

quindi in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = [C_I \quad -C_D] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + [C_I + C_D] u(k)$$

# Capitolo 5

## Robustezza

La robustezza è una prerogativa fondamentale in ogni sistema controllato. I semplici esempi che riportiamo illustrano questo aspetto.

La robustezza è la proprietà di un sistema di mantenere una specifica caratteristica sopportando variazioni parametriche. La prassi tipica per la progettazione di un sistema di controllo è quella di assumere costanti alcuni parametri fisici, ma nella realtà occorre tenere presente che essi possono variare nel tempo (per usura, in funzione della temperatura...). Definiamo allora con:

- $F$  : famiglia di sistemi
- $P$  : proprietà
- $\delta$  : incertezza parametrica con  $|\delta| < \Delta$

La famiglia di sistemi equivale ad un insieme di equazioni differenziali, ciascuna associata ad uno specifico valore di  $\delta$  che, nei problemi successivi, si assumerà parametro incerto ma costante nel tempo<sup>1</sup>. La proprietà  $P$  si dice robusta rispetto ad  $F$  se  $\forall$  elemento di  $F$  è verificata tale proprietà. Seguono alcuni esempi con simulazione numerica.

### 5.1 Stabilità robusta in retroazione

Si consideri il sistema la cui descrizione ingresso-uscita è

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - ps + q} U(s)$$

i cui parametri costanti e incogniti  $p$  e  $q$  sono vincolati come segue  $0 < p^- \leq p \leq p^+$  e  $0 < q^- \leq q \leq q^+$ , dove  $p^-$ ,  $p^+$ ,  $q^-$  e  $q^+$  sono valori assegnati. Si consideri il regolatore:

$$U(s) = -k(Y(s) - R(s))$$

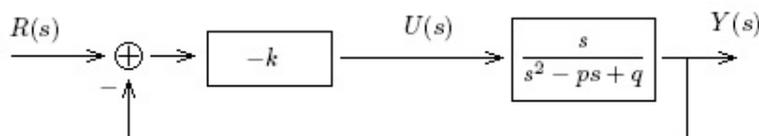


Figura 5.1: schema a blocchi retroazionato

dove  $R(s)$  è il riferimento. Verifichiamo per quali valori di  $k$  il sistema è robustamente stabile.

<sup>1</sup>anche se esistono casi in cui è necessario assumerne la dipendenza dal tempo  $|\delta(t)| < \Delta$ , la cui trattazione è molto complessa. Si veda come esempio la sezione 7.2

Lo schema in retroazione é quello classico che prevede la teoria dei controlli automatici. Con l'introduzione del regolatore in retroazione al sistema  $W(s)$  la relazione ingresso uscita diventa come é noto:

$$Y(s) = \frac{-kW(s)}{1 + (-k)W(s)}R(s)$$

da cui sviluppando i conti:

$$Y(s) = \frac{-ks}{(s^2 - ps + q) + (-ks)}R(s)$$

Al denominatore troviamo il polinomio caratteristico del sistema retroazionato<sup>2</sup>:

$$p(s) = s^2 + s(-p - k) + q$$

in base ai valori assunti dai parametri  $p$  e  $q$  si ottengono chiaramente polinomi diversi. Affinché il polinomio di secondo grado abbia radici a parte reale negativa é sufficiente e necessario che abbia tutti i coefficienti dello stesso segno<sup>3</sup>. Essendo il primo coefficiente sempre unitario e  $q > 0$  é necessario imporre che:

$$-p - k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq -p$$

essendo  $p^+$  il valore maggiore possibile assunto da  $p$ , la stabilitá robusta é garantita prendendo una costante proporzionale:

$$k \leq -p^+$$

Tale proprietá é stata simulata realizzando il sistema retroazionato con la forma di stato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & p+k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [ 0 \quad -k ]$$

discretizzando il sistema con matrici 1.7 calcolate per il passo  $T_c = 0.01sec$ , sottoponendolo ad ingresso a gradino unitario<sup>4</sup> e generando con la funzione `rand` valori di  $p$  e  $q$  compresi tra  $2 < p < 4$  e  $5 < q < 10$  con le seguenti istruzioni che danno due realizzazioni di  $p$  e  $q$  come variabili aleatorie con distribuzione uniforme tra  $[p^- : p^+]$  e  $[q^- : q^+]$ :

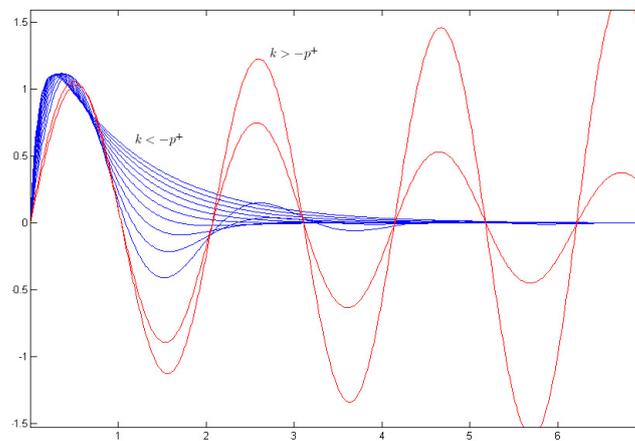


Figura 5.2: simulazione robustezza in retroazione

```
p=0;
while p<=p_min
    p = rand*p_max;
```

<sup>2</sup>l'equazione per  $k$  che assegna al denominatore un polinomio assegnato viene chiamata equazione Diofantea

<sup>3</sup>la condizione é solo necessaria per polinomi di ordine superiore al secondo, in tal caso occorre utilizzare il criterio di Routh-Hurwitz. Vedere sezione 5.5

<sup>4</sup>si ricorda che la stabilitá non dipende dall'ingresso considerato, in generale basta studiare l'evoluzione libera

```

end

q=0;
while q<=q_min
    q = rand*q_max;
end

```

e facendo simulazioni ripetute con diversi valori di  $k$ . Le curve blu sono quelle ottenute per valori di  $k$  che garantiscono sempre la stabilità, quelle rosse per  $k > -p^+$  possono dar luogo ad instabilità nel caso in cui  $k > p$ .

## 5.2 Margine di stabilità robusta

Sia dato il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t)x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (4 + \mu)x_1(t) + x_1^3(t) - 2x_2(t)\end{aligned}$$

dove  $\mu$  è un parametro non noto ma costante nel tempo. Si vuole determinare il margine di stabilità robusta, ovvero l'estremo superiore dei valori  $M$  per cui il sistema è stabile nell'origine per tutti i valori di  $\mu$  tali che

$$|\mu| \leq M$$

I punti di equilibrio di tale sistema devono soddisfare l'equazione vettoriale:

$$0 = \rho(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\begin{aligned}0 &= \bar{x}_1 + \bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_2 \\ 0 &= (4 + \mu)\bar{x}_1 + \bar{x}_1^3 - 2\bar{x}_2\end{aligned}$$

Quindi la soluzione:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soddisfando tali equazioni è un possibile punto di equilibrio. Si procede quindi al calcolo dell'approssimante lineare per piccole variazioni attorno all'origine:

$$A_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}}$$

che nel nostro caso risulta essere:

$$A_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 - x_2(t) & -x_1(t) - 1 \\ 4 + \mu + 3x_1^2 & -2 \end{bmatrix}_{x_1(t)=0, x_2(t)=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 + \mu & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice della dinamica ottenuta è costante grazie all'ipotesi di avere assunto  $\mu$  costante, altrimenti avremmo ottenuto un sistema tempo variante. Detto questo, è possibile analizzare la stabilità ricorrendo allo studio del polinomio caratteristico, che è facile ricavare:

$$p(s) = \det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s - 1 & 1 \\ -4 - \mu & s + 2 \end{bmatrix} = s^2 + s + (\mu + 2)$$

anche in questo caso possiamo applicare il criterio visto per il sistema precedente in quanto il polinomio è di secondo grado. Per la stabilità asintotica è necessario e sufficiente che:

$$\mu + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu > -2$$

ed il margine di stabilità robusta é allora:

$$|\mu| > M = 2$$

anche in questo caso si é simulato il sistema discretizzandolo in forma 1.7 e calcolando la matrice del sistema a tempi campionati in funzione di  $\mu$  corrispondente a  $T_c = 0.01sec$  e assegnando a  $\mu$  valori random.

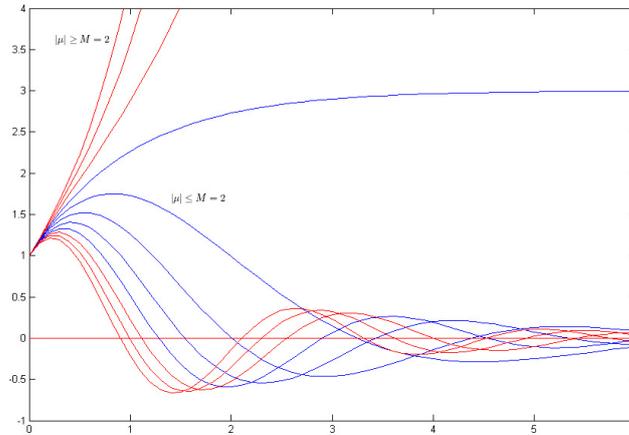


Figura 5.3: simulazione di robustezza sotto variazione parametrica

### 5.3 Robustezza del sistema linearizzato

Si consideri il sistema non lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2\sin(x_1(t)) + px_1(t) - q(x_2(t) + x_1(t))\end{aligned}$$

avente  $\bar{x} = [0, 0]^T$  quale punto di equilibrio, dove  $p$  e  $q$  sono parametri incerti costanti tali che  $|q| \leq 1/2$  e  $|p| \leq 1/2$ . Si vuole verificare la stabilità robusta nell'origine di tale sistema.

Linearizziamo il sistema nell'origine:

$$A_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & 1 + x_1 \\ -2\cos(x_1) + p - q & -q \end{bmatrix}_{\bar{x}_1=\bar{x}_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 + p - q & -q \end{bmatrix}$$

studiamo anche il questo caso il polinomio caratteristico:

$$p(s) = \det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s + 1 & -1 \\ 2 - p + q & s + q \end{bmatrix} = s^2 + s(1 + q) + (2 + q - p)$$

imponendo che i coefficienti siano maggiori *strettamente* di zero, perché la presenza di autovalori nulli pregiudica le conclusioni sulla stabilità per il sistema non lineare, si ricavano i vincoli per  $p$  e  $q$ :

$$\begin{aligned}q &> -1 \\ p &< 2 + q \Rightarrow p < 1\end{aligned}$$

dove la seconda equazione é stata valutata per  $q = -1$ , cioè il valore piú piccolo consentito per  $q$ . Dati gli intervalli di appartenenza di  $q$  e  $p$ , entrambe le equazioni sono sempre soddisfatte ed il sistema é robustamente stabile.

## 5.4 Osservatore Robusto

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

con  $\mu$  parametro costante  $1 \leq \mu \leq 2$ , e  $u$  ingresso noto. Si vuole determinare un osservatore dello stato tale che l'errore di stima  $e(t)$  converga a zero per qualsiasi  $\mu$ , e l'insieme di tutte le matrici  $L$  per cui tale condizione é garantita.

Gli autovalori della matrice  $A$ , in forma triangolare superiore, sono gli elementi della diagonale:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \mu$ . Per poter avere convergenza asintotica dell'errore é necessario allocarli a parte reale negativa, e quindi entrambi gli autovalori devono appartenere al sottosistema osservabile<sup>5</sup>. Verificando con *Popov*:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}_{\lambda=0} = \text{rank} \begin{bmatrix} -\mu & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}_{\lambda=\mu} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Il problema é ben posto e solubile. Essendo  $u$  noto, si sintetizza l'osservatore come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_o(t) &= [A - LC]x_o(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \dot{e}(t) &= [A - LC]e(t) \end{aligned}$$

Essendo  $C$  ad un solo elemento diverso da zero, si procede come già visto, calcolando il determinante direttamente il polinomio caratteristico della dinamica dell'errore:

$$\begin{aligned} \det(sI - [A - LC]) &= \det \left( \begin{bmatrix} s - \mu & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} s - \mu - l_{11} & -1 \\ l_{21} & s \end{bmatrix} = \\ &= s^2 + s(l_{11} - \mu) + l_{21} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, dovendo assegnare un polinomio stabile di secondo grado, occorre che tutti i coefficienti siano positivi. Quindi l'insieme delle  $L$  che soddisfano tale richiesta sono:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{11} > \mu \\ l_{21} > 0 \end{matrix}$$

La maggiorazione stretta in questo caso é dovuto al fatto di non voler accettare autovalori marginalmente stabili. La condizione su  $l_{11}$ , data l'incertezza su  $\mu$ , si risolve come:

$$l_{11} > 2$$

## 5.5 Criterio di Routh-Hurwitz per polinomi di grado maggiore al secondo

*Esiste un criterio molto interessante per stabilire il segno della parte reale delle radici di un polinomio di grado  $n$ . Si consideri il seguente polinomio:*

$$p(s) = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0$$

<sup>5</sup>quindi il sistema deve essere completamente osservabile

Condizione necessaria affinché  $p(s)$  abbia radici a parte reale negativa é che i coefficienti siano dello stesso segno<sup>6</sup>. Per ottenere una condizione sufficiente occorre calcolare la tabella seguente:

$$\begin{array}{cccc} p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \dots \end{array}$$

Quindi occorre aggiungere righe secondo la seguente regola: ad ogni iterazione si considerano le ultime due righe, i cui elementi siano  $x_i$  e  $y_i$ . Si genera una nuova riga con questo metodo:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{y_1} & \frac{y_1 x_3 - x_1 y_3}{y_1} & \frac{y_1 x_4 - x_1 y_4}{y_1} & \frac{y_1 x_5 - x_1 y_5}{y_1} & \dots \end{array}$$

La generazione delle righe procede fintanto che non si generano tutti elementi nulli, e l'algoritmo procede fintanto che non si generano al piú  $n+1$  righe. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $p(s)$  abbia radici a parte reale negativa é che tutti i coefficienti relativi alla prima colonna siano dello stesso segno. Se ciò non accade il numero di variazioni di segno corrisponde al numero di radici a parte reale positiva. Nel caso in cui la costruzione della tabella si blocchi prima di giungere a  $n+1$  righe perché un elemento della prima colonna si annulla, si può escludere la stabilità asintotica.

\* \* \* \*

Risolviamo ora due semplici problemi di robustezza utilizzando il criterio menzionato.

- Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + \delta & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

si possono determinare i valori di  $\delta$  per cui il sistema é robustamente stabile con il criterio di Routh.

Essendo la matrice  $A$  in forma di Frobenius, é immediato ricavarne il polinomio caratteristico:

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 3s^2 - 1 - \delta$$

Si costrisce allora la tabella di Routh:

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & -1 - \delta \\ \frac{10 + \delta}{3} & 0 \\ -1 - \delta & \end{array}$$

che impone le condizioni su  $\delta$ :

$$\begin{array}{l} 10 + \delta > 0 \\ -1 - \delta > 0 \end{array}$$

quindi per  $-10 < \delta < -1$  il polinomio ammette radici stabili.

- Un sistema lineare invariante ha il seguente polinomio caratteristico:

$$p(s) = s^3 + s^2 + bs + c$$

dove  $b$  e  $c$  sono parametri costanti e incerti tali che  $b^- \leq b \leq b^+$  e  $c^- \leq c \leq c^+$ . Determinare sotto quali condizioni su  $b^-$ ,  $b^+$ ,  $c^-$ ,  $c^+$  tale sistema é robustamente stabile.

---

<sup>6</sup>tale condizione come già visto é anche sufficiente per i polinomi di secondo grado

Si costruisce la tabella di Routh:

$$\begin{array}{cc} 1 & b \\ 1 & c \\ b-c & 0 \\ c & \end{array}$$

quindi, per la stabilità robusta, occorre che:

$$\begin{array}{l} b > c \Rightarrow b^- > c^+ \\ c > 0 \Rightarrow c^- > 0 \end{array}$$

Si é riportato in appendice 6 il programma per il calcolo della tabella, utile per polinomi di grado elevato.

## Capitolo 6

# Sistemi oscillanti

Una particolare categoria di sistemi lineari sono quelli caratterizzati dall'aver tutti gli elementi dello spettro della matrice della dinamica  $A$  complessi coniugati puramente immaginari, e ciò equivale a dire che l'evoluzione dello stato in evoluzione libera presenta oscillazione permanenti senza smorzamenti. Per tali sistemi è possibile una trattazione a parte, che viene qui introdotta e ripresa nei problemi successivi, la quale permette di studiare tali sistemi senza ricorrere alla forma di stato classica. Si può sempre ricondurre un sistema oscillante nella forma matriciale seguente con matrici  $M$  e  $K$  simmetriche:

$$M\ddot{q}(t) = -Kq(t) + Hu(t) \quad (6.1)$$

dove  $M$   $m \times m$  è definita positiva<sup>1</sup>,  $K$  semidefinita o definita positiva. Per esempio, per un sistema meccanico  $q(t)$  è un vettore di posizioni,  $M$  è la matrice delle masse,  $K$  la matrice che descrive gli accoppiamenti elastici. Grazie alle proprietà di  $M$  e  $K$  possiamo scrivere:

$$\ddot{q}(t) = -M^{-1}Kq(t) + M^{-1}Hu(t) = -Rq(t) + Fu(t)$$

con  $R = M^{-1}K$  semidefinita o definita positiva. In particolare  $R$  ha autovalori reali che chiameremo  $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_m^2$ . Analizziamo l'evoluzione libera del sistema:

$$\ddot{q}(t) + Rq(t) = 0$$

e per questo sistema di secondo grado tentiamo una soluzione del tipo:

$$q(t) = \bar{t} \cos(\omega t)$$

sostituendo otteniamo:

$$-\omega^2 \bar{t} \cos(\omega t) + R\bar{t} \cos(\omega t) = 0$$

dovendo valere tale relazione  $\forall t$ , possiamo elidere la funzione  $\cos(\omega t)$  ed ottenere l'equazione:

$$R\bar{t} = \omega^2 \bar{t}$$

e ciò significa che la soluzione tentata è valida solo se  $\bar{t}$  è autovettore destro di  $R$  associato all'autovalore  $\omega$ . La stessa conclusione si ottiene tentando la soluzione:

$$q(t) = \bar{t} \sin(\omega t)$$

Quindi, l'evoluzione libera generale risulta scritta nella forma:

$$q(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{t}_i \cos(\omega_i t) + \sum_{i=1}^m \beta_i \bar{t}_i \sin(\omega_i t) \quad (6.2)$$

dove  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  sono opportune costanti che soddisfano le condizioni iniziali. Per ricavare il vettore delle velocità  $\dot{q}(t)$  basta derivare la soluzione così ottenuta.

<sup>1</sup>una matrice è definita positiva se ha autovalori  $> 0$ , semidefinita positiva se ha autovalori non negativi. Inoltre se  $M$  def positiva  $\Rightarrow -M$  definita negativa

Si capisce che tale forma per studiare l'evoluzione libera é piú semplice da trattare di quella che prevederebbe la soluzione generale del sistema in forma di stato  $n \times n$  con  $n = 2m$ . Tale sistema di  $n$  equazioni di primo grado si può ottenere chiamando i vettori  $x_1 = q(t)$  e  $x_2(t) = \dot{q}(t)$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} u(t)$$

in cui  $A$   $n \times n$  in forma di matrice partizionata ha autovalori  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_1$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm j\omega_2$ ,  $\dots, \lambda_{n-1,n} = \pm j\omega_m$ . La soluzione libera si può esprimere nella forma:

$$x(t) = e^{At}x(0) = \sum_{i=1}^n \bar{t}_i \bar{s}_i^T e^{\lambda_i t} x(0)$$

con  $\bar{t}$  autovettore di  $A$  associato a  $\lambda_i$ . Questa equazione permette di ricavare subito le soluzioni corrispondenti a  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$ , ma occorre risolvere un sistema di dimensione doppia del precedente e tenere presente che autovalori ed autovettori sono complessi. Infatti, la soluzione é:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1,3,5,\dots}^n \left[ \bar{t}_i \bar{s}_i^T e^{\lambda_i t} + \bar{t}_i^* \bar{s}_i^{*T} e^{\lambda_i^* t} \right] x(0) = \\ &= \sum_{i=1,3,5,\dots}^n \left[ \bar{t}_i \bar{s}_i^T (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) + \bar{t}_i^* \bar{s}_i^{*T} (\cos(\omega_i t) - j \sin(\omega_i t)) \right] x(0) = \\ &= \sum_{i=1,3,5,\dots}^n \left[ 2\Re(\bar{t}_i \bar{s}_i^T) \cos(\omega_i t) \right] x(0) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^n \gamma_i \Re[\bar{t}_i] \cos(\omega_i t) \end{aligned}$$

con  $\gamma_i$  costanti reali e funzioni delle condizioni iniziali.

Infine, merita commentare il fatto che i sistemi fisici oscillanti presentano sempre un fattore dissipativo, che si traduce con una parte reale negativa degli autovalori del sistema. In tal caso la dinamica sarà caratterizzata da autovalori del tipo:

$$\lambda = -\epsilon \pm j\omega$$

con  $\epsilon$  trascurabile nella nostra trattazione.

## 6.1 Coseno di matrice e applicazione ai sistemi oscillanti

Preso una matrice  $N$   $m \times m$  simmetrica e definita positiva, si ha che:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(Nt) = -N^2 \cos(Nt) \quad (6.3)$$

vediamo quali implicazioni ha tale uguaglianza nella soluzione del sistema:

$$\ddot{q}(t) = -N^2 q(t)$$

dove  $q(t) \in \mathfrak{R}^n$  con condizioni iniziali  $q(0) = q_0$  e  $\dot{q}(0) = 0$ . Si supponga  $N$  simmetrica e definita positiva.

Verifichiamo innanzi tutto l'identità 6.3. La funzione  $\cos(\cdot)$  é analitica e per questo ammette uno sviluppo in serie: ogni funzione analitica può essere estesa a funzione di matrice tramite tale sviluppo in cui compaiono le potenze della matrice  $N$ :

$$\cos(Nt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^{2k} (-1)^k}{2k!} t^{2k}$$

che ha dominio di convergenza per  $t \in \mathfrak{R}$ . La derivata di una funzione analitica può essere calcolata derivando termine a termine:

$$\frac{d}{dt} \cos(Nt) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^{2k} (-1)^k}{2k!} 2kt^{2k-1}$$

se si deriva ulteriormente:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(Nt) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^{2k} (-1)^k}{2k!} 2k(2k-1) t^{2k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^{2k} (-1)^k}{(2k-2)!} t^{2k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} -N^2 \frac{N^{2k-2} (-1)^{k-1}}{(2k-2)!} t^{2k-2}$$

sostituendo  $h = k - 1$  si ottiene:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(Nt) = -N^2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^{2h} (-1)^h}{2h!} t^{2h} = -N^2 \cos(Nt)$$

Supponendo  $N$   $m \times m$  *simmetrica*, essa ammette sempre una base di  $m$  autovettori ortogonali ed é quindi *sempre diagonalizzabile*. In tal caso possiamo procedere in un altro modo per ricavare la stessa relazione: data una funzione analitica  $f(s)$ ,  $s$  variabile complessa,  $N$  é diagonalizzabile e  $f(N)$  é definita come  $Tf(\Lambda)S$  dove  $T$  é la matrice degli autovettori destri,  $S$  la sua inversa e  $f(\Lambda) = \text{diag}[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_m)]^2$ . Allora:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos[Tf(\Lambda)S] = T(-\Lambda^2) \cos(\Lambda t)S = -T\Lambda^2ST \cos(\Lambda t)S = -N^2 \cos(Nt)$$

Il sistema fornito dal testo é del tipo:

$$\ddot{q}(t) = -Rq(t)$$

con  $R = N^2$ . Se  $N$  é *definita positiva*  $\Rightarrow R = N^2$  é definita positiva<sup>3</sup> e quindi il sistema rientra nella categoria dei sistemi oscillanti. Invece di decomporre il sistema in una forma di stato e ricavare la soluzione dell'evoluzione libera sviluppando l'esponenziale della matrice  $A$   $n \times n$  con  $n = 2m$ , tentiamo la soluzione con:

$$q(t) = \cos(Nt)q_0$$

sostituendo tale espressione si verifica facilmente che é soluzione:

$$-N^2 \cos(Nt)q_0 = -N^2(\cos(Nt)q_0)$$

ed inoltre rispetta le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} q(0) &= \cos(N0)q_0 = q_0 \\ \dot{q}(0) &= -N \sin(N0)q_0 = 0 \end{aligned}$$

## 6.2 Sistema meccanico di oscillatori accoppiati

Si consideri il sistema meccanico descritto in figura 6.1:

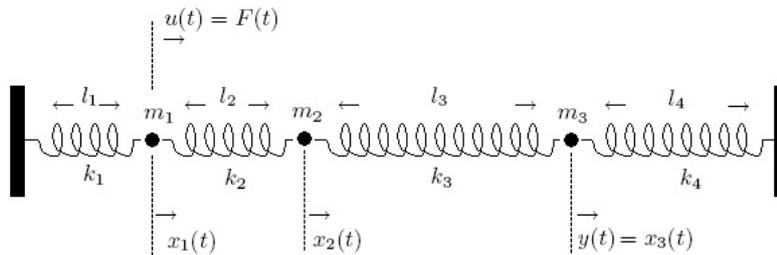


Figura 6.1: sistema oscillante formato da 4 molle accoppiate

dove  $m_1 = 1$  kg,  $m_2 = 2$  kg,  $m_3 = 1$  kg sono masse concentrate,  $k_1 = 1$  N/m,  $k_2 = 2$  N/m,

<sup>2</sup>su  $\Lambda$  le serie vengono applicate elemento per elemento sulla diagonale

<sup>3</sup>se  $N$  inoltre é simmetrica  $N = \Theta\Lambda\Theta^T$ , con  $\Theta$  base ortonormale. Anche  $N^2 = \Theta\Lambda\Theta^T\Theta\Lambda\Theta^T = \Theta\Lambda^2\Theta^T$  risulta simmetrica

$k_3 = 8 N/m$ ,  $k_4 = 4 N/m$  le costanti elastiche delle molle (prive di massa) e  $l_1, l_2, l_3, l_4$  le lunghezze di riposo delle molle. Sulla massa  $m_1$  é applicata una forza di ingresso, mentre la variabile di uscita é la posizione di  $m_3$ . Ricaviamo una rappresentazione di stato del sistema, indicando i poli e gli zeri della funzione di trasferimento, inoltre ne calcoliamo la risposta impulsiva e caratterizziamo la risposta libera.

Applicando il bilancio delle forze alle tre masse, ricaviamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -k_1 x_1(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) + u(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -k_2(x_2(t) - x_1(t)) + k_3(x_3(t) - x_2(t)) \\ m_3 \ddot{x}_3(t) &= -k_3(x_3(t) - x_2(t)) - k_4 x_3 \end{aligned}$$

con rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 - k_2 & k_2 & 0 \\ k_2 & -k_2 - k_3 & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 - k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

che é nella forma 6.1: riconosciamo  $M$  matrice delle masse simmetrica e definita positiva e  $K$  matrice degli accoppiamenti elastici definita positiva<sup>4</sup>. La rappresentazione di stato é un sistema  $6 \times 6$ . Chiamando  $\tilde{x}_1 = x_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2$ ,  $\tilde{x}_3 = x_3$ ,  $\tilde{x}_4 = \dot{x}_1$ ,  $\tilde{x}_5 = \dot{x}_2$  e  $\tilde{x}_6 = \dot{x}_3$  risulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_3(t) \\ \dot{\tilde{x}}_4(t) \\ \dot{\tilde{x}}_5(t) \\ \dot{\tilde{x}}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2 - k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{-k_3 - k_4}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \\ \tilde{x}_5(t) \\ \tilde{x}_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \\ \tilde{x}_5(t) \\ \tilde{x}_6(t) \end{bmatrix}$$

per calcolare i modi del sistema conviene calcolare gli autovalori della matrice  $R = M^{-1}K$ :

$$R = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2 + k_3}{m_2} & -\frac{k_3}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_3}{m_3} & \frac{k_3 + k_4}{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - R) = s^3 - 20s^2 + 101s - 132$$

utilizzando il comando `roots([. .])` possiamo calcolare le radici del polinomio caratteristico:

```
roots([1 -20 101 -132])
ans =

    2.0622 omega_1^2
    4.9151 omega_2^2
    13.0226 omega_3^2
```

e quindi, chiamate le pulsazioni  $\omega_1 = \sqrt{2.0622}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{4.9151}$  e  $\omega_3 = \sqrt{13.0226}$ , il sistema  $6 \times 6$  complessivo evolverá con autovalori  $\pm j\omega_1$ ,  $\pm j\omega_2$ ,  $\pm j\omega_3$  e avrá polinomio caratteristico corrispondente:

$$p(s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_3^2)$$

<sup>4</sup>e in questo caso simmetrica

Ora, per calcolare gli zeri della funzione di trasferimento essendo il sistema *SISO* si può effettuare il calcolo:

$$n(s) = \det \left[ \begin{array}{c|ccc|ccc} sI - A & -B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \det \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} s & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & s & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = 2$$

che risulta facile da calcolare sviluppando i determinanti su righe e colonne con un solo elemento diverso da zero. La trasformata della risposta impulsiva é dunque:

$$F(s) = \frac{2}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_3^2)} = \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + \omega_1^2)} + \frac{\gamma s + \delta}{(s^2 + \omega_2^2)} + \frac{\eta s + \xi}{(s^2 + \omega_3^2)}$$

e le costanti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi$  si possono ricavare con il metodo del sistema uguagliando il polinomio al numeratore<sup>5</sup>:

$$s^5(\alpha + \gamma + \eta) + s^4(\beta + \delta + \xi) + s^3[\alpha(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \gamma(\omega_1^2 + \omega_3^2) + \eta(\omega_1^2 + \omega_2^2)] + s^2[\beta(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \delta(\omega_1^2 + \omega_3^2) + \xi(\omega_1^2 + \omega_2^2)] + s(\alpha\omega_2^2\omega_3^2 + \gamma\omega_1^2\omega_3^2 + \eta\omega_1^2\omega_2^2) + \beta\omega_2^2\omega_3^2 + \delta\omega_1^2\omega_3^2 + \xi\omega_1^2\omega_2^2 = 2$$

occorre cioè risolvere questo sistema lineare per determinare i coefficienti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \omega_2^2 + \omega_3^2 & 0 & \omega_1^2 + \omega_3^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 + \omega_3^2 & 0 & 0 & \omega_1^2 + \omega_2^2 & \omega_1^2 + \omega_3^2 \\ \omega_2^2\omega_3^2 & 0 & \omega_1^2\omega_3^2 & \omega_1^2\omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2\omega_3^2 & 0 & 0 & \omega_1^2\omega_2^2 & \omega_1^2\omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \eta \\ \xi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Invertendolo ricaviamo le seguenti espressioni dei coefficienti:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{2}{\omega_2^2\omega_3^2 - \omega_1^2\omega_3^2 - \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^4} \\ \gamma &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \xi &= \frac{2}{-\omega_2^2\omega_3^2 + \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_3^4 - \omega_1^2\omega_3^2} \\ \delta &= \frac{-2}{-\omega_2^4 + \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 - \omega_1^2\omega_3^2} \end{aligned}$$

lasciando indicate le costanti per semplicitá, antitrasformiamo la risposta impulsiva:

$$F(s) = \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(s^2 + \omega_1^2)} + \frac{\delta}{\omega_2} \frac{\omega_2}{(s^2 + \omega_2^2)} + \frac{\xi}{\omega_3} \frac{\omega_3}{(s^2 + \omega_3^2)} \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = \frac{\beta}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \frac{\delta}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) + \frac{\xi}{\omega_3} \sin(\omega_3 t)$$

Per finire, la risposta libera di tale sistema sará una opportuna combinazione lineare dei modi  $\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t), \cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t), \cos(\omega_3 t), \sin(\omega_3 t)$ . Si é simulato il sistema discretizzando nella forma 1.7 con passo  $T_c = 0.01 \text{ sec}$  in risposta libera con condizioni iniziali  $\tilde{x}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , che corrisponde fisicamente a spostare la massa  $m_1$  rispetto al punto di equilibrio e quindi lasciarla libera. In blu si ha l'evoluzione di  $x_1(t)$ , in verde quella di  $x_2(t)$  e in rosso quella dell'uscita  $x_3(t)$ . Per opportune condizioni iniziali, tutte le grandezze del sistema

<sup>5</sup>oppure con il metodo dei residui, i metodi sono equivalenti

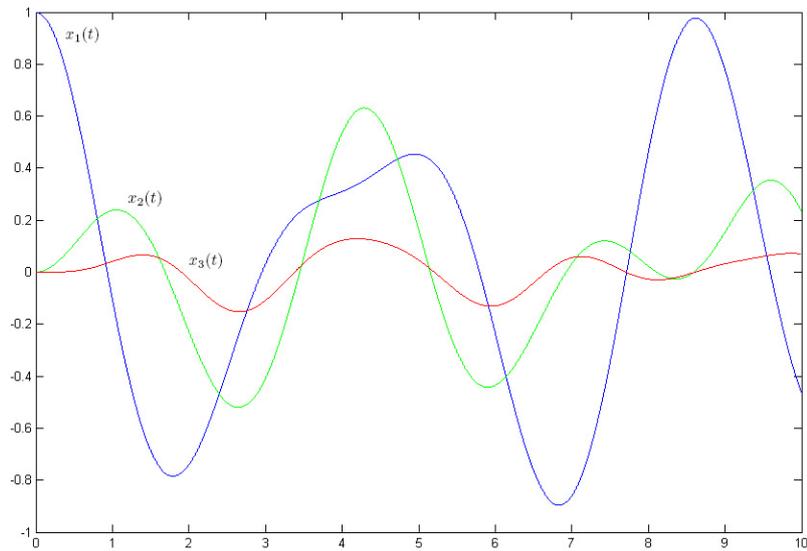


Figura 6.2: simulazione del sistema oscillante formato da 4 molle accoppiate

oscillano con la stessa frequenza (si dice che il sistema si trova in un *modo normale* di oscillazione): osservando, infatti, l'evoluzione libera scritta in forma 6.2, inizializziamo il sistema modificando le posizioni delle masse rispetto alla posizione di equilibrio:

$$\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} \alpha \bar{t}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove scegliamo  $\bar{t}_1$  autovettore destro di  $R$  associato all'autovalore  $\omega_1^2 = 2.0622 \text{ rad/sec}$ . La soluzione in tal caso sar :

$$q(t) = \alpha \bar{t}_1 \cos(\sqrt{2.0622}t)$$

per ricavare  $\bar{t}_1$  utilizziamo gli opportuni comandi Matlab:

```
R=[3 -2 0 ; -1 5 -4 ; 0 -2 12];
```

```
[T,V]=eig(R)
```

```
T =
```

```

-0.9021    0.7089    0.0905
-0.4230   -0.6788   -0.4534
-0.0851   -0.1916    0.8867
```

```
V =
```

```

2.0622    0    0
0    4.9151    0
0    0    13.0226
```

```
T(1:3,1)
```

```
ans =
```

```

-0.9021
-0.4230
-0.0851
```

scegliendo  $\alpha = -1$  e risimulando il sistema, otteniamo l'evoluzione prevista:

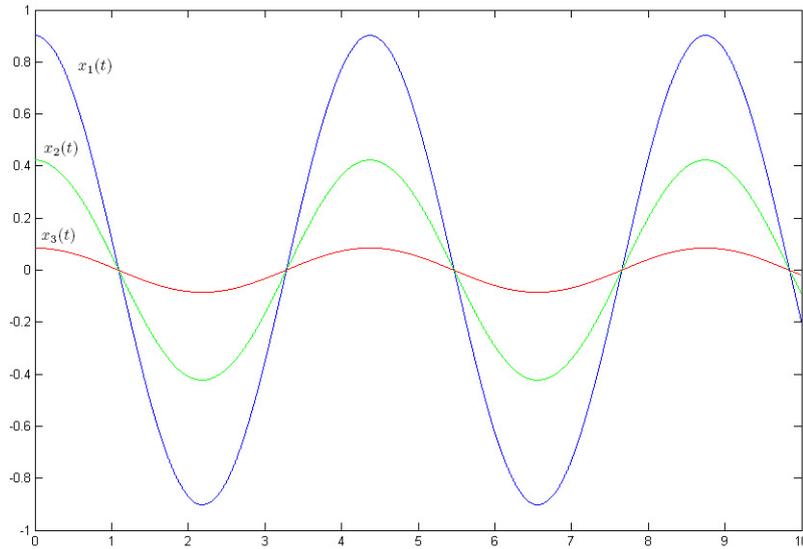


Figura 6.3: evoluzione libera in modo normale di oscillazione

Se, invece, le condizioni iniziali fossero state:

$$\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \bar{t}_1 \end{bmatrix}$$

la soluzione, per rispettare le condizioni iniziali sulla velocità  $\dot{\tilde{x}}_{345}(0) \neq 0$  rispettivamente di  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , é nella forma:

$$q(t) = \beta \bar{t}_1 \sin(\sqrt{2.0622}t)$$

Se sia  $\tilde{x}_{123}(0) \neq 0$  che  $\tilde{x}_{456}(0) \neq 0$ , la soluzione, per soddisfare posizioni e velocità iniziali, deve necessariamente contenere termini  $\sin(\cdot)$  e  $\cos(\cdot)$ .

### 6.3 Determinazione dei parametri

É possibile usare il procedimento inverso rispetto a quello illustrato, ovvero risalire ai parametri dati i modi.

- Il sistema oscillante:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t) &= -3pq_1(t) + pq_2(t) \\ \ddot{q}_2(t) &= +pq_1(t) - 3pq_2(t) \end{aligned}$$

ammette la frequenza normale  $\omega = \sqrt{2}$ , ovvero fra i suoi modi ci sono  $\cos(\sqrt{2}t)$  e  $\sin(\sqrt{2}t)$ . Vogliamo determinare i possibili valori del parametro  $p$ .

Il sistema ammette rappresentazione matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3p & p \\ p & -3p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Nella forma  $\ddot{q}(t) = -Rq(t)$ . Se il sistema ammette gli autovalori  $\pm j\omega$  con  $\omega = \sqrt{2}$ , occorre semplicemente imporre che  $R$  abbia un autovalore  $\lambda = 2$  e ricavare i vincoli su  $p$ :

$$R = \begin{bmatrix} 3p & -p \\ -p & 3p \end{bmatrix}$$

$$p(s) = s^2 + s(-6p) + (8p^2)$$

imponendo che il polinomio si annulli per  $s = 2$ , otteniamo:

$$8p^2 - 12p + 4 = 0 \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = \frac{1}{2}$$

e, per entrambi i valori trovati di  $p$ ,  $R$  risulta é definita positiva.

- Consideriamo ora un problema simile con il sistema  $\ddot{\Theta}(t) = -\omega^2\Theta(t)$ , sapendo che  $\Theta(0) = 0$ ,  $\Theta(1) = 2$ ,  $\Theta(2) = 0$ ,  $\Theta(3) = -2$ . Determiniamo un possibile valore di  $\omega > 0$  e un possibile valore di  $\dot{\Theta}(0)$ , spiegando che i valori determinati non sono unici.

l'equazione differenziale é quella di un oscillatore armonico e la sua soluzione puó essere espressa come:

$$\theta(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t} = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti. Deriviamo l'equazione due volte:

$$\dot{\theta}(t) = -a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t) - b\omega^2 \sin(\omega t)$$

imponendo le condizioni su  $\theta(t)$  si ottengono le quattro equazioni:

$$\ddot{\theta}(0) = 0 = -a\omega^2$$

$$\ddot{\theta}(1) = -2\omega^2 = -a\omega^2 \cos(\omega) - b\omega^2 \sin(\omega)$$

$$\ddot{\theta}(2) = 0 = -a\omega^2 \cos(2\omega) - b\omega^2 \sin(2\omega)$$

$$\ddot{\theta}(3) = 2\omega^2 = -a\omega^2 \cos(3\omega) - b\omega^2 \sin(3\omega)$$

dalla prima, siccome  $\omega \neq 0$  segue:

$$a = 0$$

quindi la terza:

$$0 = -b\omega^2 \sin(2\omega)$$

ammette soluzione non banale (cioé  $b \neq 0$ ) in generale per:

$$\omega = \frac{k\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Fissiamo  $k = 1$  e scegliamo quindi  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Per determinare  $b$  usiamo la seconda equazione che fornisce:

$$-2 = -b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

quindi  $b = 2$ . Si puó verificare la coerenza del risultato sostituendo  $\omega$ ,  $a$  e  $b$  nella quarta equazione.

Calcoliamo, infine,  $\dot{\theta}(0)$ :

$$\dot{\theta}(0) = b\omega \cos(\omega 0) = b\omega = \pi$$

Si noti che i valori non sono unici, infatti valutando piú attentamente la terza equazione, essa ammette  $b \neq 0$  per  $k$  dispari, scegliendo  $k = 3$ :

$$-2 = -b \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

che determina  $b = -2$  e  $\dot{\theta}(0) = -3\pi$ :

$k$	$\omega = \frac{k\pi}{2}$	$b = \frac{2}{\sin(\omega)}$	$\dot{\theta}(0) = b\omega$
1	$\frac{\pi}{2}$	2	$\pi$
3	$\frac{3\pi}{2}$	-2	$-3\pi$
5	$\frac{5\pi}{2}$	2	$5\pi$
7	$\frac{7\pi}{2}$	-2	$-7\pi$
...	...		...

e anche in questo caso i valori trovati sono coerenti e soddisfano la quarta equazione. Le varie soluzioni sono indicate in figura 6.4.

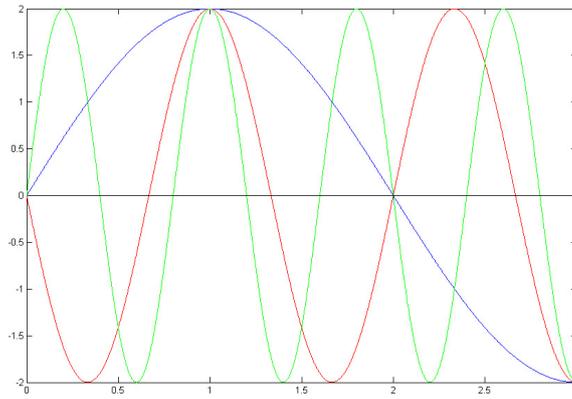


Figura 6.4: le prime tre soluzioni non banali dell'oscillatore armonico considerato

## 6.4 Controllo attivo di vibrazioni

Si consideri il sistema:

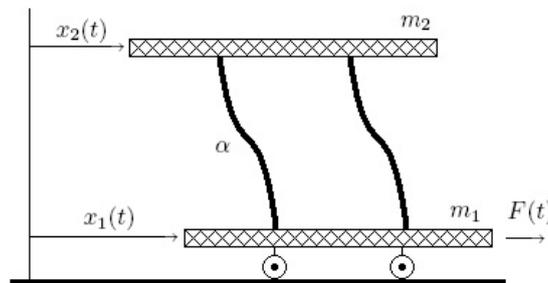


Figura 6.5: carrello con giunto elastico

dove innanzi tutto si sono trascurati gli attriti,  $\alpha$  é la costante elastica dei giunti che collegano i due piani nell'ipotesi semplificativa che essi per piccoli spostamenti reciproci traslino e non si "imbarchino". Si vuole ricavare una rappresentazione e disponendo di una retroazione dello stato per il controllo di  $F(t)$  stabilizzare il sistema nell'origine.

Applicando il bilancio delle forze ai due piani si ottiene:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= F(t) - \alpha(x_1(t) - x_2(t)) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -\alpha(x_2(t) - x_1(t)) \end{aligned}$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

chiamate  $\beta_1 = \frac{\alpha}{m_1}$ ,  $\beta_2 = \frac{\alpha}{m_2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{m_1}$  si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

anche in questo caso studiamo gli autovalori di  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} \beta_1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

che sono le radici del polinomio:

$$s^2 + s(-\beta_1 - \beta_2) = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \omega_2^2 = 0$$

ed il sistema complessivo evolve con gli autovalori  $\lambda_{12} = \pm j\sqrt{\beta_1 + \beta_2}$  oscillanti e  $\lambda_{34} = 0$  a cui sono associati i modi 1 e  $t$  dovuti al moto rigido del carrello<sup>6</sup>. Per retroazionare opportunamente lo stato riportiamo il sistema in forma di stato con  $\tilde{x}_1 = x_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2$ ,  $\tilde{x}_3 = \dot{x}_1$ ,  $\tilde{x}_4 = \dot{x}_2$  e  $u(t) = F(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_3(t) \\ \dot{\tilde{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & -\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Si può verificare che il sistema è completamente raggiungibile. Inoltre, essendo  $B$  una sola colonna e con un solo elemento diverso da zero procediamo come già descritto studiando il polinomio  $\det(sI - [A + BK])$ :

$$\begin{aligned} [A + BK] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma k_1 - \beta_1 & \gamma k_2 + \beta_1 & \gamma k_3 & \gamma k_4 \\ \beta_2 & -\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \det(sI - [A + BK]) &= \det \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ -\gamma k_1 + \beta_1 & -\gamma k_2 - \beta_1 & s - \gamma k_3 & -\gamma k_4 \\ -\beta_2 & +\beta_2 & 0 & s \end{bmatrix} = \\ &= s^4 + s^3(-\gamma k_3) + s^2(\beta_1 + \beta_2 - \gamma k_1) + s(-\gamma\beta_2 k_3 - \gamma\beta_2 k_4) - \gamma\beta_2 k_1 + (-\gamma\beta_2 k_2) \end{aligned}$$

assegnamo in retroazione il polinomio caratteristico stabile:

$$p(s) = (s + 1)(s + 2)(s^2 + 2s + 2) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4$$

per cui possiamo ricavare i valori di  $K$ :

$$\begin{aligned} k_3 &= -\frac{5}{\gamma} \\ k_1 &= \frac{\beta_1 + \beta_2 - 10}{\gamma} \\ k_4 &= \frac{5\beta_2 - 10}{\gamma\beta_2} \\ k_2 &= \frac{10\beta_2 - \beta_1\beta_2 - \beta_2^2 - 4}{\gamma\beta_2} \end{aligned}$$

Assegnando le masse dei due piani  $m_1 = 1 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ Kg}$  e la costante elastica  $\alpha = 2 \text{ N/m}$  ( $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\gamma = 1$ ), i valori  $k_i$  della matrice  $K$  sono i seguenti:

$$K = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Si è simulato il sistema in evoluzione libera con l'equivalente discreto 1.7 dato il passo  $T_c = 0.0001 \text{ sec}$  con e senza il controllo per diverse condizioni iniziali, in particolare con posizioni iniziali diverse per i due piani  $x(0) = [3 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0]^T$ , con velocità del carrello diversa da zero  $x(0) = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 3]^T$ , ed entrambe le situazioni. In rosso e blu sono visualizzate le evoluzioni di  $y(t) = x_2(t)$  rispettivamente senza e con controllo  $F(t)$ . Per completezza è stato posto il listato della simulazione Matlab in appendice 4.

<sup>6</sup> $R$  in questo caso è semidefinita positiva

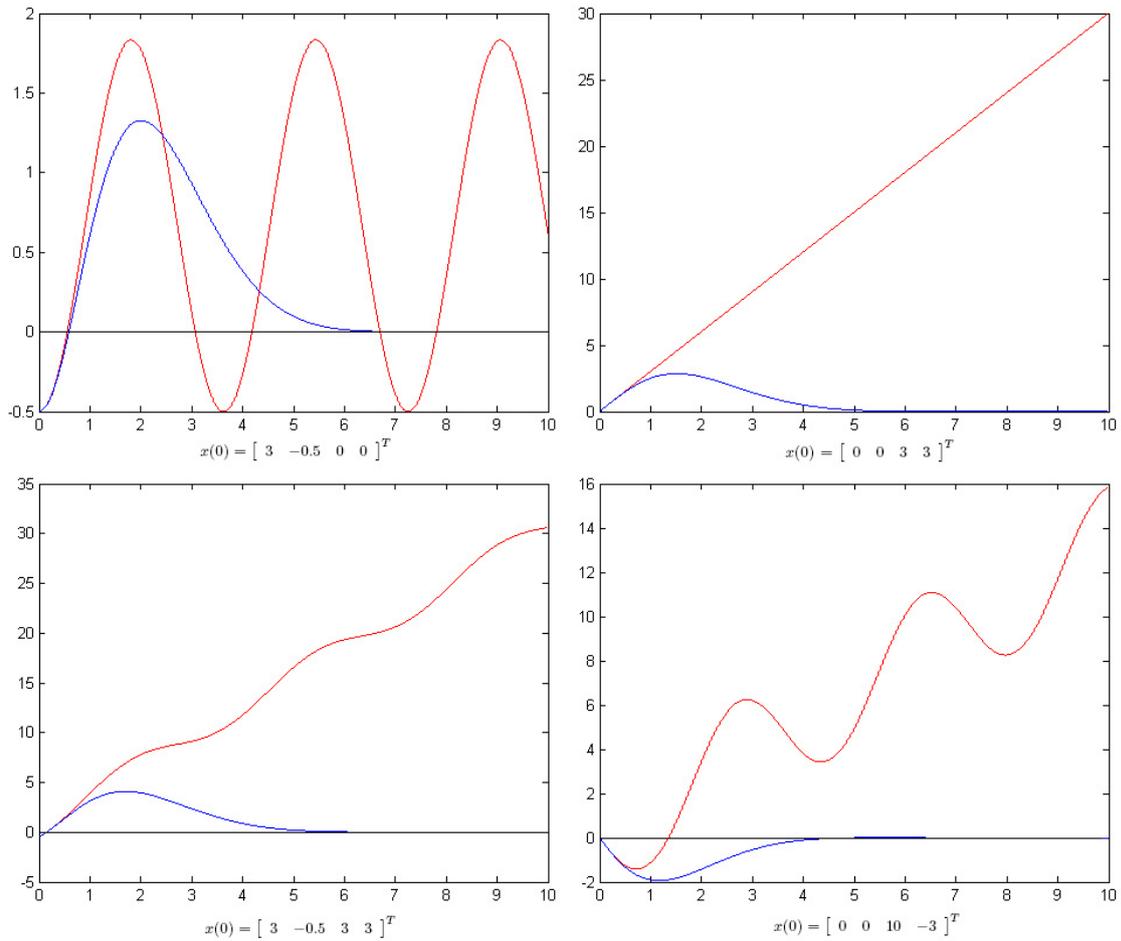


Figura 6.6: simulazione del carrello con giunto elastico con e senza controllo

## 6.5 Perdita di raggiungibilità e controllabilità sotto campionamento

Sia dato il sistema oscillante  $\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 x_1(t) + u(t)$ , e si scelga la rappresentazione seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

Puó succedere che il sistema a tempi campionati, per valori critici del passo di campionamento  $T_c$  risulti non raggiungibile e/o non osservabile.

Ricaviamo la matrice della dinamica a tempi campionati diagonalizzando la matrice  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} -j & j \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & -j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & -1 \\ -j & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

quindi:

$$\begin{aligned} A_D = e^{AT_c} &= \begin{bmatrix} -j & j \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega T_c} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega T_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & -1 \\ -j & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{j\omega T_c} + e^{-j\omega T_c}}{2} & \frac{j e^{j\omega T_c} - j e^{-j\omega T_c}}{2} \\ \frac{-j e^{j\omega T_c} + j e^{-j\omega T_c}}{2} & \frac{e^{j\omega T_c} + e^{-j\omega T_c}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega T_c) & -\sin(\omega T_c) \\ \sin(\omega T_c) & \cos(\omega T_c) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la matrice  $B_D$  per ingresso costante a tratti con passo  $T_c$  risulta:

$$B_D = \int_0^{T_c} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\xi) & -\sin(\omega\xi) \\ \sin(\omega\xi) & \cos(\omega\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\xi = \int_0^{T_c} \begin{bmatrix} -\sin(\omega\xi) \\ \cos(\omega\xi) \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega}(\cos(\omega T_c) - 1) \\ \frac{1}{\omega} \sin(\omega T_c) \end{bmatrix}$$

mentre  $C_D = C$ . Per valutare la raggiungibilità del sistema a tempi campionati valutiamo il rango delle matrici  $R$  e  $O$  al variare del parametro  $T_c$ . La matrice  $R$  in tal caso risulta:

$$R = [B_D \quad A_D B_D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega}(\cos(\omega T_c) - 1) & \frac{1}{\omega} [\cos^2(\omega T_c) - \sin^2(\omega T_c) - \cos(\omega T_c)] \\ \frac{1}{\omega} \sin(\omega T_c) & \frac{1}{\omega} [2 \cos(\omega T_c) \sin(\omega T_c) - \sin(\omega T_c)] \end{bmatrix}$$

sviluppiamo il determinante di tale matrice e raccogliendo come termine comune  $\sin(\omega T_c)$  otteniamo:

$$\det(R) = \frac{1}{\omega^2} \sin(x) [2 - 2 \cos(\omega T_c)]$$

per cui il determinante si annulla se uno dei fattori é nullo. In particolare  $\det(R) = 0$  se:

$$\omega T_c = k\pi \Rightarrow T_c = \frac{k\pi}{\omega}$$

e per tali valori di  $T_c$  il sistema risulta non raggiungibile<sup>7</sup>. Per quanto riguarda l'osservabilità, si procede allo stesso modo:

$$O = \begin{bmatrix} C_D \\ C_D A_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\omega T_c) & -\sin(\omega T_c) \end{bmatrix}$$

ed  $O$  ha rango inferiore a 2 e pari ad 1 solo se la seconda riga é proporzionale alla prima, cioè:

$$\omega T_c = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(1+2k)\pi}{2} \Rightarrow T_c = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(1+2k)\pi}{2\omega}$$

e per tali valori di  $T_c$  il sistema risulta non osservabile. Deduciamo da tale risultato che la scelta del passo di campionamento  $T_c$  deve essere accurata. Nella pratica occorre che:

$$0 < T_c \ll \frac{2\pi}{2\omega}$$

dove  $\omega$  é la pulsazione naturale del sistema.

---

<sup>7</sup>per  $k$  pari la matrice  $R$  é la matrice nulla e non esiste un sottospazio raggiungibile, per  $k$  dispari  $R = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  e lo spazio raggiungibile e quello non raggiungibile hanno dimensione 1

## Capitolo 7

# Sistemi non lineari e funzioni di Lyapunov

Come noto la linearizzazione è il metodo principale per l'analisi e lo studio della stabilità di sistemi non lineari. Questa è ampiamente trattata in tutti i testi di sistemi dinamici. Esistono tecniche non basate sulla linearizzazione e in questo capitolo saranno riportati alcuni semplici casi.

*Un metodo molto potente e generale per studiare la stabilità dei sistemi è quello che utilizza le funzioni di Lyapunov, le quali sono opportune equazioni scalari definite sullo spazio degli stati e i criteri di stabilità si riconducono essenzialmente all'analisi del segno di queste funzioni e delle loro derivate o incrementi lungo le traiettorie del sistema.*

*Consideriamo il problema seguente:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \rho(x(t)) \\ 0 &= \rho(0)\end{aligned}$$

*dove  $\rho$  è una funzione non lineare continua. Assumiamo che il sistema ammetta punto di equilibrio nell'origine, ovvero  $x(t) \equiv 0$  sia soluzione del sistema. L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se in tale configurazione il sistema ammette un minimo locale di energia, e per piccole perturbazioni le traiettorie del sistema dissipano energia riportandosi nello stato minimo energetico<sup>1</sup>. È anche vero che dare la definizione di energia, specialmente per sistemi in cui interagiscono elettronica e meccanica, risulta problematico e si preferisce un approccio matematico utilizzando funzioni di "tipo energia". Tali funzioni di Lyapunov  $V(x)$  sono funzioni delle variabili di stato. Una candidata funzione di Lyapunov  $V(x)$  ha la caratteristica di essere definita positiva ( $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  per  $x \in W$  intorno dell'origine,  $x \neq 0$ ). Scelta una traiettoria  $x(t)$ ,  $V(x(t))$  fornisce al variare di  $t$  i valori di  $V$  "visti" da un osservatore che si muove solidalmente con il punto  $x(t)$ , mentre la derivata  $\dot{V}(x(t))$  fornisce il valore della derivata rispetto al tempo della funzione  $V$  lungo tale traiettoria del sistema. Nell'ipotesi che  $V(x(t))$  sia differenziabile con continuità, fissato un istante temporale  $t$ , abbiamo:*

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$

*dove definiamo il gradiente come vettore riga:*

$$\nabla V(x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right].$$

*Siccome sappiamo che la traiettoria deve soddisfare:*

$$\dot{x}(t) = \rho(x(t))$$

---

<sup>1</sup>se si volesse studiare la stabilità in un punto diverso dall'origine, ci si riconduce a questo problema trasladando opportunamente le variabili di stato con ingresso nullo:  $u(t) = u_0 \Rightarrow v(t) = u(t) - u_0 = 0$ .

dunque:

$$\dot{V}(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \rho(x(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot \rho(x)$$

Possiamo dunque definire la derivata alla Lyapunov che è la derivata di  $V(x)$  quando  $x(t) = x$ . Si enuncia quindi il risultato del teorema di Lyapunov: data  $V(x) : W \mapsto \mathbb{R}$  definita positiva nell'intorno  $W$  dell'origine,

- a) se  $\dot{V}(x)$  è semidefinita negativa ( $\dot{V}(0) = 0$ ,  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $x \in W'$ ,  $x \neq 0$ ) il punto di equilibrio  $(0,0)$  è stabile;
- b) se  $\dot{V}(x)$  è definita negativa ( $\dot{V}(0) = 0$ ,  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $x \in W'$ ,  $x \neq 0$ ) il punto di equilibrio  $(0,0)$  è asintoticamente stabile;
- c) se  $\dot{V}(x)$  è definita positiva ( $\dot{V}(0) = 0$ ,  $\dot{V}(x) > 0$ ,  $x \in W'$ ,  $x \neq 0$ ) il punto di equilibrio è instabile.

Va precisato che il segno della derivata alla Lyapunov di  $V(x)$  dipende dalla sua scelta, che è arbitraria, e se  $\dot{V}(x)$  è segno indefinita non si può concludere nulla sulla stabilità. Una scelta possibile per la funzione di Lyapunov candidata è prendere la funzione quadratica:

$$V(x) = x^T P x$$

che è funzione definita positiva se si prende  $P$  matrice simmetrica e definita positiva, cioè con spettro ad elementi tutti positivi (come test è possibile verificare che la successione dei determinanti annidati sia a termini positivi). La derivata di Liapunov per tale funzione risulta:

$$\dot{V}(x) = 2x^T P \rho(x)$$

## 7.1 Saturazione del controllo

Si dice che il controllo è soggetto a saturazione quando esistono dei valori limite, oltre ai quali non può arrivare per motivi fisici. Ad esempio, se il segnale di controllo è una tensione, non può eccedere i valori massimi erogabili dal generatore, se è una portata attraverso una valvola, deve essere positiva e inferiore alla portata di valvola totalmente aperta.

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t) \\ u(t) &= -\text{sat}(x_2(t)) \end{aligned}$$

dove  $\text{sat}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(\mu x)$  è una funzione di saturazione e dove  $\mu > 0$  è un parametro. Possiamo dimostrare, tramite la funzione di Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

che questo sistema è globalmente stabile, cioè che lo stato converge a zero a partire da qualunque condizione iniziale.

I punti di equilibrio di tale sistema risolvono le equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 & \Rightarrow & \bar{x}_1 = -\bar{x}_2 \\ 0 &= \bar{x}_1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\mu \bar{x}_2) & \Rightarrow & \bar{x}_1 = \frac{2}{\pi} \arctan(\mu \bar{x}_2) \end{aligned}$$

che ammettono come punto di equilibrio  $\bar{x} = [0 \quad 0]^T$ . La forma in cui è data la funzione di Lyapunov indica la scelta di  $P = I$ . Quindi:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\mu x_2) \end{bmatrix} = -2 \left( x_1^2 + \frac{2}{\pi} x_2 \arctan(\mu x_2) \right)$$

Il dominio in cui  $\dot{V}(x_1, x_2)$  é definita negativa indica la regione in cui le traiettorie vengono attratte del punto di equilibrio. Analizzando l'espressione di  $\dot{V}(x_1, x_2)$ , il secondo termine tra parentesi é sempre maggiore di zero perché dato dal prodotto di due funzioni dispari: ciò implica che l'espressione di tale funzione é negativa  $\forall x_1, x_2$ , e che quindi il sistema é globalmente stabile. Per verifica, essendo lo spazio degli stati  $\mathbb{R}^2$ , é possibile grazie a semplici comandi Matlab visualizzare il grafico tridimensionale della superficie  $\dot{V}(x_1, x_2)$ :

```
[x1,x2]= meshgrid(-1:.005:1);
V_p = -2*x1.^2 -4*x2.*atan(10*x2)/pi;
mesh(x1,x2,V_p);
```

con il comando `meshgrid` si generano due matrici che rappresentano la griglia di punti<sup>2</sup> dove verrà valutata la funzione, mentre con il comando `mesh` si visualizza il grafico tridimensionale della superficie. Il risultato conferma  $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ .

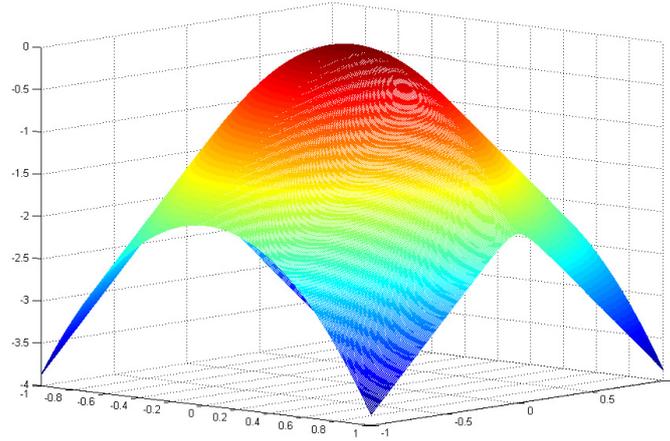


Figura 7.1: grafico della derivata di V

## 7.2 Robustezza studiata con le funzioni di Lyapunov

Tramite funzioni di Lyapunov é possibile garantire non solo la stabilità di un sistema, ma anche la sua robustezza. Per esempio tramite la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  é possibile determinare un valore  $\Delta > 0$  per cui il sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \delta - 1 & -2 \end{bmatrix}$$

é robustamente stabile con  $|\delta| \leq \Delta$ .

Consideriamo la funzione di Lyapunov con  $P = I$ , la cui derivata é:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 + \delta & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [-4x_1 + 2x_2(\delta - 1)]x_1 + (2x_1 - 4x_2)x_2 = \\ &= -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2\delta x_1 x_2 \end{aligned}$$

per valutare il segno di tale funzione nell'intorno dell'origine, si valuta la matrice:

$$\begin{bmatrix} -8 & -2\delta \\ -2\delta & -8 \end{bmatrix}$$

che deve risultare definita negativa, quindi:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2\delta \\ 2\delta & 8 \end{bmatrix}$$

<sup>2</sup>con passo 0.005 da -1 a 1

deve essere definita positiva e, per rispettare la condizione sui determinanti, ricaviamo il vincolo su  $\delta$  (oltre al banale  $\delta > 0$ ):

$$64 - 4\delta^2 \geq 0 \Rightarrow |\delta| \leq \Delta_{MAX} = 4$$

Grazie ai grafici Matlab, si può visualizzare il comportamento di  $\dot{V}(x_1, x_2)$  al variare di  $\delta$ . Per  $|\delta| > 4$  la funzione risulta segno indefinita e, utilizzando questa teoria, non si può concludere nulla sulla stabilità:

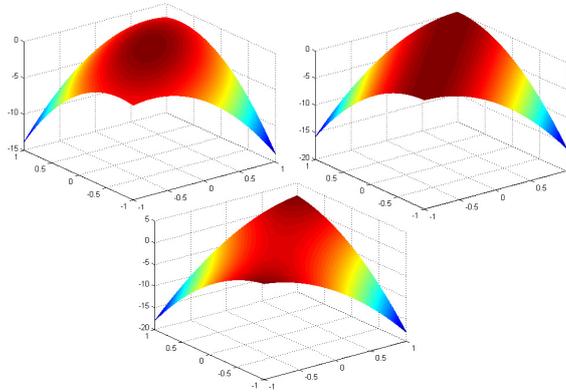


Figura 7.2: grafici della derivata di  $V$  per  $\delta = 3, 4, 5$

Se assumiamo  $\delta$  parametro costante nel tempo, in realtà, dallo studio delle radici del polinomio caratteristico la condizione di stabilità è  $\delta \leq 5$ : confrontando questo risultato con quello qui ottenuto, deduciamo che la funzione di Lyapunov determina una condizione solo sufficiente ma non necessaria per la stabilità, dovuta all'arbitrarietà della sua scelta. Tuttavia è di fondamentale importanza notare che il risultato basato sulla funzione di Lyapunov garantisce la stabilità anche se  $\delta(t)$  è tempo variante e  $|\delta(t)| < 4$ , mentre per sistemi tempo varianti non si può definire il polinomio caratteristico.

### 7.3 Stima del dominio di attrazione e verifica numerica

Data la funzione  $V$  di Lyapunov, i luoghi di punti in cui  $V(x) = k$  costante sono superfici di livello. Definiamo l'insieme di sottolivello sul dominio di  $V$ :

$$\Upsilon[V, k] = \{x : V(x) \leq k\}$$

Se  $V(x)$  è non crescente lungo le traiettorie del sistema ( $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ ), una ovvia conseguenza del teorema di Lyapunov è che  $\Upsilon[V, k]$  ha la proprietà che se  $x(t_1) \in \Upsilon[V, k]$  allora  $x(t) \in \Upsilon[V, k] \forall t \geq t_1$ , cioè la traiettoria è costretta a rimanere confinata entro tale insieme di sottolivello.

\* \* \* \*

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + x_2^3(t) \end{aligned}$$

studiamo la stabilità locale tramite la funzione de Lyapunov  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ .

A tal scopo, calcoliamo la derivata alla Lyapunov con  $P = \frac{1}{2}I$ , che in questo caso risulta:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_2^3 \end{bmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2) + x_2^4$$

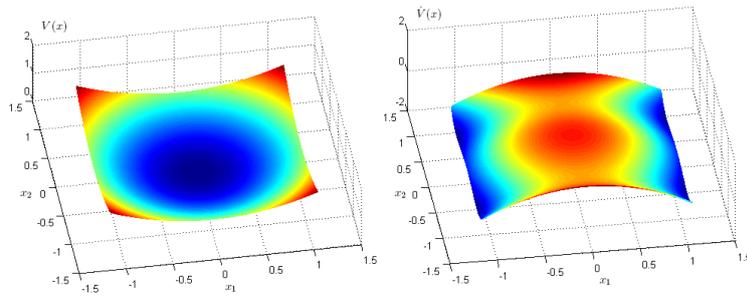


Figura 7.3: grafici di  $V$  e sua derivata nel primo caso

la funzione é definita negativa in un intorno dell'origine perché  $x_2^4$  é infinitesimo di ordine superiore. Quindi il punto di equilibrio é asintoticamente stabile.

La determinazione del dominio di attrazione per un sistema non lineare é un problema non banale. Come già menzionato, essendo il sistema asintoticamente stabile nell'origine,  $\exists k$  tale che:

$$\Upsilon[V, k]$$

é un sottoinsieme del dominio di attrazione. Il problema si traduce nel determinare  $k$ , il cui valore può essere determinato con il vincolo:

$$\max\{k : \Upsilon[V(x), k] \subset \Upsilon[\dot{V}(x), 0]\} \quad (7.1)$$

si capisce, quindi, che il risultato ottenibile é determinato dalla scelta arbitraria della funzione  $V(x)$ , le cui superfici di livello fissano alla base la "forma" del dominio di attrazione stimabile. Nel nostro caso,  $V(x)$  ha superfici di livello che sono circonferenze centrate nell'origine: prendendo un disco di raggio  $k$  e centro nell'origine come intorno test di attrazione, notiamo che la funzione  $\dot{V}(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2) + x_2^4$  calcolata in tale intorno rimane definita negativa per  $k < k_{max} = 1$  (cioé fintanto che  $x_2 < 1$ ), e in tale intorno quindi le traiettorie vengono attratte verso l'origine. Per raggio maggiore la funzione  $\dot{V}(x)$  calcolata nell'insieme di sottolivello risulta segno indefinita e non si può concludere nulla sulla stabilità.

Per verifica, si é simulato il sistema con l'approssimante di Eulero con passo  $h = 0.0001$  secondi:

$$\begin{aligned} x_1(t+h) &= x_1(t) + h[-x_1(t) + x_2(t)] \\ x_2(t+h) &= x_2(t) + h[-x_1(t) - x_2(t) + x_2^3(t)] \end{aligned}$$

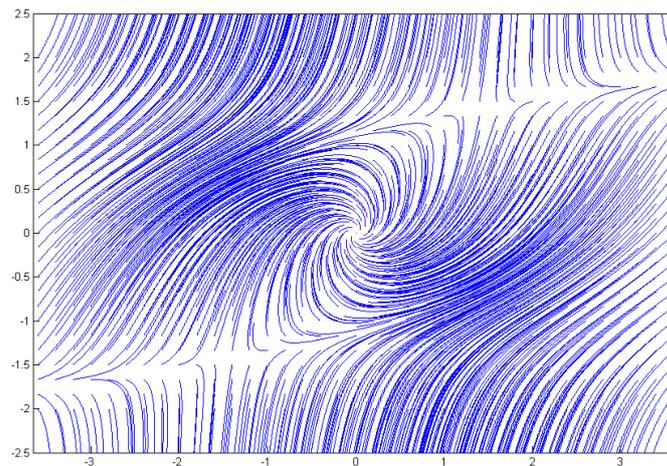


Figura 7.4: traiettorie per diverse condizioni iniziali

infittendo tante traiettorie per diverse condizioni iniziali. Da tale simulazione si può verificare che

il dominio di attrazione ha una forma ben piú complessa. In figura 7.4 sono riportate tutte le traiettorie calcolate. Avendo un'idea empirica dell'andamento delle traiettorie del sistema, si può scegliere una funzione di Lyapunov con superfici di livello piú opportune. Per esempio:

$$V(x) = 0.5x_1^2 + x_2^2 - 0.5x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Settando  $P$  simmetrica e definita positiva. Risulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_2^3 \end{bmatrix} = \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25x_1 + 0.75x_2 - 0.25x_2^3 \\ -0.75x_1 - 1.25x_2 + x_2^3 \end{bmatrix} = 2[-0.25x_1^2 - 1.25x_2^2 - 0.25x_1x_2^3 + x_2^4] \end{aligned}$$

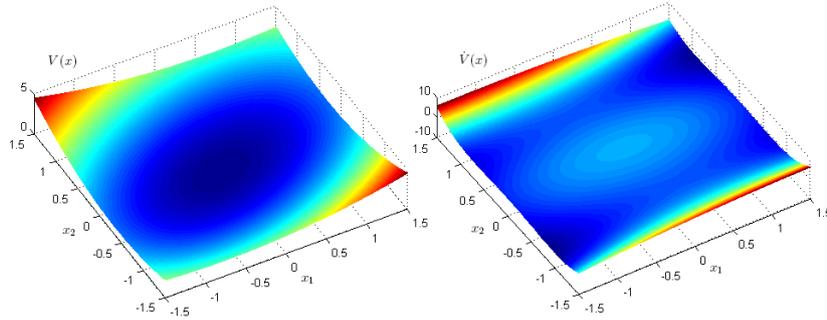


Figura 7.5: grafici di  $V$  e sua derivata nel secondo caso

per determinare la superficie di livello limite (che, dato lo spazio degli stati  $X = \mathbb{R}^2$ , in questo caso sarà una curva a forma di ellisse), si può procedere considerando il problema 7.1 e calcolare numericamente il corrispondente valore di  $k$ , come illustrato nel programma in appendice 5.

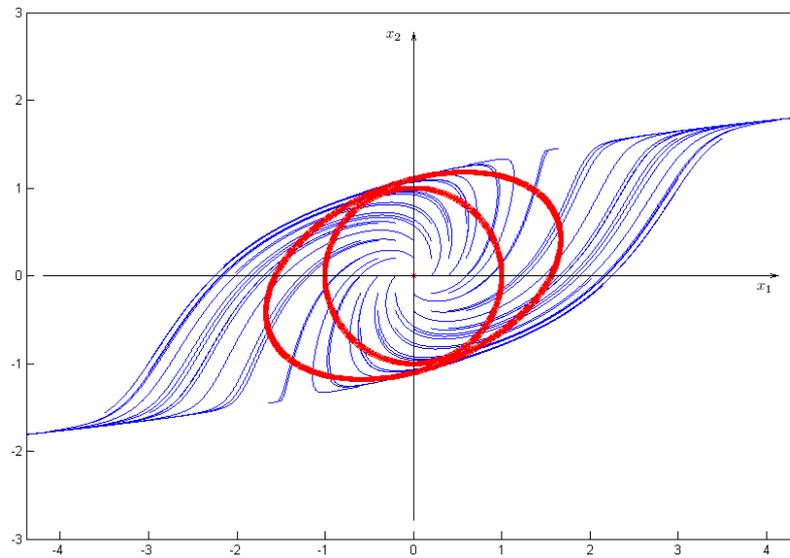


Figura 7.6: stime del dominio di attrazione per inversione e con le superfici di livello di  $V(x)$  nei due casi

Inoltre, é possibile visualizzare sperimentalmente il dominio di attrazione "invertendo" le equazione del sistema approssimante di Eulero:

$$x(t+h) = x(t) + h\rho(x(t)) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t+h) - h\rho(x(t))$$

In linea con quanto visto nella sezione 2.6, l'inversione del sistema corrisponde al sistema di equazioni alle differenze approssimante:

$$x(t) = x(t+h) - h\rho(x(t+h)) \quad (7.2)$$

le cui soluzioni, si può dimostrare, per  $h \rightarrow 0$  tendono a quelle del sistema non lineare invertito: le traiettorie di 7.2 con condizioni iniziali nell'intorno  $W$  ripercorrono all'indietro nel tempo le traiettorie convergenti verso l'origine del sistema originale, delineando in questo caso con buona approssimazione il contorno del dominio di attrazione. In figura 7.6 vengono riportate tali traiettorie e le due stime calcolate mediante le due funzioni di Lyapunov prese in considerazione.

Si deduce quindi che il disco di raggio unitario e l'ellisse sono sottoinsiemi del vero dominio di attrazione, e le condizioni trovate sono solo sufficienti ma non necessarie per la stabilità asintotica.

## 7.4 Stabilità marginale

Sia dato il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\Phi(x_1(t)) \end{aligned}$$

si assuma che  $\Phi(x_1)$  sia una funzione dispari, continua e strettamente crescente. Tale equazione è tipica nei sistemi meccanici ad un grado di libertà in assenza di smorzamenti. È possibile dimostrare la stabilità del sistema nell'origine usando la funzione di Lyapunov candidata:

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \Phi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2$$

ma possiamo constatare che la stabilità non può essere di tipo asintotico.  $V$  è sicuramente definita positiva per le condizioni imposte su  $\Phi(\cdot)$ . Calcoliamo la derivata rispetto alle traiettorie del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \nabla V(x_1, x_2) \rho(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \Phi(\xi) d\xi & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\Phi(x_1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi(x_1) - \Phi(0) & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\Phi(x_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

essendo  $\Phi(\cdot)$  continua, dispari e strettamente crescente, allora necessariamente  $\Phi(0) = 0$ , quindi:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_2 \Phi(x_1) - x_2 \Phi(x_1) \equiv 0$$

il che significa che il sistema conserva l'energia su ogni possibile traiettoria del sistema. Il sistema è dunque stabile marginalmente e si può escludere la stabilità asintotica. Si noti che mentre  $\dot{V}(x)$  semidefinita negativa non esclude la stabilità asintotica<sup>3</sup>, in questo caso  $\dot{V}(x) \equiv 0$  e necessariamente l'equilibrio non può essere convergente a zero.

## 7.5 Funzione di Lyapunov per sistemi lineari, caso di $A$ in forma simmetrica

È possibile analizzare la stabilità dei sistemi lineari  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  tramite le funzioni di Lyapunov. In tal caso scegliamo  $V(x) = x^T P x$  con  $P$  simmetrica definita positiva e calcoliamo esplicitamente la derivata:

$$\dot{V}(x) = 2x^T P A x = x^T P A x + x^T P A x$$

essendo l'equazione scalare, essa è coincidente con la trasposta, quindi trasponendo il primo termine dell'equazione si ottiene:

$$\dot{V}(x) = (x^T P A x)^T + x^T P A x = x^T A^T P^T x + x^T P A x$$

<sup>3</sup>ed esiste il criterio di Krasowskii da applicare in questi casi

ma  $P$  é simmetrica, quindi:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x = x^T(-Q)x$$

che é funzione definita negativa se e solo se  $Q$  é simmetrica e definita positiva. Quindi, se il sistema originario é asintoticamente stabile, la soluzione  $P$  dell'equazione di Lyapunov:

$$A^T P + PA = -Q$$

fissata una generica  $Q$  simmetrica definita positiva, é simmetrica definita positiva.

\* \* \* \*

Esiste, rispetto a quanto detto, un caso speciale per cui non é necessario risolvere l'equazione di Lyapunov. Infatti se  $A$  é matrice simmetrica, allora il sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  é asintoticamente stabile se e solo se ammette la funzione di Lyapunov:

$$V(x) = x^T x$$

Se si assume il sistema asintoticamente stabile, come già detto  $P$  simmetrica definita positiva sarà soluzione dell'equazione di Lyapunov  $A^T P + PA = -Q$ , dove  $Q$  é simmetrica definita positiva. Essendo anche  $A$  simmetrica  $A^T = A$ ,  $P$  per questo caso particolare é soluzione di:

$$AP + PA = -Q$$

Dire che il sistema ammette funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T x$  é equivalente supporre che  $P = I$ , sostituendo:

$$A + A = -Q \Rightarrow Q = -2A$$

quindi  $P = I$  é soluzione dell'equazione a patto di scegliere  $Q = -2A$ . La scelta di  $Q$  é lecita in quanto  $A$  é simmetrica e, essendo il sistema a tempo continuo asintoticamente stabile,  $A$  é definita negativa avendo tutti autovalori reali negativi. Perciò  $Q = -2A$  é simmetrica e definita positiva.

## 7.6 Energia del transitorio ed equazione di Lyapunov

Per i sistemi lineari la soluzione dell'equazione di Lyapunov é esprimibile in forma analitica come:

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Sempre con  $Q$  simmetrica definita positiva, e  $P$  simmetrica definita positiva. Si può verificare per diretta sostituzione:

$$A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt A = \int_0^\infty [A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A] dt =$$

dove si possono riconoscere i termini:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^\infty \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{h=0}^\infty \frac{A^h A t^h}{h!} = \sum_{h=0}^\infty \frac{A A^h t^h}{h!} = e^{At} A = A e^{At}$$

da cui si riconosce che la funzione integranda é la derivata della funzione prodotto:

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A^T t} Q e^{At}] dt = [e^{A^T t} Q e^{At}]_0^\infty = 0 - IQI = -Q$$

l'ultima uguaglianza é giustificato dal fatto che, avendo  $A$  ha autovalori asintoticamente stabili per ipotesi,  $e^{At} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

\* \* \* \*

Dato un sistema lineare stabile  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  e  $R$  matrice simmetrica definita positiva, l'energia del transitorio con condizioni iniziali  $x_0$  é definita dalla quantità:

$$E(x_0) = \int_0^\infty x(t)^T R x(t) dt$$

Si ha che  $E(x_0) = x_0^T P x_0$  dove  $P$  é calcolabile tramite una opportuna equazione di Lyapunov. Infatti se consideriamo la forma analitica della soluzione dell'equazione di Lyapunov:

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

manipolando l'equazione dell'energia, si ottiene:

$$E(x_0) = x_0^T P x_0 = x_0^T \left( \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) x_0 = \int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} Q e^{At} x_0 dt$$

inoltre  $e^{A^T t} = (e^{At})^T$  perché nello sviluppo in serie della matrice esponenziale le potenze di  $(A^T)^k = (A^k)^T$ , quindi:

$$E(x_0) = \int_0^\infty (e^{At} x_0)^T Q (e^{At} x_0) dt = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt$$

$P$ , allora, é soluzione dell'equazione di Lyapunov per  $Q = R$ :

$$A^T P + P A = -R$$

## 7.7 Equazione di Lyapunov duale per sistemi lineari

L'equazione di Lyapunov duale é:

$$A S + S A^T = -R.$$

É possibile vedere che anche per l'equazione duale vale la stessa proprietá dell'equazione di Lyapunov. Come é noto  $\dot{x} = Ax$  é stabile asintoticamente se e solo se per qualunque  $Q$  simmetrica definita positiva, la soluzione  $P$  di  $A^T P + P A = -Q$  é simmetrica definita positiva. Consideriamo il sistema duale:

$$A_d = A^T$$

Sistema duale e primale hanno gli stessi autovalori perché  $A$  e  $A^T$  sono matrici simili. Ovviamente se il sistema primale é asintoticamente stabile lo é anche il sistema duale. Applichiamo allora l'equazione di Lyapunov al sistema duale chiamando  $P = S$  e scegliendo  $Q = R$  simmetrica definita positiva:

$$A_d^T S + S A_d = -R$$

$$(A^T)^T S + S A^T = -R$$

$$A S + S A^T = -R$$

Quindi, fissata  $R$  simmetrica definita positiva, la soluzione  $S$  dell'equazione duale é simmetrica definita positiva se e solo se  $A$  é asintoticamente stabile.

## 7.8 Analisi di stabilitá tramite linearizzazione (sistema a tempo discreto)

*Grazie alle funzioni di Lyapunov é possibile dimostrare che se il sistema linearizzato approssimante attorno ad un punto di riposo é asintoticamente stabile, allora anche il sistema non lineare attorno a tale punto é asintoticamente stabile. Si é dimostrata questa importante proprietá per i sistemi a tempo discreto, i quali possono essere trattati allo stesso modo dei sistemi a tempo continuo definendo, al posto della derivata, l'incremento alla Lyapunov.*

\* \* \* \*

Un sistema lineare discreto  $x(k+1) = Ax(k)$  é stabile asintoticamente se e solo se per qualsiasi  $Q$  definita positiva, la soluzione  $P$  dell'equazione:

$$A^T P A - P = -Q$$

é simmetrica e definita positiva. In tal caso  $V(x) = x^T P x$  é una funzione di Lyapunov per il sistema discreto, infatti:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = x(k)^T [A^T P A - P] x(k) = -x(k)^T Q x(k) < 0, \quad x(k) \neq 0$$

vogliamo verificare che un sistema non lineare:

$$x(k+1) = Ax(k) + R(x(k))$$

con  $R(0) = 0$  e  $R$  infinitesimo di ordine superiore al primo:

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \quad \|x\| \rightarrow 0$$

é asintoticamente stabile nel punto di equilibrio se il sistema approssimante lineare  $x(k+1) = Ax(k)$  é asintoticamente stabile.

Per i nostri scopi utilizziamo la funzione di Lyapunov  $V$  determinata attraverso il sistema linearizzato asintoticamente stabile con  $Q = I$  e ne calcoliamo l'incremento lungo le traiettorie del sistema non lineare  $\Delta V_{NL}$ . Occorre verificare che in un opportuno intorno dell'origine  $\Delta V_{NL}$  é definita negativa. Sviluppiano i conti per l'incremento:

$$\begin{aligned} \Delta V_{NL} &= V_{NL}(x(k+1)) - V_{NL}(x(k)) = V_{NL}(Ax + R(x)) - V_{NL}(x) = \\ &= [Ax + R(x)]^T P [Ax + R(x)] - x^T P x = \\ &= [x^T A^T + R(x)^T] P [Ax + R(x)] - x^T P x = \\ &= x^T A^T P Ax + x^T A^T P R(x) + R^T(x) P Ax + R^T(x) P R(x) - x^T P x = \\ &= x^T [A^T P A - P] x + x^T A^T P R(x) + R^T(x) P Ax + R^T(x) P R(x) = \end{aligned}$$

sostituendo l'espressione di  $Q$  ed essendo  $P^T = P$ , si puó riarrangiare come:

$$= -x^T x + [R^T(x) P Ax]^T + R^T(x) P Ax + R^T(x) P R(x) =$$

ora  $\Delta V_{NL}$  é uno scalare, quindi la matrice  $x^T A^T P R(x)$  in realtà é uno scalare<sup>4</sup> e coincide con la sua trasposta, quindi:

$$= -\|x\|^2 + 2R^T(x) P Ax + R^T(x) P R(x)$$

maggioriamo tale termine con il modulo:

$$\leq -\|x\|^2 + |2R^T(x) P Ax + R^T(x) P R(x)| \leq -\|x\|^2 + |2R^T(x) P Ax| + |R^T(x) P R(x)|$$

ora si applica la disuguaglianza di Swartz per cui  $u^T v \leq \|u\| \|v\|$ :

$$\leq -\|x\|^2 + 2\|R^T(x)\| \|PAx\| + \|R^T(x)\| \|PR(x)\|$$

quindi la definizione di norma di matrice. Si ottiene:

$$\begin{aligned} &\leq -\|x\|^2 + 2\|R^T(x)\| \|PA\| \|x\| + \|R^T(x)\| \|P\| \|R(x)\| = \\ &= -\|x\|^2 + 2\|R(x)\| \|PA\| \|x\| + \|R(x)\|^2 \|P\| = \\ &= -\|x\|^2 \left( 1 + \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} 2\|PA\| + \frac{\|R(x)\|^2}{\|x\|^2} \|P\| \right) \end{aligned}$$

si trova quindi una maggiorazione per  $\Delta V_{NL}$ . Dato che i termini  $\frac{\|R(x)\|}{\|x\|}$ ,  $\frac{\|R(x)\|^2}{\|x\|^2}$ <sup>5</sup> tendono a zero per  $x \rightarrow 0$  si puó prendere un intorno arbitrariamente piccolo di zero tale che questi termini siano trascurabili rispetto all'unitá. Tale deduzione corrisponde al fatto che  $\Delta V_{NL}(0) = 0$  e in tale intorno  $\Delta V_{NL}(0) < 0$  come volevasi dimostrare.

<sup>4</sup> $R(x)$  é una colonna ed ha le dimensioni di  $B$

<sup>5</sup>ovviamente, il prodotto di due infinitesimi é un infinitesimo

## 7.9 Criterio di instabilità di Cetaev

Il limite della teoria delle funzioni di Lyapunov, come già accennato, è il fatto che data  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$  segno indefinita, non è possibile dedurre nulla circa la stabilità o meno del punto di equilibrio. Esiste tuttavia il criterio di Cetaev che permette di dedurre l'instabilità dell'origine tramite funzioni chiamate Lyapunov-like functions, non necessariamente definite positive. Dato lo stesso problema precedente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \rho(x(t)) \\ 0 &= \rho(0)\end{aligned}$$

Sia  $W$  un intorno dell'origine e  $A$  insieme aperto tale che la sua chiusura  $\bar{A} = A \cup \partial A$  contenga l'origine. Sia data la funzione Lyapunov-like tale che:

$$V(0) = 0, \quad V(x) = 0 \quad \forall x \in \partial A \cap W$$

e si abbia come ipotesi:

$$V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap W$$

segue che il punto di equilibrio nell'origine è instabile: intuitivamente, in seguito a piccole perturbazioni le traiettorie del sistema sono costrette ad essere "spinte" nella regione  $A \cap W$ .

★ ★ ★ ★

Dato il sistema non lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^3\end{aligned}$$

è possibile verificare l'instabilità nell'origine tramite la funzione di Cetaev  $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$ . Calcoliamo la derivata di  $V$  lungo le traiettorie del sistema:

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \rho(x) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{bmatrix} = x_2^2 + x_1^4$$

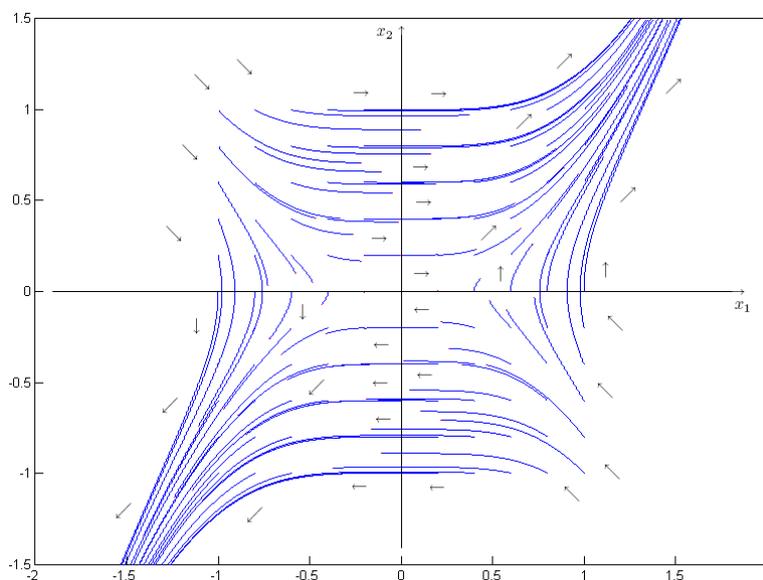


Figura 7.7: traiettorie del sistema non lineare instabile nell'origine

Preso  $W$  intorno a forma di disco circolare e  $A$  l'insieme:

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}, \quad \bar{A} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \ni (0, 0)$$

allora  $A \cap W$  risulta il settore circolare incluso nel primo quadrante (assi esclusi). Per  $x \in A \cap W$   $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) > 0$  e quindi il punto di equilibrio nell'origine é instabile. Alla stessa conclusione si arriva scegliendo:

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0, x_2 < 0\}, \quad \bar{A} = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\} \ni (0, 0)$$

Si é simulato il sistema con approssimante di Eulero: in figura 7.7 sono indicate le traiettorie e le loro direzioni che, come previsto, divergono entro il primo e terzo quadrante.

## 7.10 Sistema a commutazione per la descrizione di un impatto

Un categoria particolare di sistemi non lineari sono quelli a commutazione: questi cambiano il modello in base allo stato.

Un corpo si muove con la seguente legge  $\dot{x} = A_i x$  dove  $A_1$  rappresenta il moto libero e  $A_2$  l'impatto.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ se } x_1 \geq 0, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \text{ se } x_1 < 0$$

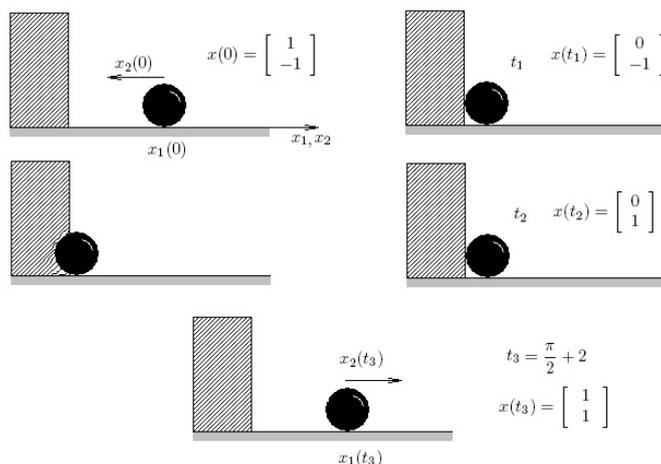


Figura 7.8: schema impatto

La posizione iniziale é  $x_1(0) = 1$  e la velocità iniziale  $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = -1$ . Dire come evolve il moto e in che istante e con che velocità il corpo torna nella posizione iniziale.

Calcoliamo preliminarmente le matrici esponenziali di  $A_1$  e  $A_2$  che verranno utilizzate in seguito:

$$e^{A_1 t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k t^k}{k!} = I + \frac{A_1 t}{1!} + 0 + 0 + \dots = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_2$  in forma diagonale risulta:

$$A_2 = T \Lambda S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & -j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

quindi sviluppando i conti:

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Il vettore di condizioni iniziali corrisponde al vettore:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ed essendo  $x_1 \geq 0$  in questa regione dello spazio degli stati a valere sono le equazioni del primo sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{A_1 t} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix}$$

imponendo che il vettore dello stato sia:

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

abbiamo due equazioni in due incognite che ci permettono di calcolare l'istante  $t_1$  in cui il corpo incontra la parete di impatto e la sua velocità, risolvendo:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ x_2(t_1) &= -1 \end{aligned}$$

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

da cui verifichiamo che il corpo per  $x_1 \geq 0$  si muove di moto uniforme con velocità  $x_2$  costante. Il vettore di stato  $x(t_1)$  rappresenta la condizione iniziale per le equazioni del secondo sistema, da cui:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{A_2(t-t_1)} x(t_1) = \begin{bmatrix} \cos[\omega(t-1)] & \sin[\omega(t-1)] \\ -\sin[\omega(t-1)] & \cos[\omega(t-1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin[\omega(t-1)] \\ -\cos[\omega(t-1)] \end{bmatrix}$$

Tali equazioni descrivono l'evoluzione spazio temporale durante l'impatto. Reimponiamo il passaggio per  $x_1 = 0$  per ricavare l'istante temporale  $t_2$  e la velocità  $x_2(t_2)$ :

$$x(t_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin[\omega(t_2-1)] \\ -\cos[\omega(t_2-1)] \end{bmatrix}$$

la prima equazione si annulla per:

$$\omega(t-1) = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{\omega} + 1$$

tali equazioni sono valide perché per  $1 < t < \frac{\pi}{\omega} + 1$  il valore di  $x_1$  assume valori negativi<sup>6</sup> ed il campo di esistenza delle equazioni è verificato. Quindi:

$$x(t_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a sua volta  $x(t_2)$  è il vettore di condizioni iniziali per il primo sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{A_1(t-t_2)} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & t-t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-t_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Imponendo che il vettore di stato sia:

$$x(t_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2(t_3) \end{bmatrix}$$

si ricava il tempo totale. Sapendo però che il moto è uniforme e  $x_2 = 1$  costante in questa regione, possiamo direttamente assumere che il corpo ritorni al punto iniziale dopo un intervallo di tempo  $\Delta t = 1$ , esattamente come nel primo tratto di evoluzione. Quindi, il tempo totale per ritornare alla posizione di partenza è:

$$t = \frac{\pi}{\omega} + 2$$

Per la simulazione di tale sistema si implementa il sistema alle differenze con:

---

<sup>6</sup>il valore della funzione seno è positivo, ma moltiplicato per  $-1$

$$A1_D = \begin{bmatrix} 1 & T_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A2_D = \begin{bmatrix} \cos(\omega T_c) & \sin(\omega T_c) \\ -\sin(\omega T_c) & \cos(\omega T_c) \end{bmatrix}$$

dove  $T_c$  é il passo di campionamento, mentre per calcolare automaticamente il passaggio dalle equazioni 1 alle 2 basta la struttura *if* seguente:

```
for k=1:n
    if x(1,1) >= 0
        x_new = A1 * x ;
        x1_plot(1,k) = x(1,1);
        x2_plot(1,k) = x(2,1);
        x = x_new;
    else
        x_new = A2 * x ;
        x1_plot(1,k) = x(1,1);
        x2_plot(1,k) = x(2,1);
        x = x_new;
    end
end
end
```

ricordando però, che prendere un passo  $T_c$  troppo grande può compromettere il risultato numerico, perché verranno calcolati dei vettori iniziali di stato  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  per il passaggio da un sistema all'altro poco fedeli a quelli previsti analiticamente, modificando relativamente l'andamento della traiettoria del sistema. Per esempio, ponendo  $\omega = 3rad/sec$ , la simulazione con  $T_c = 0.001sec$  é fedele rispetto al risultato analitico.

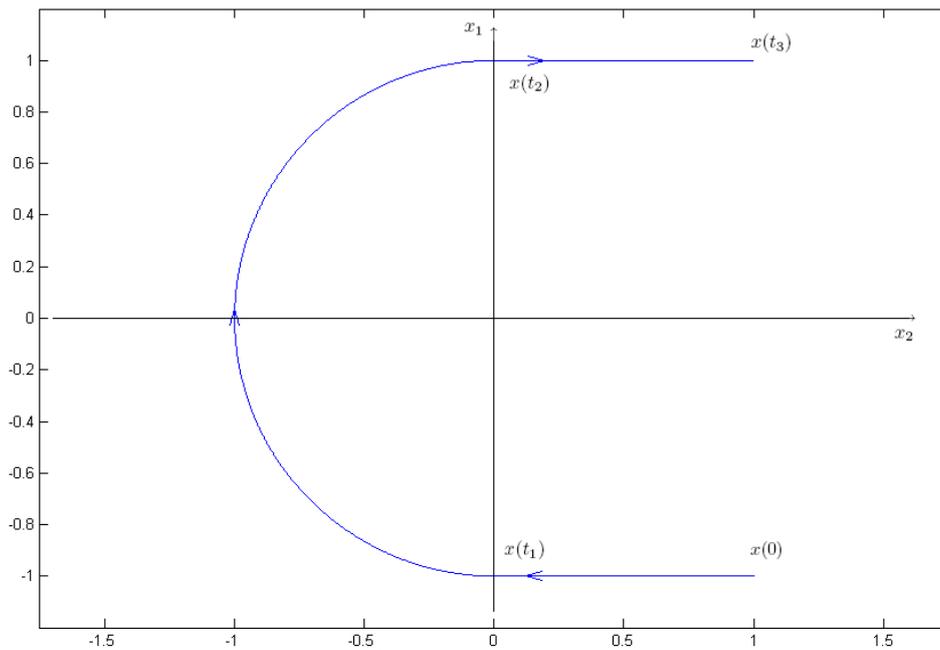


Figura 7.9: traiettoria relativa all'impatto simulata numericamente

# Capitolo 8

## Cenni sul controllo ottimo

Quando si vuole controllare un sistema dinamico, in qualche modo si vorrebbero allocare autovalori in modo da avere transitori piú veloci possibili. La scelta degli autovalori però é influenzata dal fatto che allocando la loro parte reale sufficientemente negativa gli elementi proporzionali di  $K$  possono diventare troppo elevati per essere implementati fisicamente dagli attuatori. Le metodologie del controllo ottimo consentono di esprimere direttamente nel dominio del tempo le caratteristiche dell'ingresso ottimale da applicare e forniscono strumenti analitici per calcolarlo, spesso in forma di retroazione dello stato. La metodologia qui esposta si basa sul principio del minimo. Si consideri il sistema:

$$\dot{x}(t) = \rho(x(t), u(t))$$

si desidera che, dati  $x(0) \neq 0$  e gli insiemi di vincoli su  $u(t)$ ,  $x(t \rightarrow \infty) = 0$  minimizzando una funzione di costo:

$$V(x(t)) = \min_u \left\{ \int_t^{t+h} g(x(t), u(t)) dt + V(x(t+h)) \right\}$$

dove, fissato l'intervallo  $[t, t+h]$ ,  $V(x(t))$  e  $V(x(t+h))$  rappresentano il costo associato allo stato iniziale e finale con  $V(x(t \rightarrow \infty)) = V(0) = 0$ , mentre l'integrale  $J$  é il costo associato agli stati ed agli ingressi in tutti gli istanti precedenti. Il problema é quello di minimizzare tale funzionale. Non dipendendo  $V(x(t))$  dall'ingresso, riscriviamo:

$$\min_u \left\{ \frac{V(x(t+h)) - V(x(t))}{h} + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(x(t), u(t)) dt \right\} = 0$$

dove si é diviso per  $h > 0$ . Intuitivamente, facendo l'assunzione di differenziabilita di  $V$ , per  $h \rightarrow 0$  il primo termine tende ad una derivata, mentre il secondo, che é un valore medio, tende al valore della funzione  $g$  all'istante  $t$ :

$$\min_u \left\{ \dot{V}(x(t)) + g(x(t), u(t)) \right\} = \min_u \{ \nabla V(x) \rho(x, u) + g(x, u) \} = \min_u \{ \Psi(x, u) \} = 0 \quad (8.1)$$

tale equazione é detta di Bellman: ha come funzione incognita  $V$ , che si dimostra essere una funzione di Lyapunov, e permette di calcolare l'ingresso ottimo da applicare indipendentemente dal tempo<sup>1</sup>.

Esiste una soluzione semplice al problema, nel caso di sistemi lineari e funzione di costo della forma:

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

con  $Q$  semidefinita positiva e  $R$  definita positiva. Tentando una soluzione di Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  l'equazione di Bellman diventa:

$$\min_u \{ 2x^T P (Ax + Bu) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \} = 0$$

---

<sup>1</sup>se  $x(t)=x$ , l'ingresso ottimo da applicare é  $u(t)=u$

per calcolare il minimo annulliamo il gradiente rispetto ad  $u^2$ :

$$\nabla_u \Psi(x, u) = 2x^T P B + 2u^T R = 0$$

e dato che  $R$  è simmetrica e definita positiva, trasponendo l'equazione e invertendola:

$$u_o = -R^{-1} B^T P x$$

si deduce che l'ingresso è in forma di retroazione dello stato con  $K = -R^{-1} B^T P$ . Per calcolare  $P$  utilizziamo l'equazione di Bellman:

$$\Psi(x, u_o) = 0 = 2x^T P A x + 2x^T P B (-R^{-1} B^T P x) + x^T Q x + x^T P B R^{-1} R R^{-1} B^T P x = 0$$

che rimaneggiando fornisce:

$$x^T [A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P] x = 0$$

e la soluzione è ottima  $\forall x$  se la matrice tra parentesi è nulla:

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (8.2)$$

Dunque  $P$  è la soluzione definita positiva dell'equazione di Riccati 8.2.

## 8.1 Esempi di controllo ottimale

- Dato il sistema  $\dot{x}(t) = u(t)$  determiniamo il regolatore ottimo secondo la cifra di merito:

$$J = \int_0^\infty [x^2(t) + r u^2(t)] dt$$

La funzione di costo è quella relativa ad un controllo lineare quadratico, in questo caso in forma scalare con  $Q = q = 1$  e  $R = r$  per il sistema  $A = 0$  e  $B = 1$ . L'equazione 8.2 per  $P = p$  corrispondente è:

$$x \left[ q - \frac{p^2}{r} \right] x = 0$$

annullando il termine tra parentesi:

$$p^2 = r \quad \Rightarrow \quad p = \pm \sqrt{r} \quad \Rightarrow \quad p = +\sqrt{r}$$

scogliamo la soluzione positiva perché  $P$  deve essere definita positiva. Il controllo ottimo è lineare ed in forma di retroazione dello stato, quindi:

$$u(t) = -\frac{p}{r} x(t) = -\frac{1}{\sqrt{r}} x(t)$$

- Si consideri il sistema scalare  $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ . Si determini il controllo  $u(t) = kx(t)$  ottimo rispetto alla cifra di merito:

$$J = \int_0^\infty [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

Anche in questo caso la funzione di costo è lineare quadratica con  $Q = R = 1$ , quindi la funzione di Riccati 8.2 per  $p$  in forma scalare risulta:

$$x \left[ -p - p + 1 - \frac{p^2}{r} \right] x = 0$$

da cui:

$$p^2 + 2p - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -1 \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad p = -1 + \sqrt{2}$$

Anche qui scogliamo la soluzione per cui  $p$  è definita positiva. Il controllo ottimo lineare quindi risulta:

$$u(t) = (1 - \sqrt{2})x(t)$$

---

<sup>2</sup>considerando  $x$  fissato

## 8.2 Tempo minimo di controllo

Dato il sistema  $\dot{x}(t) = u(t)$  con  $x, u \in \mathfrak{R}$ , e assunto  $x(0) = 3$  e  $|u(t)| \leq 1$  determiniamo il tempo minimo per portare lo stato a zero  $\min\{\tau : x(\tau) = 0\}$ .

integrando l'equazione:

$$\int_{x(0)}^{x(\tau)} dx(t) = \int_0^\tau u(t)dt$$
$$x(\tau) - x(0) = x(\tau) - 3 = \int_0^\tau u(t)dt$$

posto  $x(\tau) = 0$ , si ricava il vincolo:

$$\int_0^\tau u(t)dt = -3$$

ora, se si applica il modulo a tale equazione:

$$3 = \left| \int_0^\tau u(t)dt \right| \leq \int_0^\tau |u(t)|dt \leq \int_0^\tau 1dt = \tau$$

si conviene che lo stato é controllabile a zero per  $\tau \geq 3$ , ed il tempo minimo é quindi  $\tau = 3$ .

Non è difficile vedere che il controllo ottimo può essere espresso in forma di feedback e precisamente:

$$u(t) = -sgn(x)$$

dove  $sgn$  è la funzione segno. Il funzionale è esprimibile in forma integrale come:

$$J = \int_0^\tau 1dt$$

ovvero  $g \equiv 1$  e l'equazione 8.1 di Bellman in questo caso è:

$$\min_{|u| \leq 1} \left[ \frac{d}{dx} V(x)u + 1 \right] = 0$$

Il minimizzatore è  $u^* = -sgn(V'(x))$ . Sostituendo otteniamo:

$$-sgn(V'(x))V'(x) + 1 = -|V'(x)| + 1 = 0$$

Allora  $|V'(x)| = 1$ . Siccome  $V(0) = 0$ , allora

$$V(x) = |x|$$

e dunque  $u(t) = -sgn(x)$ .

# Appendice A

## A.1 Appendice1: programma per la simulazione dell'osservatore non lineare

```
function [x1, x2, x1_o, x2_o, t] = Oss_nl(n);
%-----
% evoluzione del sistema con approssimante di Newton
% con ingresso a gradino
h = 0.0001;
u = 1;
t = 0: h: h*(n);
x1 = zeros (size(t));
x2 = zeros (size(t));
n = length(t);

%condizioni iniziali
x = [4 ; 1];
x_new = [0 ; 0];

for k=1:n
    x_new(1,1) = x(1,1) + h * x(2,1) ;
    x_new(2,1) = x(2,1) + h * [atan(x(1,1)) + u];

    % salva i valori dell'evoluzione dello stato per utilizzarli con
    % l'osservatore
    x1(k) = x(1,1);
    x2(k) = x(2,1);

    x = x_new ;
end
%-----
%evoluzione dell'osservatore
%condizioni iniziali diverse
x_o = [5 ; -5];
x_new_o = [0 ; 0];

%setto i valori dei parametri l_ij dell'evoluzione dell'errore
l_11 = 5;
l_21 = 5;

x1_o = zeros (size(t));
x2_o = zeros (size(t));
```

```

for k=1:n
    x_new_o(1,1) = x_o(1,1) + h * [x_o(2,1) + l_11 * x1(1,k) - l_11 * x_o(1,1)];
    x_new_o(2,1) = x_o(2,1) + h * [atan(x_o(1,1)) + u + atan(x1(k)) + l_21 * x1(k)
                                   - atan(x_o(1,1)) - l_21 * x_o(1,1)];

    x1_o(k) = x_o(1,1);
    x2_o(k) = x_o(2,1);

    x_o = x_new_o;
end
%grafico
plot (t, x1_o, 'c', t, x2_o, 'm', t, x1,'b', t, x2, 'r')

```

## A.2 Appendice2: programma per la simulazione del buffer

```

function [t,P] = buffer( P_0,P_1,P_2 );

P = [(P_0+P_1)   P_0   0   0   0   ;
      P_2        P_1   P_0  0   0   ;
      0          P_2   P_1   P_0  0   ;
      0          0    P_2   P_1   P_0  ;
      0          0    0    P_2   (P_1+P_2)];

P_I = P-eye(5);

Base_nucleo = null(P-eye(5));
sum = Base_nucleo(1)+Base_nucleo(2)+Base_nucleo(3)+Base_nucleo(4)+Base_nucleo(5);

t = Base_nucleo/sum;
step = 0:1:n-1;

x1_plot = zeros(1,n);
x2_plot = zeros(1,n);
x3_plot = zeros(1,n);
x4_plot = zeros(1,n);
x5_plot = zeros(1,n);

%condizioni iniziali
x = [1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0];
x_new = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0];

for k=1:n
    x_new = P * x ;

    x1_plot(1,k) = x(1,1);
    x2_plot(1,k) = x(2,1);
    x3_plot(1,k) = x(3,1);
    x4_plot(1,k) = x(4,1);
    x5_plot(1,k) = x(5,1);
    x = x_new;
end

plot(step, x1_plot, 'ob', step, x2_plot, 'or', step, x3_plot, 'og',
      step, x4_plot, 'om', step, x5_plot, 'oc');

```

### A.3 Appendice3: simulazione del volano controllato in anello aperto

per calcolare numericamente l'evoluzione di  $\theta(t) = x_1(t)$  per  $0 < t < \tau$  occorre ricavare esplicitamente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \frac{\bar{\theta} J \pi^2}{2\tau^2} \int_0^{T_c} \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \cos \left[ \frac{\pi}{\tau} ((k+1)T_c - h) \right] dh$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\bar{\theta} \pi^2}{2\tau^2} \int_0^{T_c} h \cos \left[ \frac{\pi}{\tau} ((k+1)T_c - h) \right] dh = a(k) \\ \frac{\bar{\theta} \pi^2}{2\tau^2} \int_0^{T_c} \cos \left[ \frac{\pi}{\tau} ((k+1)T_c - h) \right] dh = b(k) \end{bmatrix}$$

In questo caso è possibile procedere a mano. Sviluppiamo gli integrali della matrice tempo variante:

$$b(k) = \frac{\bar{\theta} \pi}{2\tau} \left[ -\sin \left( \frac{\pi k T_c}{\tau} \right) + \sin \left( \frac{\pi (k+1) T_c}{\tau} \right) \right]$$

per  $a(k)$  procediamo per parti:

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{\bar{\theta} \pi^2}{2\tau^2} \left\{ \left[ -\frac{\tau}{\pi} \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} ((k+1)T_c - h) \right] \right]_0^{T_c} + \int_0^{T_c} \frac{\tau}{\pi} \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} ((k+1)T_c - h) \right] dh \right\} = \\ &= \frac{\bar{\theta}}{2} \left[ -\frac{T_c \pi}{\tau} \sin \left( \frac{\pi k T_c}{\tau} \right) + \cos \left( \frac{\pi k T_c}{\tau} \right) - \cos \left( \frac{\pi (k+1) T_c}{\tau} \right) \right] \end{aligned}$$

la matrice tempo variante è indicata con `temp` nel listato successivo. Per  $t > \tau$  essendo  $u(t) = 0$  il sistema evolve solo in risposta libera:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

```
function [x1_plot, x2_plot]=controllo_aperto(J, tau, teta, T_c,n)
```

```
A_D = [1 T_c ; 0 1];
```

```
t=0:T_c:(n-1)*T_c;
```

```
x1_plot = zeros(size(t));
```

```
x2_plot = zeros(size(t));
```

```
%condizioni iniziali
```

```
x = [0 ; 0];
```

```
x_new = [0 ; 0];
```

```
for k=0:(n-1) %valori di k per calcolare in modo corretto la matrice temp
```

```
if k*T_c < tau ;
```

```
temp = [(teta/2)*[(-T_c*pi/tau)*sin(pi*k*T_c/tau)+cos(pi*k*T_c/tau)-cos(pi*(k+1)*T_c/tau)];
```

```
(teta*pi/(2*tau))*[-sin(pi*k*T_c/tau)+sin(pi*(k+1)*T_c/tau)] ];
```

```
x_new = A_D*x + temp ;
```

```
x1_plot(k+1) = x(1,1);
```

```
x2_plot(k+1) = x(2,1);
```

```
x = x_new;
```

```
else %u=0
```

```
x_new = A_D*x ;
```

```
x1_plot(k+1) = x(1,1);
```

```
x2_plot(k+1) = x(2,1);
```

```

    x = x_new;
end
end

%per il grafico di u
u= zeros(size(t));
t1 = find(t< tau);
u(t1)=teta*J*(pi^2)*cos(pi*t(t1)/tau)/(2*(tau^2));

plot (t, u, 'b', t, x1_plot, 'r')

```

## A.4 Appendice4: simulazione del carrello con giunto elastico

Il sistema é stato simulato con e senza controllo dati i parametri  $\beta_1, \beta_2, \gamma$ . In entrambi i casi l'equazione alle differenze risolvete é il sistema discreto:

$$x(k+1) = e^{MT_c} x(ck)$$

con:

$$M = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

senza controllo, e:

$$M = [A + BK] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 5 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con controllo. Per trovare l'espressione delle rispettive matrici esponenziali si sono utilizzati i comandi  $A_D = \text{expm}(A * T_c)$ :

```

function carrello(T_c, n)

A = [0 0 1 0 ; 0 0 0 1 ; -2 2 0 0 ; 1 -1 0 0];
A_D = expm (A * T_c);

t=0:T_c:(n-1)*T_c;
x1_plot = zeros(size(t));
x2_plot = zeros(size(t));

%condizioni iniziali
% assegnando posizioni iniziali diverse il carrello oscilla.
% assegnando velocita' iniziali diverse il carrello si sposta.
% assegnando velocita' iniziali m_1 2m/s, m_2 -1m/s il carrello oscilla.
x = [0 ; 0 ; 10 ; -3 ];
x_new = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ];

for k=1:n
    x_new = A_D * x ;
    x1_plot (1,k)= x(1,1) ;
    x2_plot(1,k) = x(2,1) ;

    x = x_new;
end

```

```

plot(t, x2_plot,'r');

%-----
%in retroazione

A1 = [0 0 1 0 ; 0 0 0 1 ; -9 5 -5 -5; 1 -1 0 0];
A_D1 = expm (A1 * T_c);

x1_plot_retro = zeros(size(t));
x2_plot_retro = zeros(size(t));

%stesse condizioni iniziali
x_retro = [0 ;0 ;10 ;-3 ];
x_new_retro = [0 ;0 ;0 ;0];

    for k=1:n
        x_new_retro = A_D1 * x_retro ;
        x1_plot_retro(1,k)= x_retro(1,1);
        x2_plot_retro(1,k) = x_retro(2,1);

        x_retro = x_new_retro;
    end
hold on
plot(t, x2_plot_retro,'b');
hold off

```

## A.5 Appendice5: programma per la stima del dominio di attrazione

le traiettorie sono state calcolate per diverse condizioni iniziali, invertendo il sistema non lineare.

```

function [x1, x2] = attrazione_invertito(n);

% passo rapporto incrementale
h = 0.0001;

% Evoluzione partendo da diverse condizioni nell'intorno dell'origine.
% L'ultimo pixel viene colorato di rosso per individuare l'orientazione
for d=-3:3
    for p=-3:3
        x1 = zeros (1,n);
        x2 = zeros (1,n);
        x = [d/5 ; p/5];
        x_new = [0 ; 0];
        for k=1:n
            x_new(1,1) = x(1,1) - h * [-x(1,1)+x(2,1)];
            x_new(2,1) = x(2,1) - h * [-x(1,1)-x(2,1)+x(2,1)^3];
            x1(k) = x(1,1);
            x2(k) = x(2,1);
            x = x_new ;
        end
        figure(1)
        hold on
        plot (x1(1:n-1),x2(1:n-1));
        hold off
    end
end

```

```

    plot(x1(n), x2(n), 'r')
    hold off
    end
end
axis equal

```

Mentre per visualizzare la  $\dot{V}(x)$  e calcolare il valore  $k$  secondo la 7.1 corrispondente alla superficie di livello limite (che nel nostro caso, essendo  $X = \mathbb{R}^2$ , sarà una curva di livello) si é utilizzato il seguente listato. Il programma fornisce il valore di  $k=1.22$ .

```

function [k, t1, t2, t3, t4, V_p]=dominio

%grafico di V
[x1,x2]= meshgrid(-1.5:.002:1.5);
V = 0.5*x1.^2 +x2.^2-0.5* x1.*x2;
figure(2)
mesh(x1,x2,V);

%grafico V punto
figure(3)
[x1,x2]= meshgrid(-1.5:.002:1.5);
dotV = 2*(-0.25*x1.^2 - 1.25*x2.^2 -0.25*x1.*x2.^3 + x2.^4);
mesh(x1,x2,dotV);

%determino k
k = 10;
d = 0.0001;
for j = 1:size(x1),
    for l = 1:size(x2)
        if V(j,l) > 0.1 %escludo il punto nell'origine...
            if (dotV(j,l) < d) & (dotV(j,l) > -d) %equivale a dotV(j,l) == 0
                if V(j,l) < k
                    k = V(j,l);
                end
            end
        end
    end
end
end

%per disegnare l'ellisse
t1 =zeros(size(x1));
t2 =zeros(size(x1));

d = 0.002;
figure(4)
[x1,x2]= meshgrid(-1.8:.002:1.8);
ell = 0.5*x1.^2 +x2.^2-0.5*x1.*x2;
m=1;
for j = 1:length(x1)
    for l = 1:length(x2)
        if (ell(j,l) < k + d) & (ell(j,l) > k - d) %equivale a ell(j,l) == k
            t1(m) = x1(j,j);
            t2(m) = x2(l,l);
            m = m+1;
        end
    end
end
end
end

```

```

%disegna l'ellisse sovrapposto al precedente grafico
figure(1)
hold on
plot(t2, t1, 'rx', t4, t3, 'rx');
hold off
axis equal

```

Dove al posto delle condizioni di uguaglianza nei costrutti `if` sono state sostituite condizioni di appartenenza a piccoli intervalli di ampiezza  $2d$ : questo perché le superfici  $V$  e  $\dot{V}$  sono campionate con passo 0.002 definito nell'istruzione `meshgrid` e le matrici  $V$  e  $\dot{V}$  non necessariamente hanno elementi uguali a quelli specificati. Per verifica, tramite le successive istruzioni si può costruire il grafico della curva  $V(x) = k$  e verificare che l'insieme di sottolivello corrispondente  $\Upsilon$  è interamente contenuto nell'intorno per cui  $\dot{V}(x)$  è definita negativa e che  $k$  è valore limite. La spiegazione del-

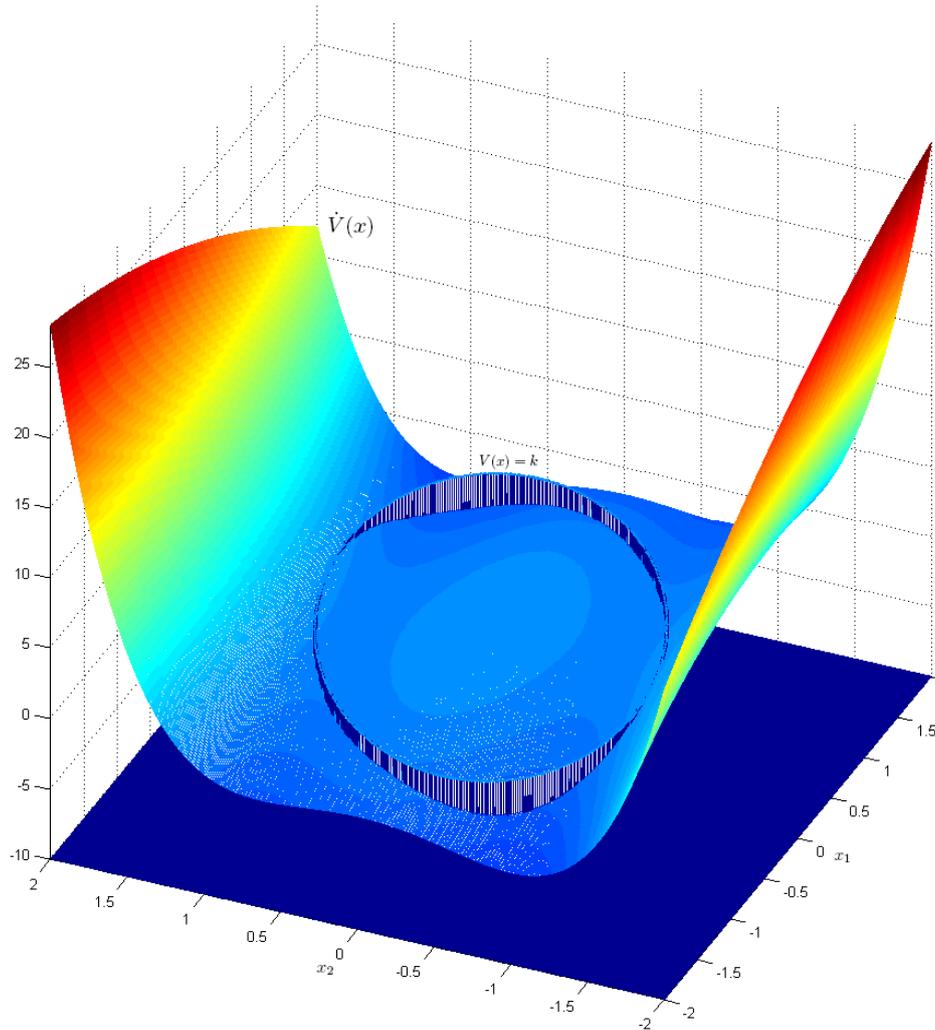


Figura A.1: verifica del dominio calcolato

l'algoritmo applicata a questo caso sta in questo: tra tutti i punti per cui vale  $\dot{V} = 0$  viene calcolato il valore di  $V$ .  $k$  sarà il valore di  $V$  minore tra quelli considerati e l'ellisse tangente sarà la curva di livello  $V = k$ <sup>1</sup>.

```
%verifica ellisse
```

<sup>1</sup>nella figura tale ellisse è stato disegnato con altezza pari a zero solo per verificare che esso è tangente alla superficie di  $\dot{V}$  in  $\dot{V} = 0$

```

figure(5)
[x1,x2]= meshgrid(-2:.01:2);
d=0.02;
ell = 0.5*x1.^2 +x2.^2-0.5* x1.*x2;
for j=1:size(x1)
    for l = 1:size(x2)
        if (ell(j,l) < k + d) & (ell(j,l) > k - d)
            ell(j,l) = 0;
            %in questo caso l'ellisse risulta tangente alla curva di livello dotV=0
        else
            ell(j,l) = -10;
        end
    end
end
end
mesh(x1,x2,ell);
hold on
    mesh(x1,x2,dotV_p);
hold off

```

## A.6 Appendice6: programma per la costruzione della tabella di Routh-Hurvitz

il listato seguente calcola la tabella di Routh e fornisce il numero di radici instabili di un polinomio generico.

```

function [R] = routh(v)
% v il vettore dei coefficienti del polinomio

%ricava le dimensioni della tabella
if rem(length(v),2)==1
    col = (length(v)+1)/2;
else
    col = length(v)/2;
end
R = zeros(length(v), col);

%crea le prime righe della tabella di Routh-Hurvitz
i=1;
for j=1:col
    R(1,j) = v(i);
    i = i+2;
end
i=2;
for j=1:col
    if i <= length(v)
        R(2,j) = v(i);
    end
    i = i+2;
end

for i = 3:length(v)
    for j = 1: col
        if j+1 <= col
            R(i,j) = [ R(i-1 , 1) * R(i-2 , j+1) - R(i-2 , 1) * R(i-1 , j+1) ]
                    / R(i-1 , 1);
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    R

% conta le radici a parte reale positiva
count = 0;
s = 1;
for i =1: length(v)
    if sign(R(i,1)) ~= s
        count = count +1;
        s = sign(R(i,1));
    end
end
if count > 0
    count
    disp('radici instabili');
end

% controlla i coefficienti della prima riga
p=0;
for i =1: length(v)
    if R(i,1)==0
        p=1;
    end
end
if p==1
    disp('si esclude stabilita asintotica');
end

```

Per esempio prendiamo un polinomio di grado elevato:

$$p(s) = s^{10} + 23s^9 - 34s^8 + 5s^7 - 10s^6 + 2s^5 + 3s^4 + 43s^3 + 5s^2 + 10s + 2$$

occorre passare alla funzione il vettore:

$$v = [1 \ 23 \ -34 \ 5 \ -10 \ 2 \ 3 \ 43 \ 5 \ 10 \ 2];$$

```

>> v = [ 1 23 -34 5 -10 2 3 43 5 10 2]
>> R = routh(v2);

```

R =

1.0000	-34.0000	-10.0000	3.0000	5.0000	2.0000
23.0000	5.0000	2.0000	43.0000	10.0000	0
-34.2174	-10.0870	1.1304	4.5652	2.0000	0
-1.7802	2.7598	46.0686	11.3443	0	0
-63.1349	-884.3697	-213.4882	2.0000	0	0
27.6959	52.0882	11.2880	0	0	0
-765.6307	-187.7565	2.0000	0	0	0
45.2963	11.3603	0	0	0	0
4.2634	2.0000	0	0	0	0
-9.8885	0	0	0	0	0
2.0000	0	0	0	0	0

count =

6

radici instabili

é possibile verificare il numero di radici instabili calcolando direttamente le radici con il comando roots:

```
>> roots(v2)
```

```
ans =
```

```
-24.4024  
 1.3406 + 0.3657i  
 1.3406 - 0.3657i  
 0.1723 + 0.9995i  
 0.1723 - 0.9995i  
-0.7630 + 0.5343i  
-0.7630 - 0.5343i  
 0.0459 + 0.4994i  
 0.0459 - 0.4994i  
-0.1891
```

## A.7 Appendice7: programma per la simulazione dell'osservatore continuo

Sono state utilizzate due procedure separate, quella per la simulazione del sistema di partenza:

```
function [x1_plot, x2_plot, y, c, t] = sistema(T_c, n)  
  
%costruisce le matrici dell'equivalente discreto  
A=[-1 1; -1 -1];  
E=[1 ; 0];  
C=[1 0];  
disp('autovalori sistema di partenza')  
eig(A)  
  
%equivalente discreto  
A_D=[ exp(-T_c)*cos(T_c), exp(-T_c)*sin(T_c) ;  
      -exp(-T_c)*sin(T_c), exp(-T_c)*cos(T_c) ] ;  
E_D= [-1/2*exp(-T_c)*cos(T_c)+1/2*exp(-T_c)*sin(T_c)+1/2 ;  
      1/2*exp(-T_c)*cos(T_c)+1/2*exp(-T_c)*sin(T_c)-1/2 ] ;  
C_D= C ;  
  
disp('valore di c, random tra -150/150')  
c=rand*300-150  
  
%calcolo i vettori d'uscita e l'evoluzione dello stato  
y = zeros(1,n);  
x1_plot = zeros(1,n);  
x2_plot = zeros(1,n);  
t=0:T_c:T_c*(n-1);  
  
%condizioni iniziali nulle provo random  
x = [rand*100-50 ; rand*100-50];  
disp('condizioni iniziali random per il sistema (-50/50)')  
x  
  
xnew = [0 ; 0];
```

```

for k=1:n
    xnew = A_D * x + E_D * c;
    y(k) = C_D * x;

    x1_plot(k) = x(1,1);
    x2_plot(k) = x(2,1);
    x = xnew;
end

e quelle dell'osservatore:

function [x1o_plot, x2o_plot, x3o_plot] = osservatore_sym(c, T_c, n)

A=[-1 1 1; -1 -1 0; 0 0 0];
L=[18 ; -154 ;260];
C=[1 0 0];

A_o=A-L*C
disp('autovalori osservatore')
eig(A_o)

[Taut, V]=eig(A_o);
Saut = inv(Taut);
disp('matrice equivalente discreto osservatore')
A_o_D = Taut*[exp(-10*T_c) 0 0; 0 exp((-5+i)*T_c) 0; 0 0 exp((-5-i)*T_c)]*Saut

%calcolo le stime asintotiche delle variabili di stato
x1o_plot = zeros(1,n);
x2o_plot = zeros(1,n);
x3o_plot = zeros(1,n);

%condizioni iniziali random per l'osservatore tra -50/50
xo = [rand*100-50; rand*100-50; rand*100-50];
xo_new=[0 ; 0 ; 0];

disp('condizioni iniziali random (-50/50) osservatore')
xo

%vettore condizioni iniziali sistema di partenza visto come 3x3
x_0 = [0 ; 0; c];

%crea le variabili per la matrice tempovariante temp
h = sym('h');
k = sym ('k');

for k=0:(n-1)
    %calcolo la matrice tempo variante
    matrice = expm((A-L*C)*h) * L * C * expm(A*((k+1)*T_c-h));
    Integrale = int(matrice, h, 0, T_c);
    temp = double(integrale);
    xo_new = A_o_D * xo + temp * x_0;

    x1o_plot(k+1) = xo(1,1);
    x2o_plot(k+1) = xo(2,1);
    x3o_plot(k+1) = xo(3,1);
    xo = xo_new;
end

```

si può simulare il sistema con queste istruzioni<sup>2</sup> dall'ambiente principale:

```
>>[x1_plot, x2_plot, y, c, t] = sistema(0.1,100);  
>>[x1o_plot, x2o_plot, x3o_plot] = osservatore_sym(c, 0.1, 100);  
>>plot(t, x1_plot,'b', t, x1o_plot,'c', t, x2_plot, 'r', t, x2o_plot, 'm',  
      t, x3o_plot, 'g');
```

---

<sup>2</sup>non necessariamente  $k$  deve essere un oggetto `sym`: la sua definizione può essere saltata, definendo  $k$  come semplice contatore

# Bibliografia

- [1] P.Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni, Fondamenti di controlli automatici, Mcgraw-Hill;
- [2] E.Fornasini, G.Marchesini, appunti di TEORIA DEI SISTEMI, Edizioni Libreria Progetto, Padova;
- [3] M.Bramanti, C.Pagani, S.Salsa, MATEMATICA calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli;
- [4] F.Blanchini, dispensa: Proprietá strutturali dei sistemi lineari invarianti;
- [5] F.Blanchini, F.A. Pellegrino, dispensa: Analisi dei sistemi lineari;