

**TEORIA DEI SISTEMI E DEL CONTROLLO**  
Appunti delle lezioni tenute dal prof. Franco Blanchini  
*Università degli studi di Udine - A. A. 2002 - 2003*

a cura di  
Luca Peretti

29 novembre 2012



# Prefazione

Questi appunti di *Teoria dei Sistemi* sono una versione rivista degli appunti redatti dal Dott. Luca Peretti durante il corso tenuto dal Prof. Franco Blanchini nell'anno accademico 2002-2003.

Vista la loro natura, questi appunti **NON** sono da considerarsi come un sostituto di un buon libro di testo ma servono solo per fornire una traccia sugli argomenti svolti.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sistemi di equazioni differenziali e alle differenze</b>	<b>5</b>
2.1	Sistemi di equazioni differenziali . . . . .	5
2.2	Soluzione generale del sistema . . . . .	8
2.3	La risposta libera . . . . .	10
2.4	La risposta forzata . . . . .	10
2.5	La soluzione completa del sistema . . . . .	11
2.6	Calcolo dell'esponenziale $e^{At}$ . . . . .	12
2.7	Studio tramite trasformata di Laplace . . . . .	16
2.8	Stabilità . . . . .	17
2.9	La risposta in frequenza . . . . .	20
2.10	I sistemi a tempo discreto . . . . .	21
2.11	Trasformazione di stato . . . . .	24
2.12	I sistemi a tempo campionato . . . . .	25
2.12.1	La conversione analogico-digitale . . . . .	25
2.12.2	La conversione digitale-analogica . . . . .	26
2.12.3	L'aliasing . . . . .	27
2.13	Equivalente discreto di un sistema continuo . . . . .	28
<b>3</b>	<b>I sistemi dinamici</b>	<b>33</b>
3.1	Considerazioni generali . . . . .	33
3.2	Sistemi dinamici causali . . . . .	34
3.3	Gli automi come sistemi dinamici . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Raggiungibilità ed osservabilità</b>	<b>41</b>
4.1	Raggiungibilità nei sistemi a tempo continuo . . . . .	41
4.2	Decomposizione di Kalman per la raggiungibilità . . . . .	44
4.3	Raggiungibilità nei sistemi a tempo discreto . . . . .	48
4.4	Altri criteri di raggiungibilità . . . . .	51
4.5	Osservabilità e ricostruibilità . . . . .	58
4.6	Decomposizione di Kalman per l'osservabilità . . . . .	60
4.7	Osservabilità dei sistemi discreti . . . . .	62
4.8	Dualità . . . . .	66

4.9	Rappresentazione di stato e funzione di trasferimento . . . . .	67
4.10	Cancellazioni . . . . .	69
4.11	Stabilità esterna . . . . .	72
4.12	Forma canonica di controllo . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Realizzazione</b>	<b>75</b>
5.1	Il problema in generale . . . . .	75
5.2	Realizzazione minima . . . . .	77
5.3	Realizzazione minima per $m = p = 1$ . . . . .	78
5.4	Realizzazione di sistemi a tempo discreto . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Regolazione di sistemi</b>	<b>81</b>
6.1	Considerazioni generali . . . . .	81
6.2	Retroazione dello stato . . . . .	84
6.2.1	Un semplice algoritmo per l'assegnazione . . . . .	86
6.3	Osservatore dello stato . . . . .	87
6.4	Sintesi del regolatore . . . . .	92
6.5	Disturbi esterni . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Sistemi non lineari</b>	<b>99</b>
7.1	Considerazioni generali . . . . .	99
7.2	Punti di equilibrio . . . . .	101
7.3	Funzioni di Lyapunov . . . . .	102
7.4	Criterio di Lyapunov per sistemi discreti . . . . .	111
7.5	Equazioni di Lyapunov per sistemi lineari . . . . .	112
7.6	Linearizzazione . . . . .	115
7.7	Analisi della stabilità del punto di equilibrio . . . . .	118
7.8	Stabilizzazione . . . . .	121
7.9	Robustezza della stabilità . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Rudimenti di controllo ottimo</b>	<b>125</b>
8.1	Considerazioni generali . . . . .	125
8.2	Programmazione dinamica . . . . .	125
8.2.1	Controllo lineare quadratico . . . . .	126
8.2.2	Osservatore ottimo–Filtro di Kalman–Bucy . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Esempi di sistemi dinamici</b>	<b>129</b>
9.1	Macchina elettrica in corrente continua . . . . .	129
9.2	Il braccio di un robot antropomorfo . . . . .	133
9.3	Il pagamento di un mutuo . . . . .	135
9.4	Sistemi vibranti . . . . .	136
9.5	Circuiti elettrici . . . . .	138
9.6	Amplificatori operazionali . . . . .	140
9.7	Sistema a due vasche . . . . .	142

---

9.8	Levitatore magnetico . . . . .	145
<b>A</b>	<b>Richiami di matematica</b>	<b>147</b>
A.1	Algebra lineare . . . . .	147
A.1.1	Spazi vettoriali . . . . .	147
A.1.2	Matrici . . . . .	149
A.1.3	Autovalori e autovettori . . . . .	155
A.1.4	Prodotto scalare . . . . .	158
A.1.5	Matrici simmetriche . . . . .	159
A.1.6	Matrici semidefinite e definite . . . . .	160
A.1.7	Polinomi e serie di potenze . . . . .	162
A.2	La risposta impulsiva . . . . .	164
A.3	Trasformate di Laplace . . . . .	166
A.3.1	Definizione e proprietà fondamentali . . . . .	166
A.3.2	Trasformate principali . . . . .	167
A.3.3	Antitrasformate di funzioni razionali proprie . . . . .	169
A.4	Trasformata Zeta . . . . .	173





# Elenco delle figure

1.1	Schema generale di un sistema dinamico . . . . .	1
1.2	Esempio di sistema lineare invariante: la bilancia . . . . .	2
1.3	Grafico qualitativo del transitorio di una bilancia . . . . .	3
2.1	Modello di un pendolo . . . . .	7
2.2	Sistema con $m$ ingressi e $p$ uscite . . . . .	12
2.3	Schema di una semplice struttura elastica . . . . .	12
2.4	Convergenza di $z(t)$ per $t \rightarrow +\infty$ . . . . .	18
2.5	Stabilità di un sistema . . . . .	18
2.6	Pendolo e pendolo rovesciato . . . . .	19
2.7	Fasori della risposta in frequenza di un sistema . . . . .	21
2.8	Conversione analogico-digitale . . . . .	25
2.9	Funzionamento qualitativo di un convertitore analogico-digitale . . . . .	26
2.10	Mantenimento di ordine zero . . . . .	26
2.11	Mantenimento di ordine uno . . . . .	27
2.12	Errore con mantenimento di ordine zero . . . . .	27
2.13	Segnale a banda limitata . . . . .	28
2.14	Controllo discreto per processo continuo . . . . .	29
2.15	Equivalenza sistema continuo - sistema discreto . . . . .	30
3.1	Diverse tipologie di sistema . . . . .	33
3.2	Grafo di flusso per automi finiti . . . . .	38
3.3	Esempio di automa: riconoscimento di una stringa . . . . .	38
4.1	Decomposizione di Kalman per la raggiungibilità . . . . .	46
4.2	Schema a blocchi semplificato della decomposizione di Kalman . . . . .	46
4.3	Circuito per un esempio di raggiungibilità . . . . .	55
4.4	Decomposizione di Kalman per l'osservabilità . . . . .	61
4.5	Diagramma di Bode di un derivatore reale, con polo a $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . . . . .	64
5.1	Schema a blocchi della realizzazione minima con $m = p = 1$ . . . . .	79
6.1	Suddivisione di ingressi ed uscite in un sistema . . . . .	81
6.2	Sistema lineare retroazionato . . . . .	82
6.3	Studio della retroazione dello stato . . . . .	83

6.4	Osservatore dello stato . . . . .	83
6.5	Schema generale di un sistema . . . . .	87
6.6	Evoluzione dello stato (linea continua) e dell'errore (linea tratteggiata) con l'osservatore banale . . . . .	88
6.7	Evoluzione qualitativa dell'errore nel caso di buon osservatore: evoluzione dello stato (linea continua), della stima (linea tratteggiata) e dell'errore (linea puntata) . . . . .	89
6.8	Schema generale dell'osservatore di Luemberger . . . . .	89
6.9	Sistema di posizionamento . . . . .	91
6.10	Schema a blocchi del controllore basato sull'osservatore . . . . .	93
7.1	Evoluzione di una popolazione per diverse condizioni iniziali . . . . .	100
7.2	Evoluzione di una popolazione con ingresso esterno; linea A: soglia estinzione; linea B: soglia sovrappopolamento . . . . .	102
7.3	Esempi di punti di equilibrio stabili ed instabili . . . . .	103
7.4	Curve di livello per una funzione di Lyapunov . . . . .	104
7.5	Pendolo semplice . . . . .	106
7.6	Insiemi N e W e vettore $\dot{x}(t)$ . . . . .	109
7.7	Traiettorie del pendolo dissipativo . . . . .	110
7.8	Rappresentazione intuitiva del criterio di Cetaev . . . . .	110
7.9	Controllore per sistema linearizzato in un punto di equilibrio . . . . .	117
7.10	Schema di principio di regolatore per un sistema non lineare . . . . .	122
9.1	Modello generale di un motore elettrico . . . . .	129
9.2	Collegamento di tipo parallelo . . . . .	130
9.3	Collegamento di tipo serie . . . . .	131
9.4	Collegamento di tipo indipendente . . . . .	131
9.5	Schemi di un braccio di robot antropomorfo . . . . .	133
9.6	Schema del controllo di un braccio di robot antropomorfo. $r$ e $v$ sono i riferimenti di posizione e velocità . . . . .	134
9.7	Edificio sotto azione sismica . . . . .	136
9.8	Esempio di circuito lineare . . . . .	139
9.9	Amplificatore operazionale . . . . .	140
9.10	Amplificatore retroazionato in configurazione invertente . . . . .	141
9.11	Amplificatore retroazionato sommatore . . . . .	142
9.12	Sistema costituito da più vasche . . . . .	143
9.13	Esempio di segmentazione . . . . .	144
9.14	Il levitatore magnetico . . . . .	146
A.1	Mappe lineari . . . . .	149
A.2	Grafico della funzione quadratica $V(x)$ . . . . .	161
A.3	Curve di livello della funzione quadratica $V(x)$ . . . . .	161
A.4	L'impulso può essere pensato come il limite di una successione di funzioni. . . . .	165

# Capitolo 1

## Introduzione

Il titolo della materia *Teoria dei Sistemi* in realtà omette un termine importante. Per essere più precisi si dovrebbe infatti parlare di *Teoria dei Sistemi Dinamici*. Con il termine “sistemi dinamici” ci riferiamo genericamente a tutte quelle entità, che evolvono nel tempo secondo leggi di causalità. Tali entità interagiscono con l’ambiente secondo un principio di causa–effetto.

Dal punto di vista esterno un sistema dinamico è caratterizzato da un insieme di funzioni di ingresso che costituiscono in qualche modo la causa e un certo numero di funzioni di uscita che sono l’effetto (figura (1.1)). La caratteristica fondamentale di un oggetto di questo tipo è che il legame tra ingresso e uscita non è di tipo statico ma è intrinsecamente legato al tempo.

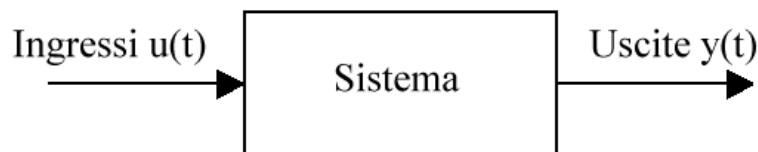


Figura 1.1: Schema generale di un sistema dinamico

Ad esempio, consideriamo un sistema la cui uscita  $y(t)$  è legata all’ingresso  $u(t)$  tramite l’equazione differenziale

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = u(t)$$

Quando  $u(t)$  è assegnato, la soluzione dell’equazione descrive l’evoluzione nel tempo di  $y(t)$ . Se consideriamo un ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$ , questa equazione differenziale ammette una soluzione di tipo statico che può essere facilmente individuata ponendo  $y''(t) = y'(t) = 0$ . Tale soluzione è

$$y = \frac{\bar{u}}{b}$$

Ovviamente, limitandoci a considerare solo soluzioni di questo, perderemmo di vista un aspetto fondamentale, cioè la risposta transitoria del sistema in relazione ad un ingresso assegnato. Il fatto che ad un singolo ingresso possano corrispondere più risposte del sistema è una caratteristica peculiare dei sistemi dinamici.

La Teoria dei Sistemi nota dagli inizi del 900 si è sviluppata profondamente intorno agli anni '50 - '60 con l’intento cercare di spiegare il funzionamento dinamico di una ampia classe di

oggetti. In realtà, tale teoria è in grado di dire qualcosa di veramente significativo solo in casi molto particolari, quale quello dei sistemi dinamici regolari ovvero esprimibili tramite equazioni differenziali.

Un sottocaso molto interessante è dato dai *sistemi lineari invarianti* per i quali sono stati studiati degli strumenti molto potenti. Alcune delle tecniche sviluppate per questo tipo di sistemi si possono applicare, tramite la tecnica della linearizzazione, allo studio di altri tipi di sistemi. Questo è un aspetto estremamente importante, e giustifica il fatto che la maggior parte del corso sarà dedicata allo studio di sistemi lineari invarianti.

### Esempio: la bilancia

La bilancia costituisce un semplice esempio di sistema lineare invariante. Consideriamo la figura (1.2).

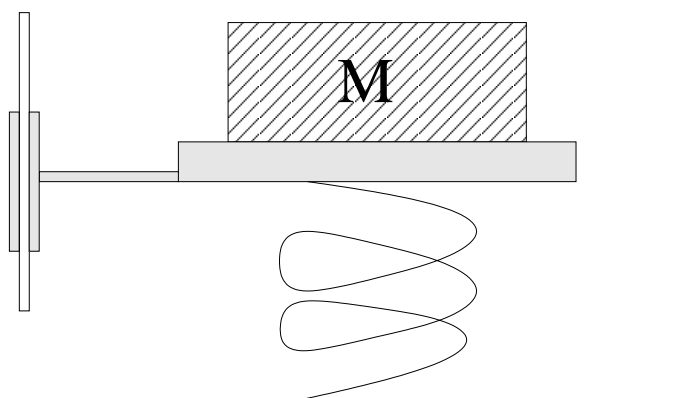


Figura 1.2: Esempio di sistema lineare invariante: la bilancia

Supponendo che la massa del piatto della bilancia sia trascurabile rispetto a quella dell'oggetto da pesare e assunto che l'attrito viscoso sia di tipo lineare, si può facilmente ricavare l'equazione differenziale che governa il sistema:

$$M\ddot{y}(t) + h\dot{y}(t) + ky(t) = Mg$$

$y(t)$  rappresenta lo spostamento verticale del piatto mentre  $M$ ,  $h$ ,  $k$  e  $g$  rappresentano rispettivamente la massa dell'oggetto, la costante di attrito, la costante elastica della molla e l'accelerazione gravitazionale. E' possibile ottenere il valore di  $y(t)$  quando il sistema si è assestato ponendo  $\ddot{y}(t) = \dot{y}(t) = 0$ . Si ricava quindi

$$\bar{y} = \frac{Mg}{k}$$

Prima di giungere a questa relazione statica, la bilancia è comunque sottoposta ad un transitorio che dipende dal valore del coefficiente di attrito, secondo quanto qualitativamente riportato in figura (1.3).

Chiaramente nel caso della bilancia l'aspetto più interessante è la condizione di regime. Esistono però altri casi in cui il comportamento dinamico del sistema ha un ruolo fondamentale. Un esempio di questo tipo è dato dalla progettazione di un edifici. Questi vengono normalmente pro-

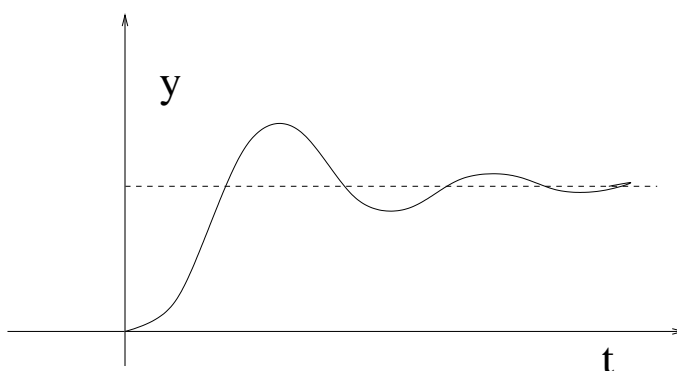


Figura 1.3: Grafico qualitativo del transitorio di una bilancia

gettati per sostenere dei carichi che vengono considerati statici. Limitarsi a questo tipo di studio è corretto solo se la struttura non risente di carichi che variano nel tempo in modo sostanziale. Quando l'ubicazione dell'edificio è in una zona sismica o dove ci sono forti venti è quindi necessario progettare l'edificio modellandolo come un sistema dinamico.



## Capitolo 2

# Sistemi di equazioni differenziali e alle differenze

In questo capitolo verranno brevemente presentate nozioni fondamentali che serviranno da supporto tecnico per lo studio che seguirà. Il materiale presentato dovrebbe essere oggetto di corsi precedenti al presente. Tuttavia, vista la sua importanza, è opportuno richiamarne gli aspetti fondamentali.

### 2.1 Sistemi di equazioni differenziali

La classe che tratteremo maggiormente è quella dei sistemi descritti da equazioni differenziali, detti sistemi regolari. Un sistema regolare presenta un certo numero di variabili dette ingressi e un certo numero di variabili dette uscite, in numero non necessariamente uguale. Indicheremo con  $u(t)$  e  $y(t)$  rispettivamente il **vettore degli ingressi** e il **vettore delle uscite**:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^m \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^p \quad (2.1)$$

Il sistema è internamente rappresentato da un certo numero di **variabili di stato**  $x(t)$ , anch'esse riportate in un vettore:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \quad (2.2)$$

Consideriamo, per esempio il motore elettrico descritto nella Sezione 9.1. Questo è un sistema dinamico in cui possiamo assumere:

- vettore degli ingressi:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_f(t) \\ v_a(t) \\ C_m(t) \end{bmatrix}$$

- vettore delle uscite:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

- vettore di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} I_f(t) \\ I_a(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$$

Si noti come alcune variabili di stato coincidano con le uscite desiderate. In generale le variabili di stato sono legate agli ingressi secondo equazioni differenziali. Se tali equazioni sono del primo ordine ed esprimibili nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1, \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1, \dots, u_m(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

il sistema si dice in forma normale. E' ovviamente auspicabile cercare una forma compatta che permetta di maneggiare le equazioni in modo più agevole. Consideriamo quindi il vettore delle derivate delle variabili di stato

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \quad (2.4)$$

Le equazioni precedenti si riducono alla seguente relazione di tipo vettoriale:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.5)$$

Questa equazione rappresenta il generico sistema regolare di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine con  $m$  ingressi. Esso rappresenta un legame istantaneo tra le derivate delle variabili di stato con le  $x(t)$  stesse e gli ingressi del sistema.

### Esempio: sistema di 3 equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 2x_3(t)^2 + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + \cos(x_2(t)) + u_1(t)u_2(t) \end{cases}$$

Si osservi come non sia strettamente necessario che tutti gli ingressi o le variabili di stato compaiano nelle singole equazioni.

Secondo la teoria delle equazioni differenziali, per risolvere l'equazione (2.5), noti il valore degli ingresso  $u(t)$ , è necessario conoscere le condizioni iniziali ad un certo istante  $t_0$ . Ciò significa che per ottenere una soluzione  $x(t)$  si deve conoscere la condizione iniziale del sistema  $x(t_0)$ .



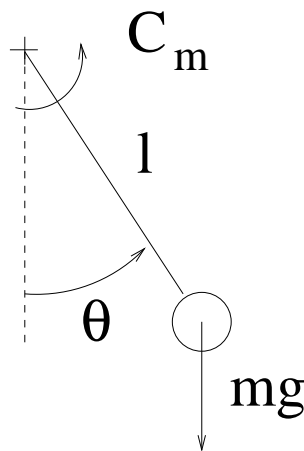
**Esempio: il pendolo**

Figura 2.1: Modello di un pendolo

Si consideri la figura (2.1), in cui  $C_m$  è la coppia motrice (ingresso del sistema) e  $y = \theta$  è l'angolo in riferimento rispetto alla verticale (uscita del sistema). L'equazione che regola tale sistema in assenza di attrito é

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \frac{1}{ml^2} C_m(t)$$

Per conoscere il valore dell'uscita al generico istante  $t$  non è sufficiente sapere l'evoluzione temporale della coppia motrice: è necessario anche fissare la posizione e la velocità iniziali del pendolo. Note entrambe queste grandezze è possibile risalire alla funzione  $\theta(t)$  che ne descrive la traiettoria integrando l'equazione differenziale.

Il sistema descritto dall'equazione (2.5) si dice **invariante** o **autonomo** se non dipende direttamente dal tempo (tuttavia ne dipende indirettamente, tramite l'argomento di  $x$  e di  $u$ ):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.6)$$

**Esempio**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -t x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

è un sistema non invariante.

Il sistema è detto **lineare** se è lineare rispetto  $x(t)$  ed  $u(t)$ , ed è quindi esprimibile come:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.7)$$

Un sistema si dice invece **lineare invariante** se possiede tutte le due precedenti proprietà:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.8)$$

In quest'ultimo caso, le matrici A (dimensione  $n \times n$ ) e B (dimensione  $n \times m$ ) non dipendono dal tempo in maniera diretta.

Le grandezze di uscita nei sistemi regolari sono rappresentate dalle componenti di un vettore  $y(t)$ . Esse sono definite dal seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ y_p(t) = g_p(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases} \quad (2.9)$$

che può essere scritto in forma compatta:

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.10)$$

Questa equazione vettoriale è detta **trasformazione di uscita**. Se il sistema è invariante, la trasformazione d'uscita è del tipo:

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (2.11)$$

mentre se il sistema è lineare, si ha:

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.12)$$

Se, infine, il sistema è lineare invariante, la trasformazione d'uscita assume questa forma:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.13)$$

dove C (dimensione  $p \times n$ ) e D (dimensione  $p \times m$ ) sono matrici indipendenti dal tempo.

## 2.2 Soluzione generale del sistema

Ponendo insieme le equazioni per le variabili di stato e per le uscite, si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.14)$$

che è la forma più generale per descrivere l'evoluzione temporale di un sistema dinamico. In questa sede si tratteranno in particolare i sistemi lineari invarianti, per cui le equazioni saranno del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

Per tale classe di sistemi, è possibile determinare una soluzione analitica, cosa che risulta impossibile per maggior parte dei sistemi se non si usano tecniche numeriche. Tuttavia, la soluzione che ricaviamo non sarà utilizzata numericamente ma qualitativamente. Precisamente, da tale

soluzione ricaveremo una serie di informazioni che ci permetteranno di formulare considerazioni estremamente utili sul sistema considerato.

Supponiamo che  $u(t)$  e  $x(0)$  siano noti (dato che il sistema è invariante, è stato scelto  $t_0 = 0$ ). Da un'attenta osservazione delle equazioni, è facile convincersi che basta ricavare  $x(t)$  per risolvere l'intero sistema, dato che  $y(t)$  è legata ad  $x(t)$  da semplici equazioni di tipo algebrico. Lo scopo è quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) \text{ noto} \end{cases} \quad (2.16)$$

Una proprietà fondamentale applicabile a questa classe di sistemi è il **principio di sovrapposizione degli effetti**. In questo caso, se  $u(t)$  e  $x(0)$  sono un ingresso e un vettore di condizioni iniziali esprimibili come segue

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha u^*(t) + \beta u^{**}(t) \\ x(0) &= \alpha x^*(0) + \beta x^{**}(0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

allora la soluzione del sistema, data la linearità delle equazioni, si ricava dalla combinazione lineare delle soluzioni date dalle singole componenti di  $u(t)$  e  $x(0)$ . Precisamente, associamo al simbolo  $\longrightarrow$  il significato di “danno origine alla soluzione” si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} x^*(0), u^*(t) &\longrightarrow x^*(t) \\ x^{**}(0), u^{**}(t) &\longrightarrow x^{**}(t) \\ \alpha x^*(0) + \beta x^{**}(0), \alpha u^*(t) + \beta u^{**}(t) &\longrightarrow \alpha x^*(t) + \beta x^{**}(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

In particolare, è possibile scomporre  $x(0)$  e  $u(t)$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x(0) &: x^*(0) = 0, \quad x^{**}(0) = x(0) \\ u(t) &: u^*(t) = u(t), \quad u^{**}(t) = 0 \end{aligned}$$

in maniera di dividere il problema del calcolo della risposta in due sotto-problemi:

- **Problema della risposta libera** (condizioni iniziali assegnate, ingresso nullo):

$$\begin{cases} \dot{x}_L(t) = Ax_L(t) \\ x_L(0) = x(0) \end{cases} \quad (2.19)$$

- **Problema della risposta forzata** (condizioni iniziali nulle, ingresso assegnato):

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = Ax_F(t) + Bu(t) \\ x_F(0) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti con  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$  si ottiene:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t) \quad (2.21)$$

## 2.3 La risposta libera

Come abbiamo già visto, la risposta libera è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_L(t) = Ax_L(t) \\ x_L(0) = x(0) \end{cases}$$

Se si considera il caso scalare, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_L(t) = ax_L(t) \\ x_L(0) = x(0) \end{cases} \Rightarrow x(t) = x(0) e^{at}$$

Infatti, per  $t = 0$  l'esponenziale è pari a 1, e  $\dot{x} = a x(0) e^{at} = ax(t)$ . E' facile allora immaginare che la soluzione in  $\mathbf{R}^n$  sia in qualche modo simile a quella del caso scalare. A questo scopo definiamo l'esponenziale di una matrice:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (2.22)$$

Questa risulta essere una serie convergente (il fattoriale domina sull'elevamento a potenza per  $k \rightarrow +\infty$ )<sup>1</sup>. Si può allora facilmente verificare che la risposta libera del sistema è pari a:

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (2.23)$$

Infatti, per  $t = 0$  si ha

$$e^{A0}x(0) = Ix(0) = x(0) \quad (2.24)$$

mentre si può anche vedere che:

$$\frac{d}{dt}(e^{At}x(0)) = A(e^{At}x(0)) \Rightarrow \dot{x}_L(t) = Ax_L(t) \quad (2.25)$$

## 2.4 La risposta forzata

La risposta forzata è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = Ax_F(t) + Bu(t) \\ x_F(0) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Si può dimostrare che la soluzione è pari a:

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma \quad (2.27)$$

cioè un prodotto di convoluzione. Ciò è facilmente verificabile se si applica la trasformata di

---

<sup>1</sup>si noti che l'espressione è diversa dalla matrice ottenuta facendo l'esponenziale di ogni singolo elemento della matrice

Laplace all'equazione del sistema:

$$\begin{aligned} s x_F(s) - x_F(0) &= A x_F(s) + B u(s) \\ \Rightarrow (sI - A) x_F(s) &= B u(s) \\ \Rightarrow x_F(s) &= (sI - A)^{-1} B u(s) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ricordando che la trasformata di Laplace di un prodotto di convoluzione è pari al prodotto delle singole trasformate, si ha:

$$\begin{aligned} u(\sigma) &\xrightarrow{\mathcal{L}} u(s) \\ e^{A\sigma} &\xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1} \\ \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma\right] &= \mathcal{L}[e^{At} B] \mathcal{L}[u(t)] = \\ &= (sI - A)^{-1} B u(s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si noti che la trasformata di Laplace dell'esponenziale di una matrice non è altro che una generalizzazione della trasformata di Laplace dell'esponenziale scalare:

$$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - a}$$

## 2.5 La soluzione completa del sistema

Dato che  $x(t) = x_L(t) + x_F(t)$ , sommando le espressioni ottenute per la risposta libera e per quella forzata si ottiene:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma \quad (2.30)$$

Per quanto riguarda le uscite del sistema,

$$y(t) = C e^{At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma + D u(t) \quad (2.31)$$

Supponiamo per ipotesi  $x(0) = 0$  e  $D = 0$ ; in questo caso si ottiene:

$$y = \int_0^t C e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma \quad (2.32)$$

e tale rapporto ingresso-uscita, molto importante dal punto di vista concettuale, porta alla definizione della **matrice delle risposte impulsive**  $W(t)$  di dimensione  $p \times m$ :

$$W(t) = C e^{At} B \quad (2.33)$$

Il nome si giustifica se consideriamo come ingresso del sistema la distribuzione delta di Dirac, la cui proprietà rivelatrice è qui riportata:

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.34)$$

Il significato degli elementi della matrice  $W(t)$  è allora il seguente: l'elemento  $W_{ij}(t - t_0)$  rappresenta la risposta all'istante  $t$  dell'uscita  $i$ -esima, dovuta ad un impulso all'istante  $t_0$  applicato all'ingresso  $j$ -esimo (figura (2.2)).

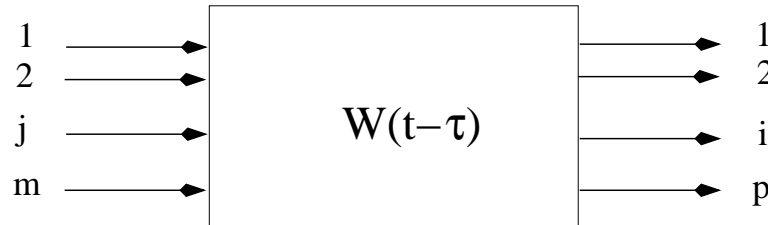


Figura 2.2: Sistema con  $m$  ingressi e  $p$  uscite

### Esempio: impulso su una struttura elastica

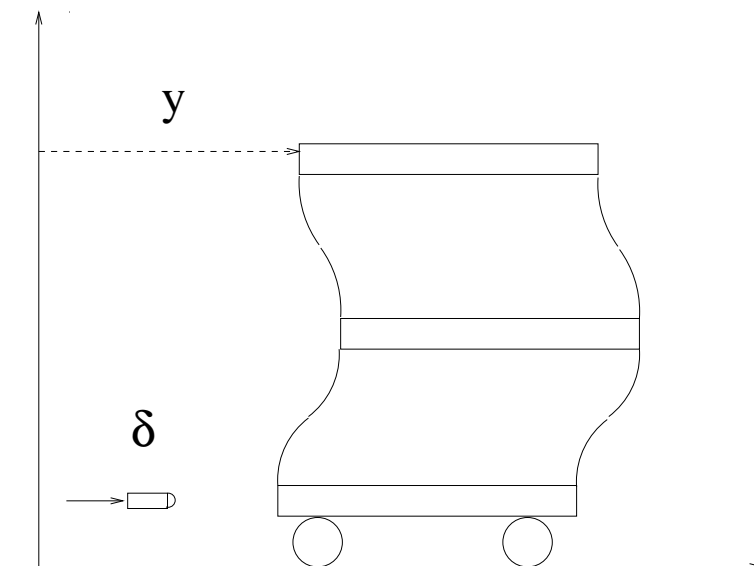


Figura 2.3: Schema di una semplice struttura elastica

La figura (2.3) rappresenta un semplice esempio di struttura elastica, formata da tre piani in grado di traslare l'uno rispetto all'altro e poggiati su una base fissa. Assumiamo come ingressi le forze  $u_1, u_2, u_3$  agenti sui piani e come uscite le posizioni dei piani stessi  $y_1, y_2, y_3$ . Immaginando un ingresso impulsivo in  $u_1(t) = \delta(t - t_0)$ , (rappresentato in figura dal proiettile) l'elemento della matrice  $W_{31}$  ci indica come il piano numero 3 evolve una volta che l'impatto ha avuto luogo.

## 2.6 Calcolo dell'esponenziale $e^{At}$

Per poter ottenere informazioni qualitative sulla soluzione generale del sistema è necessario calcolare l'esponenziale  $e^{At}$ , che è una matrice di dimensione  $n \times n$ .

Dal calcolo degli autovalori e degli autovettori destri e sinistri di  $A$  è possibile ricavare un'espressione per  $e^{At}$  senza utilizzare la serie di potenze precedentemente introdotta. Supponendo il caso di matrice  $A$  con  $n$  autovalori distinti, ad essa corrispondono  $t_1, \dots, t_n$  autovettori linearmente indipendenti formanti una base; pertanto, detta  $\Lambda$  la matrice degli autovalori di  $A$  posti sulla diagonale, si può verificare che

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} S = \sum_{i=1}^n Z_i e^{\lambda_i t} \quad (2.35)$$

Le  $Z_i$  sono matrici quadrate di dimensione  $n \times n$  e così costruite:

$$Z_i = t_i s_i^T \quad (2.36)$$

dove  $t_i$  è una colonna della matrice degli autovettori destri  $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$  e  $s_i^T$  è una riga della matrice  $S = T^{-1}$ . Si può dimostrare che  $s_k^T A = \lambda_k s_k^T$ , cioè che le righe della matrice  $S$  sono gli autovettori sinistri della matrice  $A$ .

Si noti che il prodotto di un vettore colonna per un vettore riga (a differenza del prodotto di un vettore riga per un vettore colonna) da una matrice. Per esempio se prendiamo i vettori:

$$t_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad s_i^T = [ 1 \ 2 ]$$

Risulta allora:

$$Z_i = t_i s_i^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mentre  $s_i^T t_i = [3]$ .

### Esempio: calcolo di $e^{At}$

Calcoliamo  $e^{At}$  dove  $A$  è la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

da cui risulta che gli autovalori sono  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Ad essi si associano i rispettivi autovettori:

$$(A - \lambda_1 I) \bar{t}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4+2 & -1 \\ 2 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e

$$(A - \lambda_2 I) \bar{t}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4+3 & -1 \\ 2 & -1+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A questo punto si trovano facilmente le matrici  $T$  ed  $S = T^{-1}$ :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

L'esponenziale si può esprimere come

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{\Lambda t} S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gli esponenziali scalari  $e^{\lambda_i t}$  sono detti **modi del sistema**. Se l'autovalore  $i$ -esimo è complesso, allora si ha

$$\lambda_i = \xi_i + j_i \omega_i \Rightarrow e^{\lambda_i t} = e^{(\xi_i + j_i \omega_i)t} = e^{\xi_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) \quad (2.37)$$

Se è presente un autovalore di tipo complesso  $\lambda$  allora è presente anche il suo complesso coniugato  $\lambda^*$ . Si può inoltre verificare che, se a  $\lambda$  è associata la matrice  $Z_i$ , a  $\lambda^*$  è associata la matrice  $Z_i^*$ . Di conseguenza, l'esponenziale  $e^{At}$  può essere decomposto in due sommatorie che evidenziano il contributo degli autovalori reali ed il contributo degli autovalori complessi:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^r Z_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=r+1, \text{ passo 2}}^{n-1} (Z_i e^{\lambda_i t} + Z_i^* e^{\lambda_i^* t}) \quad (2.38)$$

dove  $r$  è il numero di autovalori reali. Sostituendo  $Z_i = M_i + jN_i$  e  $\lambda = \xi + j\omega$  si ottiene:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^r Z_i e^{\lambda_i t} + 2 \sum_{i=r+1, \text{ passo 2}}^{n-1} e^{\xi_i t} (M_i \cos(\omega_i t) - N_i \sin(\omega_i t)) \quad (2.39)$$

e quindi si può osservare che l'esponenziale di una matrice è comunque sempre reale.

In conclusione, dall'analisi degli autovalori di una matrice è possibile ricavare informazioni importanti sulla risposta libera del sistema, che dipende proprio dall'esponenziale  $e^{At}$ . Nel caso in cui la matrice  $A$  non presenti autovalori distinti, il problema si complica. Infatti, mentre nel caso



di autovalori distinti la matrice  $A$  si può diagonalizzare nel seguente modo:

$$A = T\Lambda T^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ciò non è più vero in generale in presenza di autovalori coincidenti. In questo caso si può ottenere una rappresentazione della matrice  $A$  nella forma

$$A = TJT^{-1}, \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_n \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

dove i singoli  $J_k$  sono

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La matrice  $J$  è detta **matrice in forma di Jordan**.

### Esempio

La seguente matrice è in forma di Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In presenza di autovalori coincidenti, assume importanza fondamentale il **grado di**  $\lambda_k$ , definito come la dimensione del massimo blocco associato a  $\lambda_k$  nella matrice in forma di Jordan (nell'esempio precedente, si ha  $\deg(2) = 3$  e  $\deg(3) = 2$ ). In questo caso, l'esponenziale  $e^{At}$  assume la seguente espressione:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\deg(\lambda_k)-1} Z_{kj} t^j e^{\lambda_k t} \quad (2.42)$$

dove  $m$  è il numero di autovalori distinti.

**Esempio**

I modi associati alla matrice  $A$  dell'esempio precedente sono:

- $e^{2t}, t e^{2t}, t^2 e^{2t}$
- $e^{3t}, t e^{3t}$

**Esempio**

Data la matrice in forma di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

i modi ad essa associati sono  $e^{-4t}, t e^{-4t}, t^2 e^{-4t}, t^3 e^{-4t}$ .

Come considerazione finale, ritornando al caso di autovalori distinti si ottiene:

$$W(t) = C e^{At} B = \sum_{i=1}^n Q_i e^{\lambda_i t}, \quad Q_i = C Z_i B \quad (2.43)$$

e quindi gli autovalori intervengono pesantemente sia nella risposta libera che in quella forzata del sistema.

**2.7 Studio tramite trasformata di Laplace**

Un altro modo per studiare i sistemi dinamici è quello che prevede l'uso della trasformata di Laplace. Applicando questa trasformata

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} s x(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases} \quad (2.44)$$

Per poter operare tale trasformazione, è fondamentale che le matrici  $A, B, C, D$  siano costanti nel tempo, cioè che il sistema sia lineare invariante. Possiamo quindi ottenere

$$\begin{aligned} (sI - A)x(s) &= x(0) + Bu(s) \\ \Rightarrow x(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \end{aligned} \quad (2.45)$$

che risulta essere l'espressione dello stato del sistema in termini di trasformata di Laplace. Confrontando il risultato ottenuto nel dominio del tempo, si osservano le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} e^{At} &\xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1} \\ \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma &\xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1} Bu(s) \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'uscita trasformata è data da

$$y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + [C(sI - A)^{-1} B + D] u(s) \quad (2.47)$$

Se si considera solo la risposta forzata, cioè si pone  $x(0) = 0$ , si ha

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] u(s) = W(s) u(s)$$

dove  $W(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$  ( $d(s)$  non è altro che il polinomio caratteristico della matrice  $A$ ).

Le funzioni razionali costituiscono gli elementi di  $W(s)$  sono **proprie**, ovvero, il grado del numeratore è minore o uguale a quello del denominatore. In realtà vale l'uguaglianza solamente se  $D_{ij} \neq 0$ , altrimenti  $\deg(n_{ij}) < \deg(d)$ . In questo caso le funzioni sono dette **strettamente proprie**.  $W(s)$  prende il nome di **matrice delle funzioni di trasferimento**. La matrice delle funzioni di trasferimento è strettamente propria (ha tutte le componenti strettamente proprie) se e solo se  $D = 0$ .

## 2.8 Stabilità

Si consideri un sistema lineare invariante, con condizioni iniziali ed ingresso fissati:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \bar{x}(0) \text{ noto} \end{cases}$$

Ad esso corrisponde una soluzione  $\bar{x}(t)$ . Si supponga ora di perturbare la condizione iniziale: ci si chiede allora quale sia la soluzione  $x(t) \neq \bar{x}(t)$  del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \bar{x}(0) + \Delta x(0) \text{ noto} \end{cases}$$

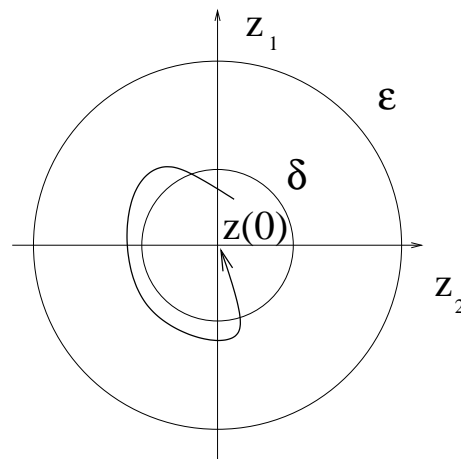
Intuitivamente, tutto si ricongiunge allo studio della differenza tra le soluzioni  $x(t) - \bar{x}(t) = z(t)$ , ed è interessante capire se essa è convergente a zero per  $t \rightarrow +\infty$  (figura (2.4)).

Derivando l'espressione di  $z(t)$  si ottiene la seguente relazione:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\bar{x}(t) - Bu(t) = A(x(t) - \bar{x}(t)) = Az(t) \quad (2.48)$$

e quindi si osserva che **la differenza tra soluzione nominale e perturbata evolve come la risposta libera, indipendentemente dall'ingresso  $u(t)$** .

Si può ora introdurre il concetto di stabilità di un sistema:

Figura 2.4: Convergenza di  $z(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ 

- il sistema si dice **stabile** se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $\|x(0) - \bar{x}(0)\| = \|z(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}(t)\| = \|z(t)\| \leq \varepsilon$ . Graficamente, la situazione è riportata in figura (2.5); da essa si evince che se la perturbazione si trova in una sfera di raggio  $\delta$ , la soluzione è comunque limitata entro la sfera di raggio  $\varepsilon$ .

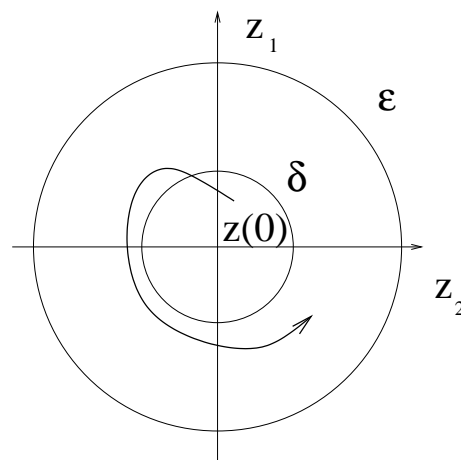


Figura 2.5: Stabilità di un sistema

- il sistema si dice **asintoticamente stabile** se è stabile e per  $\|z(0)\| < \delta$  si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t)\| = 0$ ;
- il sistema è **instabile** se non è stabile.

La stabilità di un intero sistema ha senso solamente per sistemi lineari, mentre per quelli non lineari si può parlare solamente di stabilità in alcuni punti. Questo argomento sarà trattato in dettaglio in seguito.

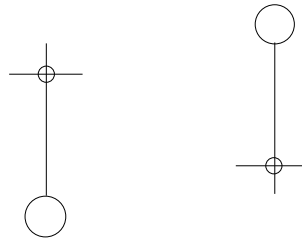


Figura 2.6: Pendolo e pendolo rovesciato

**Esempio: il pendolo**

Nella figura (2.6) a sinistra è raffigurato il classico pendolo. Tale sistema, per piccole oscillazioni, può essere considerato lineare, ed inoltre per piccole perturbazioni risulta stabile. Viceversa, nella parte destra della figura è rappresentato un pendolo rovesciato posto nella sua posizione di equilibrio: questo sistema è instabile, perché per ogni piccola perturbazione la differenza tra soluzione nominale e soluzione perturbata esce dalla sfera di raggio  $\varepsilon$ .

Dato che la differenza tra soluzione nominale e soluzione perturbata evolve come la risposta libera, la stabilità può essere studiata analizzando i modi del sistema. Più precisamente, definendo lo **spettro del sistema** come l'insieme degli autovalori di  $A$

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

si hanno le seguenti proprietà fondamentali:

- il sistema è **asintoticamente stabile** se e solo se  $\forall \lambda \in \sigma(A)$  si ha  $\Re\{\lambda\} < 0$ ;
- il sistema è **stabile** se e solo se  $\forall \lambda \in \sigma(A)$  si ha  $\Re\{\lambda\} \leq 0$ , e se  $\lambda \in \sigma(A)$  è tale che  $\Re\{\lambda\} = 0$  allora  $\deg(\lambda) = 1$ ;
- il sistema è **instabile** se  $\exists \lambda \in \sigma(A)$  con  $\Re\{\lambda\} > 0$  oppure  $\exists \lambda \in \sigma(A)$  con  $\Re\{\lambda\} = 0$  e  $\deg(\lambda) > 1$ .

La semplice stabilità non è solitamente sufficiente nei problemi, perché perturbazioni infinitamente piccole sui parametri del sistema possono portare gli autovalori con parte reale nulla nel semipiano instabile  $\Re\{\lambda\} > 0$ . Inoltre, la semplice stabilità non garantisce lo smorzamento dei modi, ovvero la convergenza, ma solo la loro limitatezza.

**Esempio**

Si consideri la seguente matrice in forma di Jordan:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j4 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j4 \end{bmatrix}$$

Il grado degli autovalori con parte reale nulla è pari a 2: di conseguenza il sistema è instabile. Se sostituiamo gli “ $\mathbf{1}$ ” con due zeri il sistema diventerebbe stabile (marginalmente).

**2.9 La risposta in frequenza**

Si consideri un sistema con 1 ingresso ed 1 uscita. Ponendo  $x(0) = 0$  e  $D = 0$ , si ha:

$$y(t) = \int_0^t W(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad y(s) = W(s)u(s)$$

Si supponga ora di sollecitare il sistema con un ingresso di questo tipo:

$$u(t) = \begin{cases} e^{\sigma t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Si osservi che nel caso  $\sigma = 0$  il segnale in ingresso restituisce il gradino unitario; se invece  $\sigma = j\omega$ , si ha

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

Dalle note proprietà della trasformata di Laplace, si ha:

$$u_\sigma(s) = \frac{1}{s - \sigma}$$

Supponendo che  $\sigma \notin \sigma(A)$ , si ottiene:

$$y(s) = W(s) \frac{1}{s - \sigma} = W(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + (W(s) - W(\sigma)) \frac{1}{s - \sigma} \quad (2.50)$$

Si può dimostrare che sviluppando tale equazione si giunge a:

$$y(s) = W(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + \tilde{W}(s) \quad (2.51)$$

dove  $\tilde{W}(s) = \frac{\tilde{n}(s)}{p(s)}$ , con  $p(s)$  polinomio caratteristico della matrice  $A$ . Antitrasformando questa espressione, si ottiene:

$$y(t) = W(\sigma)e^{\sigma t} + \tilde{W}(t) \quad (2.52)$$

e, visto che  $\tilde{W}(t)$  risulta essere una combinazione lineare dei modi del sistema, si ha che nel caso di autovalori distinti

$$y(t) = W(\sigma)e^{\sigma t} + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i e^{\lambda_i t} \quad (2.53)$$

Il primo termine è denominato **risposta a regime**, mentre il secondo è la **risposta transitoria** che dipende solamente dai modi. Supponendo che il sistema sia asintoticamente stabile, la risposta transitoria tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ , e di conseguenza la risposta a regime per  $\sigma = j\omega$  è:

$$\begin{aligned} y_{j\omega}(t) &= W(j\omega)e^{j\omega t} = |W(j\omega)|e^{j\omega t + \varphi(j\omega)} = \\ &= |W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(j\omega)) + j|W(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(j\omega)) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ciò significa che se in ingresso al sistema si pone una sinusoide di pulsazione  $\omega$ , in uscita si ottiene una sinusoide con la stessa pulsazione, amplificata di un fattore  $|W(j\omega)|$  e sfasata di un angolo pari a  $\arg\{W(j\omega)\}$ . La rappresentazione in termini di fasori è riportata in figura (2.7).

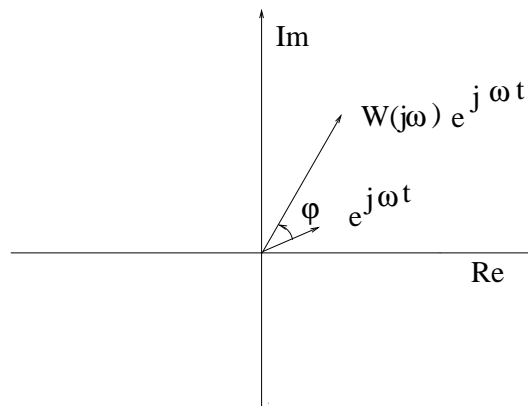


Figura 2.7: Fasori della risposta in frequenza di un sistema

## 2.10 I sistemi a tempo discreto

I sistemi a tempo discreto sono analoghi a quelli continui ma presentano una sostanziale differenza: le equazioni che li descrivono non sono differenziali, ma sono equazioni alle differenze in cui  $u$ ,  $y$ ,  $x$  sono definiti per  $k \in \mathbf{Z}$ .

### Esempio

$$y(k+2) = y(k+1) + y(k) + 1$$

è un'equazione alle differenze che descrive un sistema a tempo discreto.

In generale, è possibile definire i vettori  $x(k) \in \mathbf{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbf{R}^m$ ,  $y(k) \in \mathbf{R}^p$ ; in forma vettoriale, le relazioni che descrivono un sistema discreto sono:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k), u(k)) \\ y(k) = g(k, x(k), u(k)) \end{cases} \quad (2.55)$$

dove le singole equazioni sono del tipo:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= f_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \text{ per } i = 1, \dots, n \\ y_j(k) &= g_j(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \text{ per } j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

### Esempio

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 3x_2(k) + 2x_3^2(k) - u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = kx_1(k) - u_2 \end{cases}$$

è un sistema a tempo discreto di tipo non lineare.

Un sistema discreto è **invariante** o **autonomo** se le funzioni  $f$  e  $g$  non dipendono direttamente da  $k$ :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \quad (2.56)$$

Un sistema discreto è **lineare** se  $f$  e  $g$  sono lineari rispetto a  $x$  e  $u$ :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases} \quad (2.57)$$

Un sistema discreto è **lineare ed invariante** se sono verificate ambedue le precedenti condizioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (2.58)$$

Trovare la soluzione di un sistema discreto è semplice, utilizzando la ricorsività. In questa sede però si vogliono estrarre informazioni qualitative, e in analogia a quanto fatto per i sistemi continui dividiamo il problema in due parti distinte:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) \text{ noto} \end{cases} \quad (2.59)$$

che è il problema della **risposta libera**, e

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$



che è il problema della **risposta forzata**. Si può verificare che la soluzione generale risulta:

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h) \\ y(k) &= C A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} C A^{k-h-1} B u(h) + D u(k) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Si supponga ora che la matrice  $A$  abbia  $n$  autovalori distinti (cioè ci siano  $n$  autovettori linearmente indipendenti  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ). Detta  $T$  la matrice degli autovettori (che risulta invertibile) e  $S = T^{-1}$  la matrice degli autovettori sinistri  $s_1^T, s_2^T, \dots, s_n^T$ , risulta:

$$A^k = \sum_{i=1}^n Z_i \lambda_i^k \quad (2.62)$$

dove  $Z_i = t_i s_i^T$ . Gli autovalori  $\lambda_i^k$  sono detti **modi del sistema**, e come ci si poteva aspettare essi influiscono sia sulla risposta libera che su quella forzata. In particolare, se  $\lambda \in \mathbf{R}$  si ottengono delle successioni crescenti (se  $|\lambda| > 1$ ) o decrescenti (se  $|\lambda| < 1$ ), mentre se  $\lambda \in \mathbf{C}$  si ha

$$\lambda^k = |\lambda|^k e^{j\theta k} = |\lambda|^k [\cos(\theta k) + j \sin(\theta k)]$$

E' importante sottolineare quanto la teoria per i sistemi continui e per i sistemi discreti sia analoga, con l'unica differenza che nel primo caso si considera la parte reale ed immaginaria degli autovalori, mentre nel secondo il modulo e la fase degli autovalori.

E' possibile anche definire la **matrice delle risposte impulsive**  $W(k) = C A^k B$ , in cui ogni elemento  $W_{ij}(k) = C_i A^k B_j$  è la risposta dell'uscita  $i$ -esima quando all'ingresso  $j$ -esimo è applicato un impulso discreto (ad esempio la successione  $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$ ).

Nel caso in cui la matrice  $A$  presenti autovalori coincidenti, si ha invece:

$$A^k = \sum_{i=1}^m \sum_{h=0}^{\deg(\lambda_i)-1} Z_{ih} \begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} \lambda_i^k \quad (2.63)$$

Se per esempio consideriamo

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a questa matrice in forma di Jordan sono associati i seguenti autovalori:

- $e^{3t}, t e^{3t}, t^2 e^{3t}$  nel caso di sistemi continui;
- $3^k, p_1 3^k, p_2 3^k$  nel caso di sistemi discreti.

Si può facilmente dimostrare che, elevando ad una potenza  $k$  una matrice in forma di Jordan, ciò che ne risulta è una matrice a blocchi simile a quella di partenza, in cui i singoli blocchi sono la potenza  $k$ -esima dei blocchi della matrice di partenza.

Ricordiamo infine le seguenti proprietà fondamentali relative alla stabilità dei sistemi lineari discreti:

- un sistema discreto è **asintoticamente stabile** se e solo se  $\forall \lambda \in \sigma(A)$  si ha  $|\lambda| < 1$ ;
- un sistema discreto è **stabile** se e solo se  $\forall \lambda \in \sigma(A)$  si ha  $|\lambda| \leq 1$ , e qualora  $|\lambda| = 1$  si ha  $\deg(\lambda) = 1$ ;
- un sistema discreto è **instabile** se non è stabile.

## 2.11 Trasformazione di stato

Per motivi che risulteranno chiari nel seguito è spesso opportuno effettuare un cambiamento di base nella rappresentazione naturale di un sistema. Presa una matrice invertibile

$$T = [\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n]$$

detta matrice di cambiamento di base (le cui colonne formano la nuova base), definiamo la trasformazione

$$\begin{cases} \hat{x} = T^{-1}x \\ x = T\hat{x} \end{cases}$$

Applicando tale trasformazione ad un sistema lineare autonomo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} T\dot{\hat{x}}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dunque il sistema ha una nuova rappresentazione:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{cases} \quad (2.65)$$

in cui le matrici assumono le seguenti espressioni:

$$\hat{A} = T^{-1}AT \quad (2.66)$$

$$\hat{B} = T^{-1}B \quad (2.67)$$

$$\hat{C} = CT \quad (2.68)$$

$$\hat{D} = D \quad (2.69)$$

Si noti che la matrice  $D$  non è cambiata. Questo era d'altra parte prevedibile, perché per la relazione tra  $y(t)$  ed  $u(t)$  non è stata proposta alcuna trasformazione.

Si osservi inoltre che, nel passaggio alla nuova rappresentazione, la matrice  $A$  subisce una **trasformazione per similitudine**. Si dimostra che per tali trasformazioni rimane inalterato il polinomio caratteristico e con esso gli autovalori, con la conseguenza che le proprietà di stabilità del sistema sono invariate.

## 2.12 I sistemi a tempo campionato

Al giorno d'oggi, l'elaborazione di segnali avviene quasi sempre attraverso l'uso di calcolatori, che come noto evolvono a tempo discreto. Lavorare con sistemi di tipo discreto non è un problema in quanto la teoria dei sistemi continui e dei sistemi discreti hanno forti analogie. Quando sistemi a tempo continuo devono interagire con sistemi a tempo discreto un aspetto fondamentale è la conversione di segnali a tempo continuo (provenienti dal mondo esterno) a segnali a tempo discreto (all'interno del calcolatore) e viceversa.

### 2.12.1 La conversione analogico-digitale

La prima operazione che si considera è la conversione di un segnale analogico in uno digitale, secondo lo schema a blocchi rappresentato in figura (2.8).

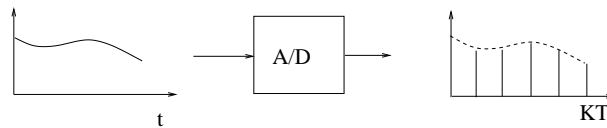


Figura 2.8: Conversione analogico-digitale

Il blocco contrassegnato con  $A/D$  è un convertitore analogico-digitale, e l'operazione attuata è detta **campionamento**. Si suppone in questa sede che il campionamento del segnale avvenga con un passo fisso  $T$ , anche se è possibile che segnali vettoriali (cioè più canali in ingresso) siano campionati con passi diversi (si parla allora di **sistemi multi-rate**). L'operatore di campionamento è lineare, e quindi un sistema continuo lineare è trasformato in un sistema discreto lineare:

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{A/D} f(kT) \\ \alpha f(t) + \beta g(t) &\xrightarrow{A/D} \alpha f(kT) + \beta g(kT) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Un esempio del funzionamento di un convertitore analogico-digitale è rappresentato in figura (2.9). Quando il segnale START passa allo stato 1 viene attivato il generatore di rampa ed il contatore che viene bloccato quando il segnale  $s$  raggiunge il livello  $r$ . Il contatore fornirà dunque un numero intero  $s^*$  proporzionale (a meno dell'arrotondamento) a  $s$ . È necessario che il tempo di quantizzazione del segnale analogico sia molto più piccolo del passo di campionamento, ed inoltre che il segnale in ingresso non abbia frequenza troppo elevata.

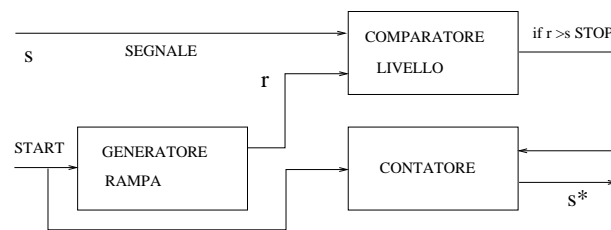


Figura 2.9: Funzionamento qualitativo di un convertitore analogico-digitale

### 2.12.2 La conversione digitale-analogica

Questo tipo di operazione è senz'altro più delicata da trattare rispetto alla conversione analogico-digitale. In linea di principio, tramite interpolazione è possibile trovare una funzione (per esempio polinomiale di grado  $N - 1$ ) che passi per  $N$  punti dati. Nel caso di polinomi è infatti sufficiente impostare le seguenti equazioni lineari (**problema dell'interpolazione**)

$$a_0 + a_1 x_i(kT) + a_2 x_i^2(kT) + \dots + a_n x_i^{n-1}(kT) = f(kT) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.71)$$

per determinare i coefficienti. Tuttavia ci si rende conto che, e ciò è determinante ai fini dell'applicazione di questo metodo, è necessario operare l'interpolazione **fuori linea**, cioè si deve essere in possesso di tutti gli  $N$  campioni per trovare la funzione polinomiale. Ciò ovviamente non è fattibile nella quasi totalità delle applicazioni. E' dunque necessario trovare un sistema per operare una conversione **in linea**, elaborando i campioni volta per volta in tempo reale.

Un modo semplice per operare una conversione in linea è usare il cosiddetto **mantenimento di ordine zero**. Il metodo consiste nel creare una funzione costante a tratti, il cui valore è pari al valore del campione precedentemente inviato (vedi figura (2.10)).

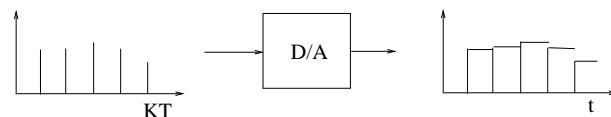


Figura 2.10: Mantenimento di ordine zero

Con questa operazione, dai campioni  $f(kT)$  si crea una funzione costante a tratti il cui valore è  $\hat{f}(kT) = f(kT)$  per  $kT \leq t \leq (k+1)T$ . Esistono anche mantenimenti di ordine superiore (vedi figura (2.11) per l'ordine 1), ma al giorno d'oggi il tempo di campionamento è così basso che l'informazione persa utilizzando un mantenimento di ordine zero è praticamente trascurabile (dato che l'errore cala al diminuire di  $T$ , come riportato in figura (2.12)). Di fatto, dunque, i metodi basati sul mantenimento di ordine superiore non sono utilizzati.

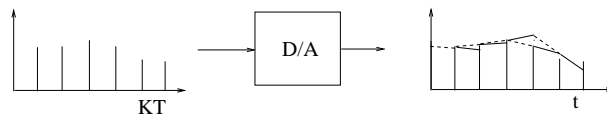


Figura 2.11: Mantenimento di ordine uno

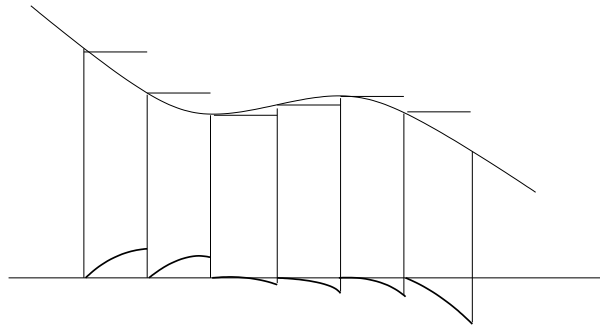


Figura 2.12: Errore con mantenimento di ordine zero

### 2.12.3 L'aliasing

Si espone ora brevemente il problema dell'aliasing, trattato nel caso di un segnale sinusoidale. Ciò non è restrittivo, in quanto è noto che funzioni periodiche possono essere approssimate mediante uno sviluppo in serie di Fourier, che consta appunto di funzioni armoniche.

Si consideri allora il segnale a tempo continuo  $\cos(\omega_1 t)$ , e lo si campioni con passo  $T$  ottenendo una successione di valori  $\cos(\omega_1 kT)$ . Si vede facilmente che la stessa successione può essere ottenuta se si campiona, con lo stesso passo  $T$ , un segnale del tipo  $\cos(\omega_2 t)$  tale da verificare la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_2 kT) &= \cos(\omega_1 kT + mk2\pi) \\ \Rightarrow \omega_2 &= \omega_1 + m \frac{2\pi}{T} = \omega_1 + m \Omega_C \end{aligned} \quad (2.72)$$

dove  $\Omega_c$  è detto **pulsazione di campionamento**. Dunque si può dire che se il segnale in ingresso ha due componenti armoniche tali da verificare l'espressione  $\omega_2 - \omega_1 = m \Omega_C$ , esse risultano indistinguibili all'atto del campionamento, con la conseguenza che non è possibile interpretare ed eventualmente ricostruire correttamente il segnale.

E' noto che solitamente i segnali trattati nei problemi reali hanno banda limitata, come qualitativamente riportato in figura (2.13). Affinchè un segnale a banda limitata compresa tra  $-\bar{\omega}$  e  $\bar{\omega}$  risulti correttamente interpretato e ricostruibile dopo il campionamento, è dunque necessario che qualunque frequenza componente il segnale risulti distinguibile dalle altre. Questo significa, in particolare, che non deve esistere alcuna frequenza di valore pari o superiore a  $-\bar{\omega} + m \Omega_C$ , che nel caso peggiore, per  $m = 1$ , restituisce la seguente espressione:

$$\bar{\omega} < -\bar{\omega} + \Omega_C \quad \Rightarrow \quad 2\bar{\omega} < \Omega_C \quad (2.73)$$

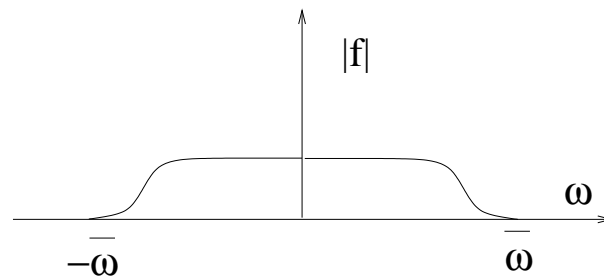


Figura 2.13: Segnale a banda limitata

Sostituendo  $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$  e  $\Omega_c = 2\pi f_c$ , dove  $\bar{f}$  è la frequenza massima utile del segnale e  $f_c$  è la frequenza di campionamento, si ottiene:

$$\bar{f} < \frac{f_c}{2} \text{ oppure } f_c > 2\bar{f} \quad (2.74)$$

Questo risultato fondamentale è conseguenza del **teorema del campionamento**, il quale permette anche di stabilire che il segnale a tempo continuo è completamente ricostruibile, almeno in linea di principio, a partire dai singoli campioni, se è verificata la condizione sopra riportata.

La dimostrazione del teorema del campionamento, avvenuta nel 1949 ad opera di Shannon, si è rivelata un passo importante per la teoria dei segnali e le comunicazioni elettriche, perché ha permesso il passaggio dall'elaborazione di segnali analogici a quella di segnali digitali con notevole miglioramento in termini di immunità ai disturbi.

Un'ultima considerazione riguarda le condizioni necessarie per verificare l'espressione  $\bar{f} < \frac{f_c}{2}$ . È facile immaginare che nella realtà, essendo i segnali imprevedibili, non si è in grado di dire a priori quale sia la banda del segnale, o perfino se esso risulti limitato o meno. In questi casi, dovendo comunque fissare la frequenza di campionamento all'interno dei circuiti elettronici del convertitore analogico-digitale, si rende necessaria un'operazione di filtraggio del segnale stesso, atta ad eliminare le componenti frequenziali spurie superiori al valore  $\frac{f_c}{2}$ . Tale effetto filtrante spesso avviene naturalmente nel sistema, come nel caso di un microfono, dispositivo che già di per sé costituisce un filtro del segnale.

### Esempio

Le frequenze udibili dall'orecchio umano possono arrivare fino a circa 20 kHz; ciò significa che ogni componente superiore a questo valore non è umanamente rilevabile. Per questo motivo, dovendo essere verificata l'espressione  $f_c > 2\bar{f}$ , la frequenza di campionamento delle tracce sonore dei CD musicali è solitamente pari a 44,100 kHz.

## 2.13 Equivalente discreto di un sistema continuo

Si consideri la situazione rappresentata in figura (2.14).

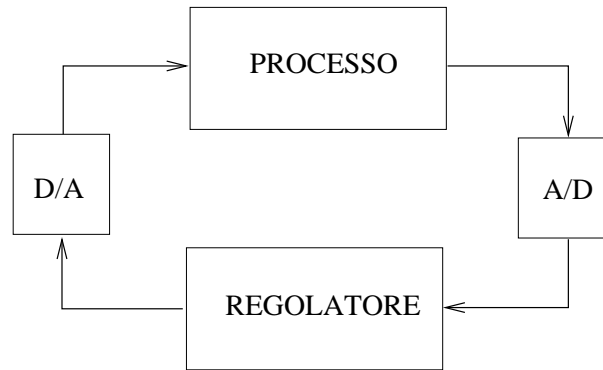


Figura 2.14: Controllo discreto per processo continuo

In essa è rappresentata una tipica situazione in cui un processo a tempo continuo viene controllato mediante calcolatore, e quindi con un controllore a tempo discreto. I convertitori A/D e D/A in figura servono per il passaggio dal mondo continuo a quello discreto e viceversa.

Se si vuole studiare l'intero sistema costituito dal processo più il controllore, è necessario, per avere equazioni consistenti, calcolare l'analogo discreto del processo continuo, o l'analogo continuo del controllo discreto. In questa fase calcoleremo l'equivalente discreto di un processo a tempo continuo. Si assume che il segnale in uscita dal convertitore digitale-analogico ottenuto mediante mantenimento di ordine zero, e quindi risulta costante a tratti:

$$u(t) = u(kT) \quad \text{per} \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

Nel processo lineare a tempo continuo governato dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si ha allora un ingresso costante a tratti, ma niente ci autorizza a dire che anche  $x(t)$  ed  $y(t)$  siano costanti a tratti. L'unica cosa che si può dimostrare è che  $x(t)$  risulta non derivabile nei punti  $x(kT)$ . Tuttavia, l'uscita  $y(t)$  del processo a tempo continuo entra nel convertitore analogico-digitale, e per questo essa viene solamente considerata in istanti multipli del passo di campionamento  $T$ . Ci poniamo dunque il problema di trovare una relazione tra  $u(kT)$ ,  $x(kT)$ ,  $x((k+1)T)$ .

Supponendo noti  $u(kT)$  e  $x(kT)$ , possiamo valutare l'espressione della soluzione del sistema continuo proprio negli istanti  $kT$ :

$$x(t) = e^{A(t-kT)}x(kT) + \int_{kT}^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \quad (2.75)$$

dove si è partiti dall'istante iniziale  $kT$  invece che da zero: questa operazione è lecita in quanto il sistema è tempo invariante. Se valutiamo tale espressione per  $t = (k+1)T$ , si ottiene:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(kT)d\sigma \quad (2.76)$$

in cui si è posto  $u(\sigma) = u(kT)$  perché all'interno dell'intervallo  $[kT, (k+1)T)$  l'ingresso è costante. Ciò significa anche che esso non entra nel calcolo dell'integrale:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \left[ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)} B d\sigma \right] u(kT) \quad (2.77)$$

Il termine fra parentesi può essere semplificato. Con un semplice cambio di variabili si ottiene:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)} B d\sigma = \int_T^0 e^{A\xi} B(-d\xi) = \int_0^T e^{A\xi} B d\xi \quad (2.78)$$

e pertanto non dipende da  $k$ . In definitiva, si ottiene:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \left[ \int_0^T e^{A\xi} B d\xi \right] u(kT)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} x((k+1)T) &= A_D x(kT) + B_D u(kT) \\ y(kT) &= C_D x(kT) + D_D u(kT) \end{cases} \quad (2.79)$$

dove

$$A_D = e^{AT}, \quad B_D = \int_0^T e^{A\xi} B d\xi, \quad C_D = C, \quad D_D = D \quad (2.80)$$

La rappresentazione grafica dell'equivalenza ottenuta fra sistemi a tempo continuo e sistemi a tempo discreto è riportata in figura (2.15).

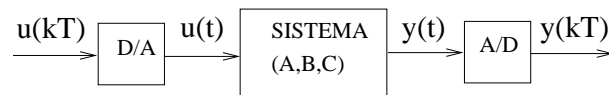


Figura 2.15: Equivalenza sistema continuo - sistema discreto

Si osservi come la rappresentazione di stato trovata per il sistema a tempo discreto sia **esattamente equivalente** a quella per il sistema a tempo continuo al quale sono stati applicati i convertitoriconsideratii in ingresso e uscita. Inoltre, si noti che le matrici  $C$  e  $D$  non sono cambiate nel passaggio al mondo discreto, perché rappresentative di legami algebrici e non differenziali.

I risultati appena ottenuti sono molto importanti per la Teoria dei Sistemi e dei controlli, in quanto permettono indifferentemente di progettare un controllore sia pensandolo nel dominio continuo che in quello discreto. Al giorno d'oggi, la realizzazione digitale è altamente preferita per la sua flessibilità e convenienzaeconomicaa. Si può dimostrare che se il sistema a tempo continuo rappresentato dalle matrici  $A, B, C, D$  è asintoticamente stabile, questa è una condizione necessaria e sufficiente per affermare che il sistema a tempo discreto con matrici  $A_D, B_D, C_D, D_D$  è asintoticamente stabile. Ciò è dimostrabile perché se  $A$  ha autovalori  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  allora  $A_D = e^{AT}$  ha autovalori  $\{e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, \dots, e^{\lambda_n T}\}$ .



**Esempio: calcolo dell'integrale**  $\int_0^T e^{A\xi} B d\xi$

Utilizzando le regole già note, si ottiene:

$$\int_0^T e^{A\xi} B d\xi = \int_0^T T e^{A\xi} S B d\xi = T \left[ \int_0^T e^{A\xi} d\xi \right] S B$$

e quindi si tratta solamente di calcolare gli integrali di singoli esponenziali, posti sulla diagonale maggiore.

**Esempio: verifica dell'espressione**  $\int_0^T e^{At} dt = A^{-1} [e^{AT} - I]$

La verifica è presto fatta se si considera che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} = \\ &= A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = A \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(At)^h}{h!} = A e^{At} \end{aligned}$$

Infatti, si ha che  $\frac{d}{dt} [A^{-1} e^{At}] = e^{At}$ , e quindi l'integrale definito tra 0 e  $T$  è provato.

**Esempio: realizzazione discreta di un controllore**

Si vuole trovare l'equivalente discreto del controllore:

$$K_P + K_I \frac{1}{s}$$

cioè di un regolatore proporzionale-integrale. Supponendo che l'ingresso sia  $e(t)$  e l'uscita  $u(t)$ , ciò che si ha è  $u(s) = \left( K_P + K_I \frac{1}{s} \right) e(s)$ . Si verifica facilmente che la rappresentazione di stato nel mondo continuo è pari a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e(t) \\ u(t) = K_P e(t) + K_I x(t) \end{cases}$$

Le matrici di questo sistema continuo sono pari a:

$$A = [0], \quad B = [1], \quad C = [K_I], \quad D = [K_P]$$

Pertanto, la rappresentazione equivalente nel mondo discreto ha le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A_D &= [e^{AT}] = [e^{0T}] = [1] \\ B_D &= \left[ \int_0^T e^{A\xi} B d\xi \right] = [T] \\ C_D &= [K_I] \\ D_D &= [K_P] \end{aligned}$$

Si ottiene allora:

$$\begin{cases} x((k+1)T) = x(kT) + T e(kT) \\ u(kT) = K_I x(kT) + K_P e(kT) \end{cases}$$

Per implementare effettivamente questo controllore al calcolatore, è necessario il seguente algoritmo di massima:

1. lettura di  $e(kT)$ ;
2. calcolo di  $u(kT)$ ;
3. scrittura di  $u(kT)$  nel convertitore digitale-analogico;
4. calcolo di  $x((k+1)T)$ ;
5. aspettare il prossimo passo di campionamento;
6. tornare ad 1 se il processo è ancora attivo.

## Capitolo 3

# I sistemi dinamici

### 3.1 Considerazioni generali

Sebbene i sistemi considerati nel corso sono prevalentemente quelli descritti da equazioni differenziali e alle differenze è opportuno introdurre una definizione generale di sistema dinamico. Prima di procedere ad una definizione formale è opportuno introdurre un esempio. Consideriamo i due sistemi in Fig. 3.1), in cui sono rappresentate due diverse tipologie di circuito elettrico: una semplice resistenza e un circuito R-L. Dalle note leggi dell'elettrotecnica, possiamo scrivere:

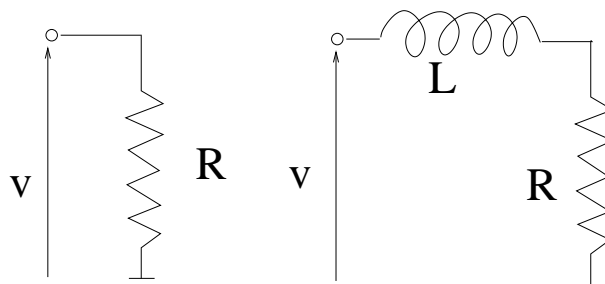


Figura 3.1: Diverse tipologie di sistema

- per il primo sistema:  $i(t) = \frac{v(t)}{R}$ ;
- per il secondo sistema:  $L\dot{i}(t) = v(t) \Rightarrow i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_\sigma d\sigma$

In ambedue i casi, è possibile associare una causa (la tensione) all'uscita desiderata (la corrente), e per calcolare l'uscita è necessario conoscere la funzione del tempo della causa  $v(t)$ . Tuttavia, il secondo sistema è governato da un'equazione differenziale e la conoscenza del valore di  $v(t)$  non è sufficiente a determinare univocamente il valore della corrente: si deve anche conoscere il valore di  $i(t_0)$ , la condizione iniziale del sistema. Questi tipi di sistemi, per cui è necessario conoscere anche lo stato in un istante iniziale, sono detti **sistemi dinamici**.

Una domanda che subito ci si potrebbe porre è la seguente: è necessario conoscere tutta la storia passata dell'evoluzione del sistema per calcolare la sua evoluzione futura? La risposta è ovviamente no: è sufficiente conoscere il comportamento del sistema in un istante  $t_0$ , perché le

informazioni negli istanti precedenti sono ridondanti. Questo concetto introduce la definizione di **stato del sistema**, che è l'informazione interna del sistema, proveniente dal passato, sufficiente a calcolarne l'evoluzione nel futuro. Matematicamente il valore all'istante iniziale può essere così specificato:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\sigma) d\sigma = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(\sigma) d\sigma + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\sigma) d\sigma = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\sigma) d\sigma \quad (3.1)$$

dove si è posto  $i(-\infty) = 0$ . Si noti che è possibile arrivare allo stesso valore di  $i(t_0)$  seguendo strade diverse, ma questo non conta ai fini dell'evoluzione futura.

## 3.2 Sistemi dinamici causali

Si considerino i seguenti insiemi:

- l'insieme dei tempi  $T$  totalmente ordinato (cioè se  $t_1 \neq t_2$  è possibile dire chi è più grande dell'altro). Nell'astrazione matematica, spesso si prende  $T = \mathbf{R}$  oppure  $T = \mathbf{Z}$ , come ad esempio quando si considera il clock di un calcolatore;
- l'insieme degli stati  $X$  (che può essere  $\mathbf{R}^n$ );
- l'insieme degli ingressi  $U$  (che può essere  $\mathbf{R}^m$ );
- l'insieme delle uscite  $Y$  (che può essere  $\mathbf{R}^p$ );
- l'insieme delle funzioni di ingresso  $\Omega = \{U(\dots) : T \rightarrow U \mid \text{condizione}\}$  (ad esempio, per un attuatore sono possibili solo funzioni di ingresso comprese tra il minimo ed il massimo valore ottenibili dall'attuatore stesso);
- l'insieme delle funzioni di uscita  $\Gamma = \{Y(\dots) : T \rightarrow Y \mid \text{condizione}\}$  (ad esempio, per un sensore sono possibili solo funzioni di uscita comprese tra il minimo ed il massimo valore ottenibili dal sensore stesso).

Si definisce allora la **funzione di transizione**  $\varphi$  come

$$\begin{cases} \varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X \\ x(t) = \varphi(t, \tau, x(\tau), u(\cdot)) \end{cases} \quad (3.2)$$

dove  $u(\cdot)$  indica l'intera funzione del tempo e non solo il suo valore in un punto dell'asse dei tempi. Per definire un sistema dinamico, la funzione di transizione deve possedere le seguenti quattro proprietà:

- **consistenza:**

$$\varphi(\tau, \tau, x, u(\cdot)) = x \quad \forall \tau \in T, x \in X, u \in \Omega \quad (3.3)$$

In sostanza, nell'istante di tempo  $t = \tau$  si deve ottenere lo stato iniziale della funzione  $x(\tau)$ ;

- **composizione:**

$$x(t_3) = \varphi(t_3, t_1, x_1, u(\cdot)) = \varphi(t_3, t_2, x_2, u(\cdot)) \quad (3.4)$$

$$= \varphi(t_3, t_2, \varphi(t_2, t_1, x_1, u(\dots)), u(\dots))$$

$$\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \in T, x \in X, u \in \Omega \quad (3.5)$$

Conoscendo lo stato in un certo istante non ci occorre conoscere la storia preceente del sistema;

- **definizione in avanti** la funzione  $\varphi$  deve essere definita sempre per  $t \geq \tau \forall x \in X, u \in \Omega$ . Ciò significa che per  $t < \tau$  la funzione di transizione potrebbe non essere definita. Questo è un caso che si può verificare nella realtà molto frequentemente; se però è possibile risalire al passato dell'evoluzione di un sistema, allora esso è detto **reversibile**;
- **causalità:** date due ingressi  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  che coincidono per  $t_1 \leq t \leq t_2$  (e che possono differire al di fuori di tale intervallo). Allora si ha:

$$\varphi(t, t_1, x, u_1(\dots)) = \varphi(t, t_1, x, u_2(\dots)), \quad \forall t \text{ nell'intervallo} \quad (3.6)$$

In pratica, se ci interessa lo stato nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ , dato lo stato in  $t_1$ , le informazione relative agli istanti precedenti a  $t_1$  e successive a  $t_2$  non hanno alcun ruolo.

Per quanto riguarda l'uscita di un sistema, introduciamo la seguente funzione:

$$\begin{cases} \eta : T \times X \times U \rightarrow Y \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.7)$$

Se  $y(t) = \eta(t, x(t))$  il sistema si dice **strettamente proprio** (nel caso di sistemi lineari, ciò significa porre la matrice  $D$  pari a zero).

Le proprietà sopra enunciate possono essere verificate per la nota espressione dei sistemi lineari invarianti:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$$

Infatti si ha:

- $x(t_0) = Ix(t_0)$  perché  $e^{A(t_0-t_0)} = I$  e l'integrale si annulla. E' così verificata la consistenza;
- dati gli istanti  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ ,

$$x(t_3) = e^{A(t_3-t_1)}x(t_1) + \int_{t_1}^{t_3} e^{A(t_3-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$$

e

$$x(t_3) = e^{A(t_3-t_2)}x(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} e^{A(t_3-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$$

Sostituendo a  $x(t_2)$  la sua espressione rispetto a  $t_1$  ottenuta con la stessa formula, si ottiene l'uguaglianza voluta provando così la proprietà di composizione;

- $x(t)$  è sicuramente definita per  $t \geq t_0$  perché anche l'integrale è definito per questi valori;
- se  $u_1(t) = u_2(t)$  in un intervallo  $[t_1, t_2]$ , allora l'integrale, calcolato a partire da  $t_1$ , presenta sempre lo stesso ingresso in ambedue i casi. Pertanto il risultato è il medesimo, ed è così verificata la proprietà di causalità.

Le proprietà della funzione di transizione sono verificate anche per i sistemi a tempo discreto. Inoltre, in questo caso il calcolo esatto di  $\varphi$  è possibile per ricorsione. Nel caso di sistemi a tempo discreto può venire a cadere una proprietà che è tipicamente verificata per quelli a tempo continuo, ovvero la reversibilità. Per esempio il sistema descritto dall'equazione

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

è un sistema non reversibile, perché la matrice  $A$  non è invertibile.

E' lecito chiedersi anche se le soluzioni di equazioni non lineari nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) \text{ noto} \end{cases}$$

possano verificare le proprietà della funzione di transizione, descrivendo pertanto dei sistemi dinamici. In generale, noi considereremo solamente la classe dei sistemi non lineari con soluzione unica, dipendente dalle condizioni iniziali e dagli ingressi noti. Dunque, in linea di principio esiste ed è definita una funzione  $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(\dots))$ , che risulta proprio essere la funzione di transizione, anche se la maggior parte delle volte essa è impossibile da calcolare analiticamente, senza fare ricorso a qualche tecnica numerica.

Un problema di carattere matematico che si presenta quando abbiamo a che fare con equazioni differenziali è che, in casi patologici, può cadere l'unicità della soluzione. Per esempio, l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, e ciò perché la funzione in oggetto non è Lipschitziana. Essa non è dunque candidata a descrivere un sistema dinamico. l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ha soluzione unica ma non è definita per ogni  $t > 0$ . Anche essa non è dunque candidata a descrivere un sistema dinamico.

### 3.3 Gli automi come sistemi dinamici

Una classe di sistemi dinamici di un certo interesse sono gli automi finiti, in cui gli insiemi  $X$ ,  $U$ ,  $Y$  sono di tipo finito:

$$\begin{aligned} U &= \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \\ Y &= \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \\ X &= \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Un automa è tipicamente rappresentato da una funzione del tipo

$$x(k+1) = F(k, x(k), u(k)) \quad (3.9)$$

che definisce lo stato futuro come funzione dello stato e dell'ingresso corrente. Nel caso di automi tempo-invarianti possiamo scrivere

$$x(k+1) = F(x(k), u(k)) \quad (3.10)$$

Esistono fondamentalmente due modi per rappresentare efficacemente un automa descritti da questa relazione: una tabella oppure un grafo di flusso rappresentativi della funzione  $F$ .

La tabella non è altro che una matrice in cui sulle righe sono riportati gli  $m$  ingressi del sistema, e sulle colonne gli  $n$  stati possibili assunti dal sistema stesso. Ogni elemento  $F_{ij}$  di questa matrice, detta **tabella di transizione**, rappresenta lo stato futuro nel caso in cui ci si trovi nello stato  $x_j$  ed il sistema venga sollecitato con l'ingresso  $u_i$

	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$u_1$	$f_{11}$	$f_{12}$	$\dots$	$f_{1n}$
$u_2$	$f_{21}$	$f_{22}$	$\dots$	$f_{2n}$
$u_m$	$f_{m1}$	$f_{m2}$	$\dots$	$f_{mn}$

La descrizione completa dell'automa può essere anche data, come già detto, in termini di grafo di flusso. Si consideri per esempio la figura (3.2), in cui  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $U = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{0, 1\}$ . Tale grafo corrisponde alla tabella

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_n$
$u_1$	1	1	3	2
$u_2$	1	1	4	4
$u_m$	3	2	2	2

I quattro possibili stati assunti dal sistema sono rappresentati con dei cerchi suddivisi a metà: nella parte alta è riportato l'indice dello stato, in quella bassa il valore in uscita associato a tale stato. Ogni sollecitazione in ingresso fa cambiare stato al sistema secondo la direzione degli archi. Ad ogni arco è associato il valore dell'ingresso che provoca la transizione. È importante sottolineare che in questo caso l'uscita è legata solamente allo stato corrente da un'equazione del tipo  $y = g(x)$ , e che quindi il sistema è strettamente proprio. Sono possibili anche automi in cui

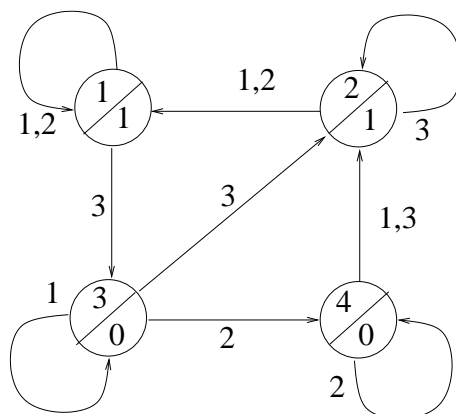


Figura 3.2: Grafo di flusso per automi finiti

l'uscita è legata sia allo stato che agli ingressi, realizzando un legame del tipo  $y = g(x, u)$ . Anche le uscite di un sistema possono essere rappresentate graficamente tramite una matrice, con le stesse considerazioni già fatte per la tabella di transizione. Si sottolinea inoltre che la rappresentazione mediante grafo di flusso può risultare piuttosto complessa se il sistema prevede un numero di stati abbastanza elevato.

#### Esempio: il riconoscimento di una stringa

Si supponga di voler realizzare una macchina a stati finiti che permetta di riconoscere la stringa 358 all'interno di una stringa più grande. Gli insiemi  $U$ ,  $Y$ ,  $X$  sono:

$$U = \{0, 1, 2, \dots, g\}$$

$$Y = \{0, 1\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

dove per l'uscita si intende 0 se la stringa non è riconosciuta ed 1 se la stringa è riconosciuta. Il grafo di flusso è riportato in figura (3.3).

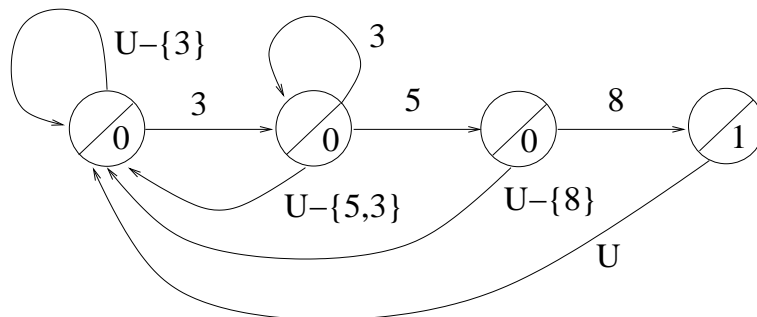


Figura 3.3: Esempio di automa: riconoscimento di una stringa



**Esempio: somma binaria di due sequenze di bit**

Si supponga di voler calcolare la somma di due sequenze di bit che giungano alla macchina, a partire dal bit meno significativo. Gli insiemi  $U$ ,  $Y$ ,  $X$  sono:

$$\begin{aligned}U &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\Y &= \{0, 1\} \\X &= \{A, B, C, D\}\end{aligned}$$

Come esercizio si deriva il grafo di un automa a quattro stati che esegue la somma binaria.



## Capitolo 4

# Raggiungibilità ed osservabilità

### 4.1 Raggiungibilità nei sistemi a tempo continuo

Si consideri un sistema lineare autonomo a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

In questo paragrafo ci porremo il seguente problema: dato uno stato  $x_1$ , è possibile agire sull'ingresso  $u$  in modo tale da raggiungere uno stato  $x_2$ ? Se la risposta è affermativa,  $x_2$  si dice raggiungibile da  $x_1$ , o equivalentemente che  $x_1$  è controllabile a  $x_2$ . Le definizioni formali sono riportate qui di seguito per i sistemi a tempo continuo, per i quali si considera solitamente la raggiungibilità e l'osservabilità rispetto allo stato nullo.

**Definizione** Lo stato  $\bar{x}$  è **raggiungibile (da zero)** nell'intervallo di tempo  $[0, \tau]$  se  $\exists u(\cdot)$  tale che se  $x(0) = 0 \Rightarrow x(\tau) = \bar{x}$ .

**Definizione** Lo stato  $\bar{x}$  è **controllabile (a zero)** nell'intervallo di tempo  $[0, \tau]$  se  $\exists u(\cdot)$  tale che se  $x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(\tau) = 0$ .

**Definizione** Dati due stati  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ , si dice che  $\bar{x}_1$  è **controllabile a**  $\bar{x}_2$  e che  $\bar{x}_2$  è **raggiungibile da**  $\bar{x}_1$  nell'intervallo di tempo  $[0, \tau]$  se  $\exists u(\cdot)$  tale che se  $x(0) = \bar{x}_1 \Rightarrow x(\tau) = \bar{x}_2$ .

In seguito, vedremo che se  $x_1$  è controllabile a zero e  $x_2$  è raggiungibile da zero, allora  $x_2$  è raggiungibile da  $x_1$ .

Definiamo ora il seguente insieme:

$$X_r(\tau) = \{\bar{x} \text{ raggiungibile in } [0, \tau]\}$$

$X_r(\tau)$  risulta essere un sottospazio di  $\mathbf{R}^n$ . Questo perché se  $\bar{x}_1$  è raggiungibile in  $[0, \tau]$  con ingresso  $u_1(\dots)$  e  $\bar{x}_2$  è raggiungibile in  $[0, \tau]$  con ingresso  $u_2(\dots)$ , allora  $\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2$  è raggiungibile in  $[0, \tau]$  con ingresso  $\alpha u_1(\dots) + \beta u_2(\dots)$ , data la linearità del sistema. Se si vuole una verifica più formale,

possiamo dire che gli stati raggiungibili da zero sono tutti quelli esprimibili con l'equazione:

$$\bar{x}(\tau) = 0 + \int_0^\tau e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma \quad (4.1)$$

per cui l'insieme degli stati raggiungibili è:

$$X_r(\tau) = \left\{ \bar{x} : \bar{x} = \int_0^\tau e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma \right\}$$

Da questa espressione, data la linearità dell'integrale, si nota che l'insieme  $X_r(\tau)$  è effettivamente un sottospazio di  $\mathbf{R}^n$ .

Introduciamo ora la matrice  $\mathcal{R}$  detta **matrice di raggiungibilità**, che risulta essere una matrice partizionata a blocchi di questo tipo:

$$\mathcal{R} = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] \quad (4.2)$$

Se  $B$  ha dimensione  $n \times m$  ed  $A$  ha dimensione  $n \times n$ , allora  $\mathcal{R}$  ha dimensione  $n \times (n \cdot m)$ . Detto **range** o **immagine di M** l'insieme  $Ra(M) = \{Mx\}$ , allora si dimostra che:

**Teorema**  $X_r(\tau) = Ra(\mathcal{R})$  per ogni  $\tau > 0$ .

**Dimostrazione** Per verificare l'enunciato del teorema, dimostreremo equivalentemente che  $X_r^\perp(\tau) = Ra(\mathcal{R})^\perp$ .<sup>1</sup> Gli stati raggiungibili sono esprimibili come da:

$$\bar{x} = \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma$$

pertanto si ha:

$$X_r^\perp(\tau) = \left\{ z : z^T \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma = 0, \forall u(\cdot) \right\}$$

Possiamo calcolare lo spazio ortogonale usando il seguente risultato:

$$\int_0^\tau z^T e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma = 0 \forall u(\cdot) \iff z^T e^{A(\tau-\sigma)} B \equiv 0 \quad (4.3)$$

L'implicazione verso sinistra è ovvia. L'implicazione verso destra non lo è altrettanto. Denotiamo con  $W(\sigma) = z^T e^{A(t-\sigma)} B$ . Dato che l'uguaglianza a zero deve valere per ogni ingresso  $u(\cdot)$ , è possibile scegliere  $u(\sigma) = W^T(\sigma)$ , ed ottenere:

$$\int_0^\tau W(\sigma) u(\sigma) d\sigma = \int_0^\tau W(\sigma) W^T(\sigma) d\sigma = \int_0^\tau \|W(\sigma)\|^2 d\sigma = 0 \quad (4.4)$$

Dato che il valore della norma  $\|\cdot\|$  è sempre non negativo ed è zero solo se l'argomento è il vettore nullo, deduciamo che  $W(\sigma) = z^T e^{A(\tau-\sigma)} B = 0, \forall \sigma \in [0, \tau]$ .

<sup>1</sup>Questo si può fare ed è equivalente in spazi a dimensione finita; se si lavorasse con spazi a dimensione infinita, ciò non sarebbe possibile (perché l'ortogonale dell'ortogonale di un sottospazio non ritornerebbe il sottospazio stesso).

Ricordando l'espressione dell'esponenziale per una matrice, possiamo scrivere:

$$z^T \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k (\tau - \sigma)^k}{k!} \right] B \equiv 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^T A^k B}{k!} (\tau - \sigma)^k \equiv 0 \quad (4.5)$$

Sfruttando ora il principio di identità delle serie di potenze, si ottiene:

$$z^T A^k B = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad (4.6)$$

Poiché si è visto che le potenze  $A^k$  con  $k \geq n$  sono esprimibili come combinazione lineare delle prime  $n$  potenze di  $A$ , la precedente condizione deve valere solamente per  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Riassumendo il tutto si ha

$$\begin{aligned} [z^T B | z^T AB | z^T A^2 B | \dots | z^T A^{n-1} B] &= 0 \\ \Rightarrow z^T [B | AB | A^2 B | \dots | A^{n-1} B] &= 0 \\ \Rightarrow z^T \mathcal{R} &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Questo ci porta a dire che ogni  $z^T$  è ortogonale alle colonne di  $\mathcal{R}$ , e quindi  $z \in Ra(\mathcal{R})^\perp$ , cioè  $X_r^\perp(\tau) = Ra(\mathcal{R})^\perp$  e quindi  $X_r(\tau) = Ra(\mathcal{R})$ .

Usando lo stesso filo logico, è possibile definire lo spazio:

$$X_c(\tau) = \{\bar{x} \text{ è controllabile a zero in } [0, \tau]\}$$

Gli elementi di tale insieme sono tali che:

$$0 = e^{A\tau} \bar{x} + \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma$$

Sfruttando l'invertibilità di  $e^{A\tau}$  (la cui inversa è pari a  $e^{-A\tau}$ ) si ottiene:

$$\bar{x} = -e^{-A\tau} \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma = - \int_0^\tau e^{-A\sigma} Bu(\sigma) d\sigma$$

Utilizzando la stessa procedura utilizzata nella dimostrazione del teorema precedente, anche in questo caso si giunge alla conclusione che  $X_c(\tau) = Ra(\mathcal{R})$ .

Un punto fondamentale che emerge da questa dimostrazione è che  $X_c$  è indipendente da  $\tau$ , in quanto il sottospazio generato dalle colonne della matrice  $\mathcal{R}$  non dipende dall'intervallo di tempo considerato. Ciò significa, per esempio, che lo stato raggiungibile di un aereo (come una rotta) lo è in qualunque tempo, anche piccolissimo. Ciò ovviamente è in contrasto con la natura limitata degli attuatori presenti nell'aereo; tuttavia il teorema non pone alcuna limitazione superiore ai valori assunti dall'ingresso del sistema. Questa dimostrazione, dunque, va vista in un'ottica leggermente diversa, e cioè quella di permettere la ricerca degli stati non raggiungibili dal sistema.

## 4.2 Decomposizione di Kalman per la raggiungibilità

Abbiamo appena visto che i sottospazi  $X_r$  e  $X_c$  non sono dipendenti dal tempo  $\tau$ , e che i vettori appartenenti a tali insiemi sono generati dall'immagine della matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}$ .

Un sistema si dice **completamente raggiungibile (o controllabile)** se tutti i possibili vettori dello stato del sistema sono generabili dalle colonne della matrice  $\mathcal{R}$ . In altre parole, il sistema è completamente raggiungibile se e solo se:

$$\text{Rank}(\mathcal{R}) = n \quad (4.8)$$

cioè le colonne di  $\mathcal{R}$  sono un insieme di generatori linearmente indipendenti (base di  $\mathbf{R}^n$ ). Questo risultato è certamente notevole, perché permette di trasformare un problema analitico (la ricerca di uno stato raggiungibile o controllabile) in un problema algebrico, e la maggior parte dei problemi algebrici è facilmente risolvibile al calcolatore.

La cosiddetta **decomposizione di Kalman** interviene invece quando nel sistema manca la completa raggiungibilità. Supponiamo, a questo proposito, che  $\mathcal{R}$  abbia rango  $r < n$ ; esistono pertanto  $r$  colonne linearmente indipendenti che formano una base dell'insieme  $X_r$ , e che possono essere poste in una matrice  $T_r = [\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_r]$ . Si consideri ora  $T_{nr} = [\bar{t}_{r+1}, \bar{t}_{r+2}, \dots, \bar{t}_n]$ , dove  $t_1, \dots, t_n$  sono linearmente indipendenti fra loro e con gli  $r$  vettori precedenti e quindi tali da completare la base  $T_r$ . Si ottiene pertanto una matrice  $T$  di dimensione  $n \times n$ , che risulta base di  $\mathbf{R}^n$ , così composta:

$$T = [\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_r | \bar{t}_{r+1}, \bar{t}_{r+2}, \dots, \bar{t}_n] = [T_r | T_{nr}] \quad (4.9)$$

Si noti come  $T_{nr}$  sia una base del sottospazio complementare rispetto ad  $\mathbf{R}^n$ , del sottospazio raggiungibile.

Ogni vettore  $x \in \mathbf{R}^n$  è allora esprimibile come combinazione lineare della base appena trovata:

$$x = \left[ T_r \mid T_{nr} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ed, in particolare, ogni vettore appartenente all'insieme degli stati raggiungibili è esprimibile come:

$$x = \left[ T_r \mid T_{nr} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Se applichiamo la trasformazione  $T$  al sistema lineare autonomo, otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{B} &= T^{-1}B \\ \hat{C} &= CT \\ \hat{D} &= D\end{aligned}$$

Più precisamente possiamo scrivere forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_r(t) \\ \hat{x}_{nr}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r,nr} \\ \phi_1 & A_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_r(t) \\ \hat{x}_{nr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r u(t) \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Dimostriamo ora che  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono matrici identicamente nulle. Se si parte da una situazione in cui le condizioni iniziali sono pari a zero, dopo un tempo  $t > 0$  si giunge, in ogni caso, ad uno stato raggiungibile del tipo:

$$x = T \begin{bmatrix} \hat{x}_r(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo significa che  $\hat{x}_{nr}(t) = \dot{\hat{x}}_{nr}(t) = 0 \forall t$ ; per cui, considerando la seconda equazione del sistema sopra riportato, si ottiene:

$$\dot{\hat{X}}_{nr} = \phi_1 \hat{X}_r + A_{nr} \hat{X}_{nr} + \phi_2 u \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow 0 = \phi_1 \hat{X}_r + \phi_2 u \quad (4.14)$$

che, scritto in forma matriciale, risulta:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_r(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

Questa relazione è valida  $\forall u(\cdot)$  e  $\forall \hat{x}_r(t)$ . Di conseguenza,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono matrici nulle, ed il sistema può essere scritto in questa forma:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{X}_r(t) \\ \hat{X}_{nr}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_r & A_{r,nr} \\ 0 & A_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_r(t) \\ \hat{X}_{nr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ Y(t) &= \begin{bmatrix} C_r & C_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_r(t) \\ \hat{X}_{nr}(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (4.16)$$

Esiste un teorema dell'algebra lineare il cui enunciato afferma che se una matrice è triangolare a blocchi allora il suo determinante è pari al prodotto dei determinanti dei blocchi posti sulla diagonale principale. Applicando tale risultato, si ottiene:

$$\det(sI - \hat{A}) = \det(sI - A_r) \det(sI - A_{nr}) \quad (4.17)$$

Gli autovalori di  $\hat{A}$  sono dunque quelli di  $A_r$  e di  $A_{nr}$ ; più precisamente, essi formano due insiemi distinti:

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sono gli autovalori di  $A_r$  e sono detti **modi raggiungibili**;
- $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori di  $A_{nr}$  e sono detti **modi non raggiungibili**.

Questo risultato fondamentale permette di fare una breve considerazione su un eventuale controllo da applicare ad un sistema. Si vedrà successivamente che un controllore in retroazione è in grado di modificare la posizione sul piano complesso degli autovalori raggiungibili, ma non dei modi non raggiungibili. Di conseguenza, se il sistema presenta dei modi non raggiungibili instabili, ad esso non è applicabile nessun tipo di controllore in grado di stabilizzarne il comportamento.

Lo schema a blocchi corrispondente al sistema scritto in forma di stato è riportato in figura (4.1).

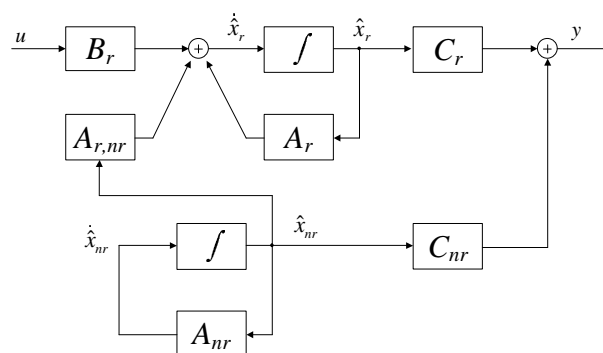


Figura 4.1: Decomposizione di Kalman per la raggiungibilità

Dallo schema si osserva la mancanza dell'interazione fra ingresso e  $\dot{X}_{nr}$ , che dovrebbe essere data da  $\phi_2$ , e dell'interazione da  $\hat{X}_r$  a  $\dot{X}_{nr}$ , data da  $\phi_1$ . La parte costituita da  $(A_r, B_r, C_r)$  è detta **sottosistema raggiungibile**, mentre quella costituita da  $(A_{nr}, 0, C_{nr})$  è detta **sottosistema non raggiungibile**. Lo schema a blocchi semplificato è rappresentato in figura (4.2).

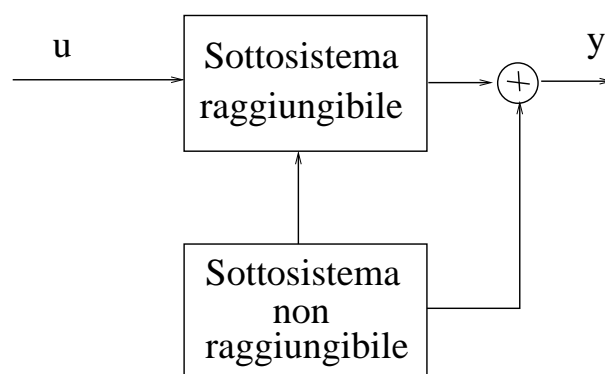


Figura 4.2: Schema a blocchi semplificato della decomposizione di Kalman

In ambedue gli schemi, si osservi che non vi è alcuna freccia che da  $u$  vada verso il sottosistema non raggiungibile, in accordo con la definizione data di stato non raggiungibile. Inoltre, non c'è nessuna freccia che va dal sottosistema raggiungibile a quello non raggiungibile: se così fosse, infatti, si realizzerebbe una raggiungibilità indiretta, in cui le informazioni sull'ingresso del



sistema potrebbero arrivare al sottosistema non raggiungibile dopo essere transitate attraverso il sottosistema raggiungibile.

Si noti tuttavia che il sottosistema non raggiungibile è in grado di influenzare il sottosistema raggiungibile e l'uscita del sistema: in quest'ottica, allora, meglio si comprende la necessità di studiare anche l'asintotica stabilità del sottosistema non raggiungibile, in quanto se questa venisse a mancare non sarebbe possibile applicare un controllore in retroazione in grado di stabilizzare il sistema.

Si può dimostrare che la funzione di trasferimento è legata al sistema raggiungibile dalla seguente espressione:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r \quad (4.18)$$

poichè avvengono delle cancellazioni relative agli autovalori associati alla parte non raggiungibile del sistema. D'altra parte ciò è ovvio perché la funzione di trasferimento rappresenta il legame tra l'uscita del sistema e l'ingresso quando le condizioni iniziali sono nulle, e per definizione il sottosistema non raggiungibile non risente dell'ingresso applicato.

### Esempio

Si consideri il sistema con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$$

La matrice di raggiungibilità è pari a:

$$\mathcal{R} = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nota dunque che il rango della matrice di raggiungibilità è pari a 1, e quindi minore di  $n = 2$ . Di conseguenza il sistema non è completamente raggiungibile. L'insieme dei vettori raggiungibili è facilmente interpretabile dal punto di vista geometrico come l'insieme dei vettori la cui direzione è la retta passante per la bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano.

Si può completare la base data da una colonna di  $\mathcal{R}$  con la scelta di un vettore qualsiasi, ovviamente non linearmente dipendente dalla colonna di  $\mathcal{R}$ . Per esempio, si può scegliere:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proseguendo nell'analogia geometrica, il vettore scelto per completare la base è quello con componente pari a uno lungo l'asse delle ascisse, e zero lungo l'asse delle ordinate. E' risaputo che dalla combinazione lineare di due vettori non linearmente dipendenti è possibile generare qualsiasi vettore del piano  $\mathbf{R}^2$ .

Si scrive ora l'espressione della funzione di trasferimento, calcolandone il numeratore ed il

denominatore con le formule note:

$$\begin{aligned}
 d(s) &= \det(sI - A) = s^2 + 2s \\
 n(s) &= \det \left[ \begin{array}{c|c} sI - A & -B_j \\ \hline C_i & D_{ij} \end{array} \right] = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 & -1 \\ -1 & s+1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = s+2 \\
 \Rightarrow W(s) &= \frac{s+2}{s(s+2)} = \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

Si può facilmente verificare che la matrice  $\hat{A} = T^{-1}AT$ , calcolata per una  $T$  generica (non solo quella riportata sopra), ha una forma del tipo:

$$\hat{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \underline{0} & x \\ \hline \underline{0} & -2 \end{array} \right]$$

dove lo zero sottolineato è la matrice identicamente nulla  $\phi_1$  mentre 0 e -2 sulla diagonale sono gli autovalori della matrice  $A$ . L'elemento  $x$  in alto a destra dipende dalla matrice  $T$  utilizzata per la trasformazione per similitudine. Similmente, anche  $\hat{B} = T^{-1}B$  ha una forma del tipo:

$$\hat{B} = \left[ \begin{array}{c} y \\ \underline{0} \end{array} \right]$$

dove lo zero sottolineato è la matrice identicamente nulla  $\phi_2$  e  $y$  è il termine dipendente dalla matrice  $T$  utilizzata.

### 4.3 Raggiungibilità nei sistemi a tempo discreto

Le definizioni date in precedenza di stato raggiungibile e controllabile per sistemi a tempo continuo possono essere estese anche al caso di sistemi discreti del tipo:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Uno stato  $\bar{x}$  si dice **raggiungibile da zero** in un intervallo  $[0, T]$  se  $\exists u(\dots)$  tale che  $x(0) = 0 \Rightarrow x(T) = \bar{x}$ .

Uno stato  $\bar{x}$  si dice **controllabile a zero** in un intervallo  $[0, T]$  se  $\exists u(\dots)$  tale che  $x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(T) = 0$ .

Si vedrà che contrariamente a quanto accade per i sistemi a tempo continuo, l'insieme di vettori raggiungibili e l'insieme di vettori controllabili non coincide.

Inizialmente, comunque, si consideri l'espressione dello stato del sistema discreto al passo  $k$ :

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} Bu(h)$$

Se lo stato è raggiungibile, si ha:

$$x(T) = \bar{x} = 0 + \sum_{h=0}^{T-1} A^{T-h-1} B u(h) \quad (4.19)$$

e questa espressione può essere scritta in forma matriciale:

$$\bar{x} = \left[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{T-1}B \right] \begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathcal{R}_{(T)} U_{(T)} \quad (4.20)$$

Dato che il vettore  $U_{(T)}$  può essere arbitrario, si ottiene che l'insieme di raggiungibilità in  $T$  passi è dato da:

$$X_r(T) = Ra(\mathcal{R}_{(T)}) \quad (4.21)$$

Emerge già una prima differenza tra sistemi a tempo continuo e sistemi a tempo discreto: l'insieme di raggiungibilità, che risulta comunque un sottospazio, dipende dal tempo  $T$ , ed è sempre più grande all'aumentare di  $T$ :

$$\begin{aligned} X_r(1) &= Ra([B]) \\ X_r(2) &= Ra\left(\left[ B \mid AB \right]\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si noti che  $X_r(T) \subseteq X_r(T+1) \forall T$ . Questo è un risultato ovvio perché uno stato raggiungibile in  $T$  passi lo è sicuramente in  $T+1$  passi (basta, al passo 0, non fare nulla e per i restanti  $T$  passi applicare l'ingresso precedente).

Il punto fondamentale è che il sottospazio di raggiungibilità non aumenta di dimensione oltre a  $T = n$ , dove  $n$  rappresenta l'ordine del sistema. Questo accade perché, dal criterio di Hayley-Hamilton, le colonne di  $A^k B$  con  $k \geq n$  sono combinazione lineare delle prime  $k$  potenze ( $k = 0, 1, \dots, k-1$ ). In altre parole, la matrice  $\mathcal{R}_n$  è la più piccola ad avere rango  $n$ , perché ogni matrice  $\mathcal{R}_{n+i}$  con  $i > 0$ , più grande di  $\mathcal{R}_n$ , presenta colonne linearmente dipendenti ed ha comunque rango minore o uguale a  $n$ .

Possiamo dunque affermare che, in un sistema a tempo discreto, l'insieme di tutti gli stati raggiungibili è:

$$X_r = Ra(\mathcal{R}) \quad (4.23)$$

e solo in questo senso c'è analogia al caso continuo.

### Esempio

Si consideri il sistema con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'insieme degli stati raggiungibili in un passo è:

$$X_r(1) = Ra([B]) = Ra \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

e può essere geometricamente interpretato come l'insieme dei vettori in  $\mathbf{R}^3$  paralleli all'asse delle  $z$ . L'insieme degli stati raggiungibili in due passi è:

$$X_r(2) = Ra \left( \left[ B \mid AB \right] \right) = Ra \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

e, geometricamente, è interpretabile come l'insieme dei vettori in  $\mathbf{R}^3$  giacenti sul piano  $yz$ . Infine, l'insieme degli stati raggiungibili in tre passi è:

$$X_r(3) = Ra \left( \left[ B \mid AB \mid A^2B \right] \right) = Ra \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

e geometricamente è interpretabile come tutti i vettori di  $\mathbf{R}^3$ .

Analogamente al caso continuo, possiamo dire che il sistema a tempo discreto  $(A, B)$  è completamente raggiungibile se e solo se  $Ra(\mathcal{R}) = \mathbf{R}^n$ , e quindi se e solo se  $\text{rank}(\mathcal{R}) = n$ . Inoltre, si può dire che se uno stato è raggiungibile, lo è in al più  $n$  passi.

Il problema della controllabilità richiede un po' più di attenzione. E' stato infatti già anticipato che l'insieme degli stati controllabili nel caso di sistemi discreti è diverso da quello degli stati raggiungibili come si può vedere dal seguente esempio.

### Esempio

Sia dato il sistema con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità è pari a:

$$\mathcal{R} = \left[ B \mid AB \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

da cui si evince che l'insieme degli stati raggiungibili è l'insieme nullo. Tuttavia, l'insieme degli stati controllabili è pari a tutto  $\mathbf{R}_2$ , dato che ponendo  $u(k) = 0$ ,

$$x(k) = A^k \bar{x} = 0 \quad \text{per } k \geq 2 \quad \text{perché } A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{per } k \geq 2$$

è controllabile a zero in al più 2 passi. La matrice  $A$  di questo esempio è detta **nilpotente**; si può dimostrare che una matrice è nilpotente se e solo se tutti i suoi autovalori sono nulli.

L'esempio precedente pone in luce l'aspetto fondamentale che è responsabile della discrepanza fra gli insiemi  $X_r$  e  $X_c$ . In generale, infatti,  $X_r \subseteq X_c$ , ma si può dimostrare che se  $A$  è invertibile (cioè non ha autovalori nulli) allora  $X_r = X_c$ .

Si conclude questa discussione introducendo brevemente il modo per ottenere l'insieme degli stati controllabili. Non esiste una formula generale come per l'insieme degli stati raggiungibili, pertanto l'unica cosa che si può fare è studiare l'equazione:

$$0 = A^T \bar{x} + \sum_{h=0}^{T-1} A^{T-h-1} B u(h)$$

che deriva dalla definizione stessa di controllabilità.

#### 4.4 Altri criteri di raggiungibilità

Si torna ora al caso dei sistemi continui, per dimostrare il seguente:

**Teorema** Un sistema  $(A, B)$  è raggiungibile (o controllabile) se e solo se ( $\Leftrightarrow$ ):

$$\text{Rank} \left[ \lambda I - A \mid B \right] = n \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad (4.24)$$

e ciò è verificato se e solo se ( $\Leftrightarrow$ ):

$$\text{Rank} \left[ \lambda I - A \mid B \right] = n \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \quad (4.25)$$

**Dimostrazione** Si parte dall'implicazione ( $\Leftarrow$ ). Se  $\text{Rank} \left[ \lambda I - A \mid B \right] < n$ , non tutte le colonne di questa matrice sono linearmente indipendenti. Pertanto esiste un vettore  $z^T \neq 0$  tale che:

$$z^T \left[ \lambda I - A \mid B \right] = 0$$

Dalle proprietà delle matrici a blocchi, possiamo dunque scrivere:

$$\begin{cases} z^T (\lambda I - A) = 0 \\ z^T B = 0 \end{cases}$$

e quindi risulta che  $z^T$  è autovettore sinistro della matrice  $A$ . Ma allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} z^T A &= \lambda z^T \\ z^T A^2 &= z^T A \cdot A = \lambda z^T A = \lambda^2 z^T \\ z^T A^3 &= z^T A \cdot A^2 = \lambda z^T A^2 = \lambda^3 z^T \\ \Rightarrow z^T A^k &= \lambda^k z^T \end{aligned}$$

ed anche:

$$z^T A^k B = \lambda^k z^T B = 0$$

Per cui risulta:

$$z^T \left[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B \right] = \left[ z^T B \mid z^T AB \mid \dots \mid z^T A^{n-1} B \right] = 0$$

cioè la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}$  non ha rango  $n$ , ossia il sistema non è completamente raggiungibile.

L'implicazione opposta ( $\Rightarrow$ ) è dimostrabile applicando al sistema una trasformazione tale da porlo nella forma di Kalman. Dato che è dimostrabile che  $\text{Rank} \left[ \lambda I - A \mid B \right] = \text{Rank} \left[ \lambda I - \hat{A} \mid \hat{B} \right]$ , si ottiene una matrice di questo tipo:

$$\left[ \lambda I - \hat{A} \mid \hat{B} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \lambda I - A_r & -A_{r, nr} & B_r \\ \hline 0 & \lambda I - A_{nr} & 0 \end{array} \right]$$

Se il sistema è effettivamente non raggiungibile, la matrice  $A_{nr}$  non è identicamente nulla e pertanto ad essa sono associati gli autovalori non raggiungibili del sistema. Scelto a caso proprio uno di questi autovalori e sostituito nell'espressione della matrice sopra riportata, si ottiene che le ultime  $n - r$  righe sono identicamente nulle. Da ciò discende che il rango della matrice è minore di  $n$  per tutti gli autovalori non raggiungibili (**criterio di Popov**).

Questo criterio è molto utile per verificare la fattibilità di un controllore da applicare al sistema. Supponendo che quest'ultimo abbia una matrice  $A$  a cui sono associati autovalori con parte reale positiva, è possibile sostituire tali autovalori nella matrice  $\left[ \lambda I - A \mid B \right]$  ed osservare che:

- se il rango della matrice è minore di  $n$ , l'autovalore positivo è non raggiungibile e non c'è modo di realizzare un controllore che stabilizzi il sistema;
- se il rango della matrice è pari ad  $n$ , l'autovalore positivo è raggiungibile e pertanto, in linea teorica, è possibile realizzare il controllore.

Per i sistemi a tempo discreto, il teorema sopra enunciato è simile:

**Teorema** Il sistema discreto  $(A, B)$  è completamente raggiungibile se e solo se  $\Leftrightarrow \text{Rank} \left[ \lambda I - A \mid B \right] = n \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$ .

Il sistema discreto  $(A, B)$  è completamente controllabile se e solo se  $\Leftrightarrow \text{Rank} \left[ \lambda I - A \mid B \right] = n \quad \forall \lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0$ .

### Esempio

Si vuole calcolare l'insieme degli stati raggiungibili del sistema con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità risulta essere:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Per verificare il rango di questa matrice, si utilizza il cosiddetto metodo di Gauss per la triangolarizzazione. In sostanza, attraverso moltiplicazioni per uno scalare e somme tra le righe si cerca di giungere ad una forma in cui la parte in basso a destra della matrice è nulla; queste operazioni non cambiano il rango della matrice stessa. In questo caso, moltiplicando la prima riga per 2 e sommandola all'ultima, si ha:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

e moltiplicando la seconda riga per -1 e sommandola all'ultima, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il numero di righe non tutte nulle rappresenta il rango della matrice, ed in questo caso è pari a 2. Una base degli stati raggiungibili è allora ottenibile considerando due colonne linearmente indipendenti della matrice  $\mathcal{R}$ , come ad esempio:

$$X_r = \left\{ \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ -1 \end{array} \right] \right) \right\}$$

questo insieme si può completare con un'ulteriore colonna linearmente indipendente alle altre due, per formare una base di  $\mathbf{R}^3$ :

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questa matrice è infatti invertibile, e pertanto si ha:

$$T^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Si può facilmente verificare che risulta:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Gli zeri sottolineati non sono un caso, ma risultano dalla decomposizione di Kalman appena attuata. Infatti, dato che il rango della matrice di raggiungibilità è pari a 2, deve risultare una matrice  $A_{nr}$  di dimensione  $1 \times 1$  e quindi una riga di zeri nella matrice  $\hat{A}$ .

Come già detto in precedenza, gli autovalori di  $\hat{A}$  sono uguali a quelli di  $A$  e sono pari all'insieme somma degli autovalori di  $A_r$  e di  $A_{nr}$ :

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s & -2 & -1 \\ -1 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = \\ &= (s+1)(s(s+1) - 2) = (s+1)(s^2 + s - 2) \end{aligned}$$

da cui si ricava facilmente che gli autovalori sono  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1$ ; l'autovalore  $\lambda_3$  è associato alla parte non raggiungibile del sistema, che è asintoticamente stabile. Se fossimo partiti dalla conoscenza degli autovalori ed avessimo voluto constatare la fattibilità di un controllore in retroazione da applicare al sistema, avremmo dovuto verificare la raggiungibilità dell'autovalore positivo  $\lambda_1$ , responsabile dell'instabilità del sistema. Ci viene in aiuto il criterio di Popov esposto in precedenza, secondo il quale la matrice  $[\lambda I - A \mid B]$ , sostituendo un autovalore non raggiungibile, ha rango minore di  $n$ . Si ha allora:

$$[\lambda I - A \mid B]_{\lambda=1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{array} \right]$$

Utilizziamo ancora una volta il criterio di triangolarizzazione di Gauss. Moltiplicando la prima riga per -2 e sommandola all'ultima, e moltiplicando la prima riga per -3 e sommandola alla seconda, si ottiene:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 & -5 \end{array} \right]$$



e moltiplicando la seconda riga per -1 e sommandola all'ultima, si ha:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

dunque il rango della matrice è pari a  $3 = n$ . Di conseguenza, l'autovalore  $\lambda_1 = 1$  è raggiungibile, e pertanto si può teoricamente realizzare un controllore in grado di stabilizzare il sistema.

### Esempio

Si consideri il circuito in figura (4.3).

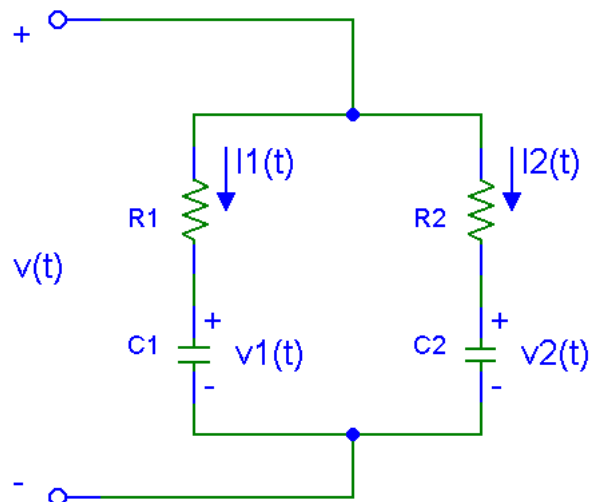


Figura 4.3: Circuito per un esempio di raggiungibilità

Esso è governato dalle seguenti equazioni:

$$v(t) = R_1 I_1(t) + v_1(t) = R_1 C_1 \dot{v}_1(t) + v_1(t)$$

$$v(t) = R_2 I_2(t) + v_2(t) = R_2 C_2 \dot{v}_2(t) + v_2(t)$$

Posto  $v(t) = u(t)$  e scelto il vettore di stato:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

il sistema può essere scritto nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

La matrice di raggiungibilità può essere calcolata facilmente:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{(R_1 C_1)^2} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{(R_2 C_2)^2} \end{bmatrix}$$

Per avere rango pieno pari a 2, la matrice  $\mathcal{R}$  deve avere determinante non nullo. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{R}) &= -\frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{(R_2 C_2)^2} + \frac{1}{R_2 C_2} \frac{1}{(R_1 C_1)^2} = \\ &= \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{R_2 C_2} \left( \frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

da cui risulta  $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$ . Se infatti risultasse 0, sarebbe presente una simmetria  $R_1 C_1 = R_2 C_2$  tale che non sarebbe possibile controllare la tensione sui singoli condensatori. La situazione che si presenta è del tutto analoga al caso di due serbatoi d'acqua perfettamente uguali, con uno stesso tubo di scolo, e riempiti da uno stesso rubinetto, con la stessa portata in ingresso per entrambi. E' intuitivo che non è possibile sbilanciare il livello di un serbatoio rispetto all'altro; se invece i serbatoi sono diversi, con un'opportuna sequenza di ingresso è possibile portare un serbatoio ad un livello diverso dall'altro.

### Esempio

Si considerino due sistemi  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$ , in cui  $B_1$  e  $B_2$  sono singole colonne, ed il sistema ottenuto ponendo in parallelo i due sistemi precedenti. Si ricava facilmente che la forma di stato del sistema in parallelo è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.26)$$

Si vuole dimostrare il seguente:

**Teorema** Consideriamo due sistemi con una sola variabile di ingresso. Il sistema ottenuto dal loro parallelo è raggiungibile se e solo se ( $\Leftrightarrow$ ) i sistemi che lo compongono sono raggiungibili e non hanno autovalori in comune.

**Dimostrazione** Dimostriamo l'implicazione ( $\Rightarrow$ ). Supponendo che  $A_1$  abbia dimensione  $n_1 \times n_1$  e che  $A_2$  abbia dimensione  $n_2 \times n_2$ , se il sistema in parallelo è raggiungibile allora la matrice

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \lambda I - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & \lambda I - A_2 & B_2 \end{array} \right]$$

ha rango pieno  $n_1 + n_2$ , secondo il criterio di Popov. Questo significa che il numero di righe linearmente indipendenti nella matrice è pari proprio a  $n_1 + n_2$ : quindi se si prende la sottomatrice

$$\left[ \lambda I - A_1 \quad 0 \mid B_1 \right]$$

essa ha le  $n_1$  righe linearmente indipendenti, e lo stesso numero di colonne linearmente indipendenti. Ovviamente le colonne linearmente dipendenti dalle altre sono le  $n_2$  colonne di zeri, pertanto eliminandole si ottiene la sottomatrice

$$\left[ \lambda I - A_1 \mid B_1 \right]$$

con rango  $n_1$ , che ci conferma la raggiungibilità del sistema  $(A_1, B_1)$ . Analogo ragionamento vale per il sistema  $(A_2, B_2)$ .

Inoltre, è necessario che  $(A_1, B_1)$  e  $(A_2, B_2)$  abbiano autovalori distinti. Se infatti supponessimo l'esistenza di un autovalore  $\lambda$  in comune, proprio in corrispondenza di tale autovalore le matrici

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda I - A_2 \end{bmatrix}$$

avrebbero rango rispettivamente minore di  $n_1$  e di  $n_2$ . Ciò significa che, nel caso più favorevole, la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A_1 & 0 \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{bmatrix}$$

presenterebbe al massimo un numero di colonne linearmente indipendenti pari a  $n_1 + n_2 - 2$ , cosicché l'aggiunta della colonna

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

porterebbe al massimo il rango a  $n_1 + n_2 - 1$ . Conseguenza di questo fatto è che il sistema in parallelo sarebbe non raggiungibile, e ciò sarebbe in contrasto con l'ipotesi.

Dimostriamo ora l'implicazione inversa ( $\Leftarrow$ ). Se i due sistemi sono raggiungibili e non hanno autovalori in comune, allora in corrispondenza di un autovalore di  $A_1$  si ha che:

$$\left[ \lambda I - A_1 \mid B_1 \right]$$

ha rango  $n_1$  perché il sistema è raggiungibile. D'altra parte anche la matrice:

$$\left[ \lambda I - A_2 \right]$$

ha rango  $n_2$  perché  $\lambda$  non è autovalore di  $A_2$ ; di conseguenza, la matrice:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \lambda I - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & \lambda I - A_2 & B_2 \end{array} \right]$$

ha rango massimo  $n_1 + n_2$ , perché la conformazione della matrice è tale da rendere linearmente indipendenti i due gruppi di  $n_1$  ed  $n_2$  colonne. Analogo ragionamento vale se consideriamo un autovalore di  $A_2$ ; pertanto, il sistema formato dal parallelo di  $(A_1, B_1)$  e  $(A_2, B_2)$  risulta raggiungibile.

## 4.5 Osservabilità e ricostruibilità

Il problema dell'osservabilità tratta il legame esistente tra stato del sistema ed uscita. Supponiamo di avere un sistema lineare autonomo a tempo continuo in cui sono note le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e i segnali  $y(t)$ ,  $u(t)$  in un intervallo  $[0, \tau]$ . Il problema che si porremo in questa sezione è il seguente "E' possibile conoscere lo stato del sistema nell'intervallo di tempo  $[0, \tau]$ . Si possono allora dare le seguenti definizioni:

**Definizione** Il sistema è **osservabile** nell'intervallo  $[0, \tau]$  se noti  $u(t)$  ed  $y(t)$  per  $t \in [0, \tau]$  è possibile determinare **univocamente**  $x(0)$ .

**Definizione** Il sistema è **ricostruibile** nell'intervallo  $[0, \tau]$  se noti  $u(t)$  ed  $y(t)$  per  $t \in [0, \tau]$  è possibile determinare **univocamente**  $x(\tau)$ .

Prima di proseguire nei calcoli e nelle considerazioni, possiamo da subito porre la matrice  $D$  pari a zero. Infatti, poichè  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$  può essere letta anche come  $y(t) - Du(t) = Cx(t)$ , non è restrittivo porre  $D = 0$ .

Ci si chiede ora se il problema dell'osservabilità possa essere risolto considerando solamente le relazioni puntuali, cioè valide istante per istante, come l'espressione  $y(0) = Cx(0)$ . La risposta è evidentemente negativa, perché la matrice  $C$ , essendo la maggior parte delle volte non quadrata e quindi non invertibile, non permette di determinare univocamente  $x(0)$ . E' allora necessario considerare anche i legami dinamici già noti:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \\ y(t) &= Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

Da questa espressione emerge chiaramente un particolare: dato che il sistema a tempo continuo è reversibile, è possibile trovare  $x(0)$  e successivamente calcolare anche  $x(\tau)$ , o viceversa. Dunque nel caso di sistemi a tempo continuo il problema dell'osservabilità è equivalente al problema della ricostruibilità.

Si noti inoltre che il problema dell'osservabilità è concettualmente diverso da quello della raggiungibilità discusso in precedenza. Quest'ultimo, infatti, è un problema che concerne l'esistenza di uno stato, mentre qui l'esistenza è certa ma se ne vuole discutere l'unicità. In questo tipo di problemi, solitamente, si osserva cosa accade se manca l'unicità; per questo motivo, detto  $g(t) = C \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$ , supponiamo che esistano due stati  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  tali che:

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}\bar{x}_1 + g(t) \\ y(t) &= Ce^{At}\bar{x}_2 + g(t) \end{aligned}$$

(4.27)

ossia che producano la stessa uscita a fronte di uno stesso ingresso. Sottraendo membro a membro le equazioni, si ottiene:

$$0 = Ce^{At}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + 0 \quad (4.28)$$

e quindi non c'è unicità se e solo se  $(\Leftrightarrow) \exists \bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \neq 0$  tale che  $Ce^{At}\bar{x} = 0$ . L'implicazione da destra a sinistra è presto verificata, se si considerano le equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= Ce^{At}\bar{x} \\ y(t) &= Ce^{At}x(0) + g(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

e si sommano fra loro, ottenendo:

$$y(t) = Ce^{At}(x(0) + \bar{x}) + g(t) \quad (4.30)$$

dunque i vettori  $x(0)$  e  $x(0) + \bar{x}$  producono la stessa uscita, cioè l'unicità manca. Il problema dell'osservabilità è allora risolubile se e solo se  $(\Leftrightarrow)$  non esistono vettori  $\bar{x} \neq 0$  tali che  $Ce^{At}\bar{x} = 0 \forall t \in [0, \tau]$ .

**Definizione** Un vettore  $\bar{x} \in \mathbf{r}^n$ ,  $\bar{x} \neq 0$  è detto **non osservabile (indistinguibile da zero)** nell'intervallo  $[0, \tau]$  se  $Ce^{At}\bar{x} = 0 \forall t \in [0, \tau]$ .

L'insieme dei vettori non osservabili  $X_{no}$  è un sottospazio vettoriale, perché i suoi vettori appartengono al nucleo di  $Ce^{At}$  che è un sottospazio. Dalle equazioni sopra ricavate, è facile rendersi conto che uno stato non osservabile scelto come condizione iniziale per un sistema, con  $u(t) = 0$ , produce un'uscita nulla. Alla luce di questa definizione, il problema dell'osservabilità ha soluzione se e solo se  $\Leftrightarrow X_{no} = \{0\}$ .

L'espressione  $Ce^{At}\bar{x}$  può essere ovviamente espansa utilizzando lo sviluppo in serie dell'esponenziale:

$$Ce^{At}\bar{x} = C \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) \bar{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{CA^k \bar{x}}{k!} t^k = 0 \quad \forall t \in [0, \tau] \quad (4.31)$$

Utilizzando ancora una volta il principio di identità delle potenze, possiamo dire che

$$CA^k \bar{x} = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad CA^k \bar{x} = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.32)$$

in cui si è utilizzato il criterio di Cayley-Hamilton. Analogamente a quanto è stato fatto nel problema della raggiungibilità, possiamo incorporare tutte le espressioni in una matrice:

$$\begin{cases} C\bar{x} = 0 \\ CA\bar{x} = 0 \\ \dots \\ CA^{n-1}\bar{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \bar{x} = 0 \Rightarrow O\bar{x} = 0 \quad (4.33)$$

dove si è introdotta la matrice  $O$  detta **matrice di osservabilità**.

**Teorema** Il sistema è osservabile  $\Leftrightarrow \ker(O) = \{0\}$ .

La matrice  $O$  ha dimensione  $(n \cdot p) \times n$ , ed è quadrata se  $p = 1$  (uscita unica). Se  $\ker(O) = 0$ , allora deve essere  $\text{rank}(O) = n$ ; se accadesse infatti che  $O\bar{x} = 0$  con  $\bar{x} \neq 0$  significherebbe che le colonne di  $O$  sarebbero linearmente dipendenti, con la conseguenza che  $\text{rank}(O) < n$ . Si ha dunque:

**Corollario** Il sistema è osservabile  $\Leftrightarrow \text{rank}(O) = n$ .

Ancora una volta un problema analitico è stato trasformato in un problema algebrico. Si osservi che la matrice  $B$  non interviene nella determinazione dell'osservabilità del sistema; nemmeno  $\tau$  influenza la matrice di osservabilità, e questo è in qualche modo analogo a quanto è stato trovato nel problema della raggiungibilità. Questo significa che se si può risalire allo stato di un sistema, ciò è possibile in qualunque periodo di tempo arbitrariamente piccolo.

Ancora una volta questo deve far riflettere sull'idealità delle ipotesi del teorema e sulla pratica delle situazioni reali. Ogni misura di  $y(t)$ , infatti, è certamente affetta da disturbi esterni non sempre quantificabili esattamente. Di conseguenza, più il tempo di osservazione è ridotto, più alta è la probabilità di influenza negativa dell'errore, perché in un intervallo molto piccolo il rumore potrebbe irrimediabilmente invalidare la misura di  $y(t)$ . Nella realtà, dunque, si procede ad operazioni di filtraggio del segnale da misurare, e si procede all'osservazione del medesimo in un intervallo di tempo non certo infinitesimo.

## 4.6 Decomposizione di Kalman per l'osservabilità

In analogia a quanto visto per il problema della raggiungibilità, se  $\ker(O) \neq 0$  allora è possibile prendere una base del nucleo di  $O$  e chiamarla  $T_{no} = [\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_r]$  (per qualche esempio in proposito si rimanda all'appendice A). E' altresì possibile completare tale base con un'altra base di  $\mathbf{R}^{n-r}$ , denominata  $T_o = [\bar{t}_{r+1}, \bar{t}_{r+2}, \dots, \bar{t}_n]$ , in modo da ottenere una base di  $\mathbf{R}^n$  del tipo:

$$T = \left[ T_{no} \mid T_o \right] \quad (4.34)$$

Ogni vettore di  $\mathbf{R}^n$  è dunque esprimibile come:

$$x = \left[ T_{no} \mid T_o \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ \hat{x}_o \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

In particolare, ogni vettore non osservabile è esprimibile come:

$$x = \left[ T_{no} \mid T_o \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

da cui risulta che  $X_{no} = \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} T_{no} & T_o \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_{no} \text{ arbitrario} \right\}$ . Si noti la dualità rispetto al problema della raggiungibilità: in quel caso, la base di  $\mathbf{R}_n$  è data dal numero di colonne linearmente indipendenti di  $\mathcal{R}$ , per cui se il sistema è raggiungibile basta prendere come base l'intera matrice di raggiungibilità. Qui, invece, se il sistema è osservabile, la matrice  $O$  ha rango pari ad  $n$  e nucleo di dimensione zero, per cui la base di  $\mathbf{R}^n$  è creata considerando l'intero spazio complementare allo spazio dei vettori non osservabili.

$T_o$  è inoltre una base del cosiddetto spazio osservabile, ma tale nomenclatura è puramente convenzionale, perché se esiste un vettore non osservabile l'intero problema di osservabilità non ha soluzione.

Utilizzando la matrice  $T$  per applicare una trasformazione al sistema, si ottiene una forma di stato di questo tipo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_{no}(t) \\ \hat{x}_o(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{no} & A_{no,o} \\ \phi_1 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{no}(t) \\ \hat{x}_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_o \end{bmatrix} u(t) \\ Y(t) &= \begin{bmatrix} \phi_2 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{no}(t) \\ \hat{x}_o(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

in cui le matrici  $\phi_1$  e  $\phi_2$  si dimostrano essere identicamente nulle. Per quanto riguarda  $\phi_2$ , infatti, se si pone  $u(t) = 0$  ed una condizione iniziale pari a

$$x(0) = \begin{bmatrix} \hat{X}_{no}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

si deve ottenere, per costruzione,  $y(t) = 0 \forall t > 0$ , e questo è possibile solo se  $\phi_2$  è pari ad una matrice identicamente nulla. Lo schema strutturale del sistema è riportato in figura (4.4).

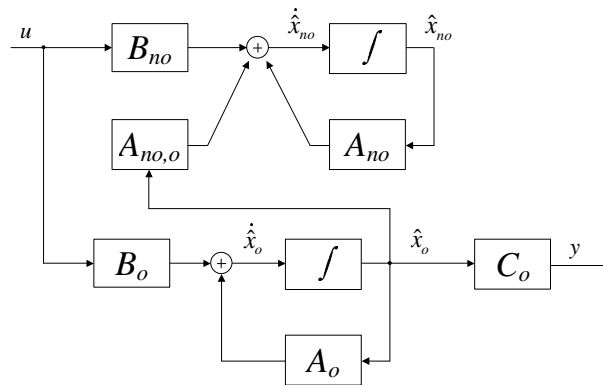


Figura 4.4: Decomposizione di Kalman per l'osservabilità

Si osservi come la componente non osservabile del sistema non influenzi l'uscita  $y$  (sarebbe infatti il contributo della sottomatrice  $\phi_2$ ); inoltre gli stati non osservabili non producono alcuna influenza sugli stati osservabili (sarebbe infatti il contributo di  $\phi_1$ ), perché altrimenti si otterrebbe un'influenza indiretta sull'uscita da parte degli stati non osservabili.

La parte costituita da  $(A_o, B_o, C_o)$  è detta **sottosistema osservabile**, mentre quella costituita

da  $(A_{no}, B_{no}, 0)$  è detta **sottosistema non osservabile**. Il sottosistema osservabile è, per quanto detto, l'unica in grado di influenzare l'uscita.

Lo spettro della matrice  $\hat{A}$  ottenuta dopo la decomposizione di Kalman ha gli autovalori di  $A_{no}$  e di  $A_o$ , perché per costruzione è una matrice triangolare a blocchi. Analogamente al problema della raggiungibilità, allora, è possibile parlare di modi osservabili e modi non osservabili; inoltre, si può verificare la seguente espressione:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_o(sI - A_o)^{-1}B_o \quad (4.38)$$

Si può intuitivamente capire che dal punto di vista dell'interazione ingresso-uscita, il sottosistema non osservabile è completamente inesistente.

## 4.7 Osservabilità dei sistemi discreti

Il problema dell'osservabilità nei sistemi a tempo discreto si formula nel medesimo modo del caso continuo. In questo caso, l'uscita del sistema è pari a:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} CA^{k-h-1} Bu(h) = CA^k x(0) + g(k)$$

e supponendo di operare  $T$  osservazioni in istanti diversi con lo scopo di risalire univocamente ad  $x(0)$ , si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \dots \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \dots \\ g(T-1) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

in forma più compatta, si può scrivere:

$$Y(t) = O_{(T)}x(0) + G(T) \quad (4.40)$$

che costituisce un esperimento di osservazione in  $T$  passi. È intuitivo rendersi conto che per  $T$  grande si ottengono più informazioni sul sistema e maggiori vincoli su  $x(0)$ , aumentando la probabilità di determinarlo univocamente. In questo caso, dunque, potrebbe accadere che non si ottengano soluzioni per  $T - k$  passi, ma che per  $T - k + 1$  ci siano delle soluzioni accettabili. Ovviamente non si prosegue per  $T > n$ , perché come già più volte detto ogni potenza successiva alla  $n$ -esima risulta combinazione lineare delle precedenti.

Un altro modo di interpretare questo fatto è che aumentando il numero di passi si cerca di aumentare il rango della matrice  $O$ , allo scopo di restringerne il nucleo, sperando di ridurlo all'insieme vuoto. In conclusione, il problema dell'osservabilità ha soluzione in  $n$  passi oppure non ne ha; pertanto si può dire che:

**Teorema** Il sistema è osservabile  $\Leftrightarrow \text{rank}(O) = n$ .

La condizione sopra esposta è la medesima dei sistemi a tempo continuo.



Analogamente a quanto accadeva per i problemi della raggiungibilità e controllabilità nei sistemi a tempo discreto, anche in questo caso l'osservabilità e la ricostruibilità non sono equivalenti in generale. L'unico caso in cui essi sono equivalenti è quando il sistema è reversibile, cioè la matrice  $A$  è invertibile.

### Esempio

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Non ottenendo da esso nessuna informazione da  $y(k)$ , non si può in nessun modo ricavare  $x_1(0)$  ed  $x_2(0)$ . Tuttavia, essendo  $A$  una matrice nilpotente, per  $k > 2$  ogni vettore di stato è pari al vettore nullo, per cui il problema della ricostruibilità ha soluzione. Da questo semplice caso si osserva come il problema della ricostruibilità sia diverso da quello dell'osservabilità nel caso di sistemi a tempo discreto.

### Esempio

Si riconsideri il sistema della macchina elettrica a corrente continua già trattata in precedenza:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k\bar{i}_e}{L_a} & 0 \\ \frac{k\bar{i}_e}{J} & -\frac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a(t)$$

Per semplicità, si è supposta nulla la coppia resistiva esterna data dal carico. Questo sistema può essere usato come azionamento elettrico, ma per essere utilizzato in tal modo su di esso sono necessarie delle misurazioni di posizione o velocità angolare. Supponendo di scegliere come uscita l'angolo del sistema, la matrice  $C$  assume la forma  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , da cui si ricava la seguente matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{k\bar{i}_e}{J} & -\frac{f}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha rango pieno, per cui è possibile risalire a  $\varphi(0)$  ed alle altre variabili di stato a partire dalla misurazione della posizione angolare.

Viceversa, se si sceglie come uscita la velocità angolare, la matrice  $C$  è pari a  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , e la matrice di osservabilità è la seguente:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k\bar{i}_e}{J} & -\frac{f}{J} & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono due coefficienti diversi da zero. Qui si nota che il rango della matrice è pari a 2, mentre il nucleo ha dimensione 1 e contiene tutti i vettori del tipo:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conseguentemente, dalla misurazione della velocità angolare non è possibile risalire alla posizione; d'altra parte ciò è ben noto, visto che dalla derivata si riesce a determinare una primitiva a meno di una costante.

Con calcoli analoghi, si può vedere che neanche osservando la corrente d'armatura si può osservare la posizione angolare. In conclusione, dato l'angolo è possibile risalire a velocità angolare e corrente d'armatura, ma date queste ultime due variabili di stato il procedimento inverso non è possibile.

### Esempio

Un modo per risalire alla velocità angolare (ma non l'unico, come si avrà modo di vedere) data la posizione del sistema considerato nell'esempio precedente è realizzare un blocco pseudo-derivatore. Supponendo (non è restrittivo)  $y(0) = 0$ , i legami nel dominio del tempo e nel dominio della trasformata di Laplace sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(t) \\ \omega(s) &= s\varphi(s) \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento sopra riportata non è fisicamente implementabile, perché non è propria. Tuttavia, si può alterare il diagramma di Bode ad alta frequenza del derivatore puro, inserendo due poli lontano dalla banda del sistema. Ciò si ottiene è un diagramma del tipo riportato in figura (4.5), dove

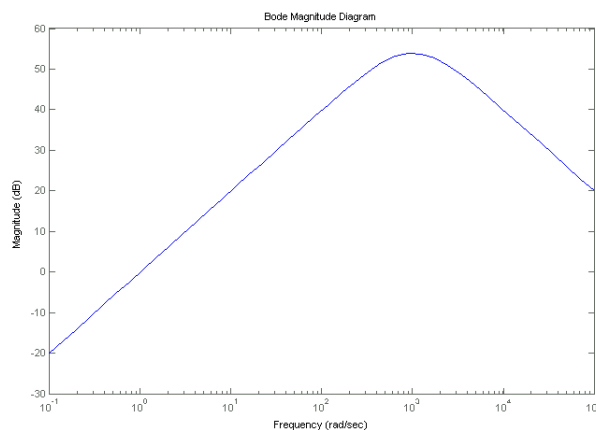


Figura 4.5: Diagramma di Bode di un derivatore reale, con polo a  $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

è rappresentata una funzione di trasferimento strettamente propria del tipo:

$$W(s) = \frac{s}{(1 + \tau s)^2} = \frac{1}{\tau^2} \frac{s}{(s + \frac{1}{\tau})^2} = \lambda^2 \frac{s}{(s + \lambda^2)}$$

Una rappresentazione di stato a tempo continuo che realizzi tale funzione di trasferimento è data dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [ 0 \quad \lambda^2 ]$$

e per realizzare il corrispondente sistema a tempo discreto si possono utilizzare le formule già note:

$$\begin{aligned} A_D &= e^{AT} \\ B_D &= \int_0^T e^{A\xi} d\xi B \\ C_D &= C \end{aligned}$$

Questo tipo di pseudo-derivatore funziona in maniera soddisfacente al calcolatore.

### Esempio

Esistono dei sistemi che, tramite degli accelerometri, possono risalire alla propria posizione. Questo problema di osservabilità, per quanto visto negli esempi precedenti, non è risolvibile; in realtà, però, in questi casi sono note la posizione e la velocità all'istante iniziale, in modo che il problema differenziale sia risolvibile:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a(\sigma) d\sigma + v(0) \\ x(t) &= \int_0^t v(t) dt + x(0) \end{aligned}$$

Il punto debole è che un piccolo errore di misurazione su  $a(t)$  si ripercuote sul calcolo esatto della posizione  $x(t)$ . Supponendo, ma non è restrittivo,  $x(0) = x'(0) = 0$ , si ottiene infatti:

$$\ddot{y}(t) = u(t) + \omega(t)$$

dove  $\omega(t)$  è l'errore sulla misura di  $a(t)$ . Operando una doppia integrazione si ha una stima della posizione:

$$\hat{y}(t) = \int_0^t \int_0^\xi u(\xi) d\xi d\sigma + \int_0^t \int_0^\xi \omega(\xi) d\xi d\sigma$$

in cui l'errore si amplifica sempre più causando un effetto di deriva. Per questo tipo di sistemi, oggi non più molto in uso in seguito all'introduzione di sistemi satellitari, è previsto che ad intervalli regolari l'accelerometro sia resettato, precisamente in punti in cui si conosca con esattezza (e per altre vie, ovviamente) la posizione del sistema.

## 4.8 Dualità

Si è visto come il problema della raggiungibilità e quello dell'osservabilità presentino molti punti in comune. Questa interazione può essere formalizzata introducendo il concetto di sistema duale, che risulta un puro artificio matematico senza significato fisico, ma molto utile per individuare le proprietà comuni ai due problemi.

Dato un sistema  $\Sigma(A, B, C, D)$ , in cui le matrici sono di congrua dimensione, si definisce **sistema duale** il sistema rappresentato da  $\Sigma^* = \Sigma(A^T, C^T, B^T, D^T)$ . Dal punto di vista delle equazioni, si ha:

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \Sigma^* = \begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) = B^T z(t) + D^T v(t) \end{cases} \quad (4.41)$$

Un modo semplice per ricordarsi come ricavare le matrici del sistema duale è operare la trasposta della seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Si osservi come il numero degli ingressi nel sistema duale sia pari a  $p$ , cioè il numero delle uscite del sistema primario, e che il numero delle uscite nel sistema duale è pari ad  $m$ , cioè il numero degli ingressi del sistema primario. Lo stato del sistema duale, invece, appartiene sempre ad  $\mathbf{R}^n$ , come nel sistema primario.

Si osservano inoltre le seguenti relazioni:

- il problema della raggiungibilità tratta le matrici  $(A, B)$  per il sistema primario,  $(A^T, C^T)$  per il sistema duale;
- il problema dell'osservabilità tratta le matrici  $(A, C)$  per il sistema primario,  $(A^T, B^T)$  per il sistema duale.

Considerando allora la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}^*$  del sistema duale:

$$\mathcal{R}^* = \left[ C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T \right] \quad (4.43)$$

si nota come essa sia pari proprio alla matrice  $\mathcal{O}^T$  del sistema primario:

$$\mathcal{R}^{*T} = \begin{bmatrix} C \\ (A^T C^T)^T \\ \dots \\ ((A^T)^{n-1} C^T)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O} \quad (4.44)$$

e dunque  $\mathcal{R}^* = \mathcal{O}^T$ . Analogamente, se si considera la matrice  $\mathcal{O}^*$  per il sistema duale e se ne calcola la trasposta, si ha:

$$\mathcal{O}^* = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \dots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{O}^{*T} = \left[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B \right] = \mathcal{R} \quad (4.45)$$

e dunque  $O^* = \mathcal{R}^T$ . Questa dualità è molto utile sotto il profilo matematico, perché ogni algoritmo che si utilizza per risolvere problemi di raggiungibilità nel sistema primario è valido, con qualche modifica, per la risoluzione di problemi di osservabilità nel sistema duale.

Sussistono dunque le fondamentali proprietà:

- $\Sigma$  è completamente raggiungibile  $\Leftrightarrow \Sigma^*$  è osservabile;
- $\Sigma$  è osservabile  $\Leftrightarrow \Sigma^*$  è completamente raggiungibile.

Una possibile applicazione della dualità appena introdotta riguarda il criterio di Popov. Si è già visto che  $\Sigma$  è completamente raggiungibile se e solo se  $\left[ \lambda I - A \mid B \right]$  ha rango  $n$  per ogni autovalore di  $A$ ; per dualità possiamo allora dire che  $\Sigma$  è osservabile se e solo se:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.46)$$

per ogni autovalore di  $A$ . E' sufficiente infatti applicare il criterio di Popov al sistema duale, ricordando che il rango di una matrice è pari a quello della matrice trasposta, e che lo spettro di  $A$  e di  $A^T$  è il medesimo.

Un'altra applicazione riguarda un esempio trattato in precedenza. Si è dimostrato che, dati due sistemi  $(A_1, B_1)$  e  $(A_2, B_2)$ , con  $B_1$  e  $B_2$  matrici colonna, il sistema generato ponendo in parallelo i precedenti è raggiungibile se e solo se i sistemi che lo compongono sono raggiungibili e non hanno autovalori in comune. Applicando lo stesso teorema al sistema duale ed utilizzando le proprietà di dualità, è possibile dire che dati due sistemi  $(A_1, C_1)$  e  $(A_2, C_2)$ , con  $C_1$  e  $C_2$  matrici riga, il sistema generato ponendo in parallelo i precedenti è osservabile se e solo se i sistemi che lo compongono sono osservabili e non hanno autovalori in comune.

## 4.9 Rappresentazione di stato e funzione di trasferimento

Si supponga ora di aver studiato la raggiungibilità e l'osservabilità di un sistema generico, e di aver univocamente ottenuto i sottospazi  $X_r = \text{Ra}(\mathcal{R})$  e  $X_{no} = \text{ker}(O)$ . Introduciamo allora i seguenti sottospazi:

- $X_1 = X_r \cap X_{no}$ ;
- $X_2$  è tale che  $X_r = X_1 \oplus X_2$  (complemento di  $X_1$  in  $X_r$ );
- $X_3$  è tale che  $X_{no} = X_1 \oplus X_3$  (complemento di  $X_1$  in  $X_{no}$ );
- $X_4$  è tale che  $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = \mathbf{R}^n$ .

Si ha inoltre che  $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 = X_r + X_{no}$ . Sappiamo inoltre che i sottospazi  $X_{nr}$  e  $X_o$  sono complementari a  $X_r$  e  $X_{no}$  rispetto ad  $\mathbf{R}^n$ ; pertanto possiamo dire che:

- $X_{nr} = X_3 \oplus X_4$
- $X_o = X_2 \oplus X_4$ .

raggiungibile →	$X_1$	$X_2$
non raggiungibile →	$X_3$	$X_4$
	↑	↑
	non osservabile	osservabile

Tabella 4.1: Relazioni tra i sottospazi

Le relazioni tra ogni sottospazio possono essere riassunte nella tabella (4.1), che va letta secondo la direzione delle frecce.

E' ora possibile scegliere una base di  $\mathbf{R}^n$  formata nel seguente modo:

$$T = [ T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 ] \quad (4.47)$$

in cui le colonne delle matrici  $T_k$  formano una base del corrispondente sottospazio  $X_k$ . Ogni vettore  $x \in \mathbf{R}^n$  è rappresentabile come:

$$x = [ T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 ] \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Ogni vettore raggiungibile è esprimibile come:

$$x_r = [ T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 ] \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

mentre quelli non osservabili si esprimono come:

$$x_{no} = [ T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 ] \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ 0 \\ \hat{X}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Analogamente, i vettori non raggiungibili si esprimono come:

$$x_{nr} = [ T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 ] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

mentre i vettori osservabili sono del tipo:

$$x_o = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{X}_2 \\ 0 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Utilizzando la matrice  $T$  per operare una trasformazione al sistema, si ottiene una forma di stato con matrici  $\hat{A} = T^{-1}AT$ ,  $\hat{B} = T^{-1}B$ ,  $\hat{C} = CT$  di questo tipo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_2 & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Tutti gli zeri presenti nelle matrici sono ovviamente non casuali, ma derivano dalle definizioni di sistema raggiungibile, non raggiungibile, osservabile e non osservabile. Si possono riconoscere in particolare i seguenti sottosistemi:

- $\Sigma_1(A_1)$  è il sottosistema raggiungibile - non osservabile;
- $\Sigma_2(A_2)$  è il sottosistema raggiungibile - osservabile;
- $\Sigma_3(A_3)$  è il sottosistema non raggiungibile - non osservabile;
- $\Sigma_4(A_4)$  è il sottosistema non raggiungibile - osservabile.

Si può inoltre dimostrare che:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_2(sI - A)^{-1}B_2 \quad (4.54)$$

cioè che la funzione di trasferimento è data solamente dalla parte del sistema raggiungibile ed osservabile. Le componenti non raggiungibili, infatti, non risentono dell'ingresso, mentre le componenti non osservabili non danno nessun contributo in uscita. Si può inoltre osservare che, nel caso generale,  $W(s)^* = W^T(s)$ ; pertanto se  $m = p = 1$  il sistema primario ed il sistema duale presentano la stessa funzione di trasferimento. L'unica differenza in quest'ultimo caso è che le cancellazioni dovute a modi non raggiungibili nel sistema primario sono invece cancellazioni dovute a modi non osservabili nel sistema duale.

## 4.10 Cancellazioni

Si supponga il caso più semplice di sistema dinamico, in cui  $m = p = 1$  e  $D = 0$  e quindi  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{n(s)}{d(s)}$ . Il denominatore  $d(s)$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$ , e

pertanto ha grado  $n$ .

Si dice che  $n(s)$  e  $d(s)$  sono **primi fra loro** o **coprimi** se  $\nexists \lambda \in \mathbf{C}$  tale che  $n(\lambda) = 0$  e  $d(\lambda) = 0$ . Se ciò accade, allora si ha  $n(s) = (s - \lambda)\tilde{n}(s)$  e  $d(s) = (s - \lambda)\tilde{d}(s)$ . Si può enunciare il seguente:

**Teorema** Dato un sistema  $\Sigma(A, B, C)$  con  $m = p = 1$ , il numeratore  $n(s)$  ed il denominatore  $d(s)$  della funzione di trasferimento sono coprime  $\Leftrightarrow (A, B, C)$  è raggiungibile ed osservabile.

**Dimostrazione** Dimostriamo l'implicazione ( $\Rightarrow$ ) per assurdo. Supponendo che  $n(s)$  e  $d(s)$  siano coprime ed il sistema non raggiungibile e non osservabile, la funzione di trasferimento, per quanto visto in precedenza, dipenderebbe solamente dalla parte raggiungibile ed osservabile del sistema:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2$$

in cui, però,  $\dim(A_2) < \dim(A)$ . Ciò significa che sono state operate delle cancellazioni da  $n(s)$  e  $d(s)$ , e quindi che numeratore e denominatore non sono primi fra loro: si è giunti ad un assurdo.

Dimostriamo ora l'implicazione ( $\Leftarrow$ ). Supponendo il sistema raggiungibile ed osservabile con  $n(s)$  e  $d(s)$  non primi fra loro, si ottiene che la funzione di trasferimento è semplificabile attraverso cancellazioni; scritto in maniera formale, si ha:

$$\begin{aligned} d(s) &= \det(sI - A) = 0 \quad \text{per } s = \lambda \\ n(s) &= \det \left[ \begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = 0 \quad \text{per } s = \lambda \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ciò comporta dunque che il numeratore della funzione di trasferimento è una matrice degenere, e come tale essa ammette un nucleo non nullo:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \lambda I - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ -\bar{u} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.56)$$

in cui  $\bar{x}$  ha  $n$  componenti e  $\bar{u}$  ne ha una sola. Lo stesso discorso vale per il denominatore della matrice:

$$\left[ \lambda I - A \right] \tilde{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[ \lambda I - A \mid B \right] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.57)$$

dove l'ultima uguaglianza è sempre vera, dalle proprietà delle matrici partizionate a blocchi. Si presentano ora due casi distinti:

- $\bar{u} \neq 0$ : in questo caso si osserva che i due vettori:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti: pertanto  $\dim(\ker \left[ \lambda I - A \mid B \right]) \geq 2$ . Dato che il numero di colonne di  $\left[ \lambda I - A \mid B \right]$  è pari a  $n + 1$ , ne consegue che il rango della matrice è minore di  $n$ , per cui si giunge all'assurdo che il sistema non è raggiungibile.



- $u = 0$ : in tal caso, si ha

$$\left[ \begin{array}{c|c} \lambda I - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.58)$$

per cui, considerando solo le prime  $n$  colonne, si ottiene:

$$\left[ \begin{array}{c} \lambda I - A \\ \hline C \end{array} \right] \bar{x} = 0 \quad (4.59)$$

Dal criterio di osservabilità enunciato in precedenza (in occasione della discussione sul sistema duale), ne consegue che la matrice ha rango minore di  $n$ , e pertanto il sistema non è osservabile: anche in questo caso si è giunti ad un assurdo.

Il caso di sistemi con  $m > 1$  e  $p > 1$  è senz'altro più complicato. Si consideri, come prova, il seguente esempio.

### Esempio

Sia dato il sistema con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici di raggiungibilità ed osservabilità hanno la seguente forma:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}$$

ed hanno ambedue rango  $n$ , per cui il sistema è raggiungibile ed osservabile. Tuttavia, la matrice delle funzioni di trasferimento assume questa forma:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2} & \frac{0}{(s+1)^2} \\ \frac{0}{(s+1)^2} & \frac{s+1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

e quindi ogni singolo elemento subisce una cancellazione. Non è più dunque vero che un sistema raggiungibile ed osservabile ha funzioni di trasferimento con numeratore e denominatore primi fra loro.

Il caso di sistemi multidimensionali non sarà qui analizzato in dettaglio, tuttavia i risultati fondamentali a cui si giunge sono:

- se manca la raggiungibilità o l'osservabilità di un sistema, sono sicuramente presenti delle cancellazioni nella matrice delle funzioni di trasferimento (ma non viceversa, come già visto);
- se la matrice  $A$  ha autovalori distinti, allora il sistema è raggiungibile ed osservabile  $\Leftrightarrow$  non ci sono cancellazioni.

### 4.11 Stabilità esterna

Il rapporto ingresso-uscita ed il legame con la rappresentazione di stato di un sistema dinamico può essere studiato anche introducendo la seguente definizione.

**Definizione** Posto  $x(0) = 0$ , un sistema  $\Sigma(A, B, C, D)$  è **esternamente stabile** o **BIBO (Bounded Input, Bounded Output) stabile** se, assunto  $\|u(t)\| \leq M$ ,  $\exists N$  tale che  $\|y(t)\| \leq N$ .

A questo proposito, sussiste il seguente:

**Teorema** Un sistema è esternamente stabile  $\Leftrightarrow$  il sottosistema raggiungibile ed osservabile è asintoticamente stabile. Se l'intero sistema è raggiungibile ed osservabile, allora la stabilità asintotica implica ed è implicata dalla BIBO stabilità.

Invece di dimostrare il teorema, è utile e costruttivo far vedere che, nel caso  $m = p = 1$ , se la matrice  $A$  è asintoticamente stabile allora il sistema è BIBO stabile. Posto  $x(0) = 0$  e  $\|u(t)\| \leq M$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t W(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma \Rightarrow |y(t)| = \left| \int_0^t W(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma \right| \leq \\
 &\leq \int_0^t |W(t-\sigma)u(\sigma)| d\sigma = \int_0^t |W(\sigma)| |u(t-\sigma)| d\sigma \leq \\
 &\leq M \int_0^t |W(\sigma)| d\sigma \leq M \int_0^{+\infty} |W(\sigma)| d\sigma = \\
 &= M \int_0^{+\infty} |Ce^{A\sigma}B| d\sigma = M\mu_{(A,B,C)} \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

dove  $\mu_{(A,B,C)} = \|(A, B, C)\|_1$ .

La dimostrazione costruttiva appena esposta può essere utile per calcolare la limitazione dell'uscita in presenza di un disturbo limitato in ingresso, dovuto a fenomeni non quantificabili ma di cui si conosce almeno la limitazione in ampiezza.

Si tenga presente che la proprietà di BIBO stabilità non offre nessun tipo di garanzia sul buon funzionamento del sistema, qualora questo non sia raggiungibile oppure non osservabile. Infatti i modi non osservabili (che per definizione non influiscono sull'uscita) e quelli non raggiungibili (che nella definizione di BIBO stabilità partono da  $x(0) = 0$  e tali rimangono) potrebbero dar luogo a risposte esponenziali crescenti nel tempo, sotto opportune condizioni iniziali.

### 4.12 Forma canonica di controllo

Si consideri un sistema  $\Sigma(A, B)$  con  $A$  di dimensione  $n \times n$  e  $B$  di dimensione  $n \times 1$ , ossia con un ingresso scalare. E' possibile verificare che, se la coppia  $(A, B)$  è raggiungibile, esiste una matrice

$T$  di trasformazione tale che  $\hat{A} = T^{-1}AT$  e  $\hat{B} = T^{-1}B$  siano nella forma:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Può essere interessante calcolare la matrice  $T$  che permette di eseguire questa trasformazione: a tale proposito, consideriamo la matrice di raggiungibilità del sistema posto nella nuova forma di stato:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} &= \left[ \hat{B} \mid \hat{A}\hat{B} \mid \dots \mid \hat{A}^{n-1}\hat{B} \right] = \left[ T^{-1}B \mid T^{-1}AB \mid \dots \mid T^{-1}A^{n-1}B \right] \\ &\Rightarrow \hat{\mathcal{R}} = T^{-1}\mathcal{R} \end{aligned} \quad (4.62)$$

In maniera del tutto analoga, per dualità, è facile osservare che  $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}T$ . Se, come ipotizzato,  $m = 1$  ed il sistema è raggiungibile, le matrici di raggiungibilità sono quadrate ed invertibili, per cui è possibile scrivere:

$$T\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \Rightarrow T = \mathcal{R}\hat{\mathcal{R}}^{-1} \quad (4.63)$$

Dunque per trovare la matrice  $T$  si deve passare attraverso il calcolo della matrice  $\hat{\mathcal{R}}$ , ossia è necessario conoscere l'ultima riga della matrice  $\hat{A}$  che presenta gli unici elementi veramente incogniti.

Tuttavia, noi sappiamo che la trasformazione per similitudine operata non modifica gli autovalori della matrice  $A$ , per cui il polinomio caratteristico di  $\hat{A}$  deve essere il medesimo di quello di  $A$ . Sviluppando il determinante di  $(sI - \hat{A})$  secondo gli elementi dell'ultima riga, si può facilmente verificare che risulta:

$$\det(sI - \hat{A}) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (4.64)$$

Si osserva allora che gli elementi incogniti di  $\hat{A}$  sono pari ai coefficienti del polinomio caratteristico, che è uguale a quello di  $A$ . Pertanto siamo in grado di trovare la matrice  $T$  attraverso i seguenti passi:

1. calcolare  $\det(sI - A)$  e considerarne i coefficienti;
2. calcolare  $\mathcal{R}$ ;
3. calcolare  $\hat{\mathcal{R}}$ ;
4. calcolare  $T = \mathcal{R}\hat{\mathcal{R}}^{-1}$ .

Una matrice del tipo di  $\hat{A}$  si dice in **forma di Frobenius**. Questa forma è molto importante fondamentalmente per tre motivi, di cui due saranno analizzati più avanti. Il terzo motivo è che una matrice in forma di Frobenius costituisce il passaggio alla forma di stato di un'equazione differenziale generica di ordine  $n$ . Se, per esempio, si ha:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = u(t) \quad (4.65)$$

è sufficiente introdurre le seguenti variabili di stato:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= y(t) \\
 x_2(t) &= y^{(1)}(t) \\
 &\dots \\
 x_n(t) &= y^{(n-1)}(t)
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

e, riscrivendo l'equazione differenziale in un sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
 &\dots \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\
 \dot{x}_n(t) &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \dots - a_{n-1}x_n(t) + u(t)
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

La matrice  $A$  associata a questo sistema di equazioni differenziali del primo ordine è proprio una matrice in forma di Frobenius.

È chiaro che per dualità possiamo definire una forma canonica di osservabilità in cui  $A$  e  $C$  sono le trasposte delle matrici  $A$  e  $B$  poste in forma canonica di controllo.

# Capitolo 5

## Realizzazione

### 5.1 Il problema in generale

Finora, è stato visto che la soluzione delle equazioni di un sistema lineare autonomo nel dominio del tempo è pari a:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^{+\infty} e^{A(t-\sigma)}u(\sigma)d\sigma \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

che, applicando la trasformata di Laplace diventano

$$\begin{cases} x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \\ y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}Bu(s) \end{cases}$$

dove si è supposto  $D = 0$ . Inoltre, è noto che ponendo  $x(0) = 0$  e ricavando la funzione di trasferimento

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) = W(s)u(s)$$

non si perdono informazioni sull'evoluzione libera del sistema, perché il denominatore di  $W(s)$  contiene il polinomio caratteristico della matrice  $A$ .

Si vuole ora focalizzare la discussione sulla possibilità di ricavare una rappresentazione di stato a partire da una funzione di trasferimento assegnata. Nel caso più generale, con  $D \neq 0$  e  $m$  e  $p$  diversi da 1, la matrice delle funzioni di trasferimento è pari a:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{N(s)}{d(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = [W_{ij}(s)] = \left[ \frac{n_{ij}(s)}{d(s)} \right] = \\ &= \frac{N_0 + N_1s + N_2s^2 + \dots + N_\nu s^\nu}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_\nu s^\nu} \end{aligned} \quad (5.1)$$

in cui  $N_k$  sono matrici generiche di dimensione  $p \times m$ . Si noti come gli elementi  $W_{ij}(s)$  siano delle funzioni razionali proprie, perché solo in tal modo la matrice di funzioni di trasferimento sarebbe ottenibile dalle quattro matrici  $A, B, C, D$ .

Studiare il problema della realizzazione è utile sia dal punto di vista teorico, per capire il legame tra le matrici  $A, B, C, D$  e  $W(s)$ , sia dal punto di vista pratico, perché permette di implementare fisicamente i controllori progettati utilizzando solo la teoria sulla funzione di trasferimento vista nel corso di Controlli Automatici.

**Esempio**

I controllori PID non sono implementabili seguendo la loro funzione di trasferimento teorica:

$$G(s) = G_D(s) + K_D + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

perché ne risulta una funzione razionale non propria, quindi non descrivibile attraverso quattro matrici  $A, B, C, D$ . L'implementazione fisica avviene allora introducendo uno o due poli di abbattimento nella funzione di trasferimento:

$$\tilde{G}(s) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s(1 + \tau s)^2}$$

in cui i poli artificialmente introdotti si trovano lontano dalla banda di frequenze tipica del sistema da controllare.

Il primo passo da compiere per la soluzione del problema della realizzazione è quello che permette di ricavare la matrice  $D$ . È sufficiente, a questo proposito, scomporre la funzione di trasferimento propria nella somma di una matrice costante e di una funzione di trasferimento strettamente propria:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{N_v s^v + N_{v-1} s^{v-1} + \dots + N_0}{d_0 + d_1 s + \dots + s^v} = \\ &= \frac{N_v(d_0 + d_1 s + \dots + s^v) + (N_{v-1} - N_v d_{v-1})s^{v-1} +}{d_0 + d_1 s + \dots + s^v} \\ &\quad + \frac{(N_{v-2} - N_v d_{v-2})s^{v-2} + \dots + (N_0 - N_v d_0)}{d_0 + d_1 s + \dots + s^v} = \\ &= N_v + \frac{\tilde{N}_{v-1} s^{v-1} + \dots + \tilde{N}_0}{d_0 + d_1 s + \dots + s^v} = D + \tilde{W}(s) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si verifica facilmente che la matrice costante così ricavata è proprio la matrice  $D$  della rappresentazione di stato.

Proseguendo nella soluzione del problema, siamo ora in grado di determinare le matrici  $A, B, C$  a partire dalla funzione di trasferimento strettamente propria:

$$\frac{N_0 + N_1 s + \dots + N_{v-1} s^{v-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + s^v} \quad (5.3)$$

Si verifica infatti facilmente che la soluzione è data dalle seguenti matrici in una forma simile a

quella di Frobenius:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_0 I & -d_1 I & -d_2 I & \dots & -d_{\nu-1} I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ I \end{bmatrix},$$

$$C = [ N_0 \quad N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_{\nu-1} ] \quad (5.4)$$

dove  $I$  è la matrice identica di dimensione  $m \times m$ . Per dimostrare che le matrici effettivamente restituiscono  $W(s)$ , è sufficiente scrivere:

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} B \Rightarrow (sI - A)\phi(s) = B \quad (5.5)$$

da cui si ricava che:

$$\phi(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} I \\ sI \\ s^2 I \\ \dots \\ s^{\nu-1} I \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

e verificare poi l'equazione:

$$W(s) = C\phi(s) \quad (5.7)$$

Si osservi che questa realizzazione ha una matrice  $A$  di dimensioni  $m \times \nu$ , maggiore rispetto al grado  $\nu$  del polinomio caratteristico. Da questo si può presupporre che essa non è una realizzazione minima dal punto di vista dell'ordine di  $A$ .

## 5.2 Realizzazione minima

In generale, la terna di matrici  $(A, B, C)$  si dice **realizzazione minima di  $W(s)$**  se  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , e non esiste una terna  $(A', B', C')$  con  $\dim(A') < \dim(A)$  tale che  $W(s) = C'(sI - A')^{-1}B'$ . In pratica, la ricerca di una realizzazione minima focalizza sul problema di minimizzare l'ordine della matrice  $A$ , dato che non si può prescindere dal numero di colonne di  $B$  (pari ad  $m$ ) e dal numero di righe di  $C$  (pari a  $p$ ). Sussiste allora il seguente:

**Teorema** La realizzazione  $(A, B, C)$  di  $W(s)$  è minima  $\Leftrightarrow (A, B, C)$  è raggiungibile ed osservabile.

**Dimostrazione** L'implicazione  $\Rightarrow$  è già stata discussa, perché se la realizzazione è minima allora non ci sono parti non raggiungibili e non osservabili nel sistema. L'implicazione  $\Leftarrow$ , invece, è un po' difficile da dimostrare e si rimanda a testi specializzati. Il teorema, tuttavia, ci dice qualcosa di più: se la terna  $(A, B, C)$  non è una realizzazione minima, il sottosistema raggiungibile ed osservabile  $(A_2, B_2, C_2)$  dà luogo alla stessa funzione di trasferimento ed è una realizzazione minima.

Si supponga ora di aver ottenuto due realizzazioni minime  $(A_1, B_1, C_1)$  ed  $(A_2, B_2, C_2)$ , evidentemente con le matrici  $A_1, A_2$  dell' stesso ordine. Esiste un legame fra le due realizzazioni, ed è dato dal seguente:

**Teorema**  $(A_1, B_1, C_1)$  e  $(A_2, B_2, C_2)$  sono due realizzazioni minime di  $W(s) \Leftrightarrow \exists T$  invertibile tale che  $T^{-1}A_1T = A_2, T^{-1}B_1 = B_2, C_1T = C_2$ , ossia che le realizzazioni differiscono per una trasformazione di stato.

**Dimostrazione** L'implicazione  $\Leftarrow$  è semplice, perché se  $(A_1, B_1, C_1)$  è una realizzazione minima è sufficiente applicare una trasformazione di stato per ottenere una terna con la stessa funzione di trasferimento e stessa dimensione, che risulta dunque a sua volta una realizzazione minima. L'implicazione  $\Rightarrow$  è invece più difficile da provare e non viene qui discussa.

In definitiva, si può dire che dalla funzione di trasferimento non si riesce a risalire al sottosistema non raggiungibile e non osservabile, perché nelle realizzazioni minime, non univoche, i valori superflui sono sistemati casualmente. Inoltre, da  $W(s)$  è impossibile determinare univocamente una realizzazione minima, che è determinata invece a meno di una trasformazione di stato.

### 5.3 Realizzazione minima per $m = p = 1$

La funzione di trasferimento, nel caso di ingresso ed uscita scalari, è pari a:

$$W(s) = \frac{n_0 + n_1s + \dots + n_{\nu-1}s^{\nu-1}}{d_0 + d_1s + \dots + s^\nu} + D \quad (5.8)$$

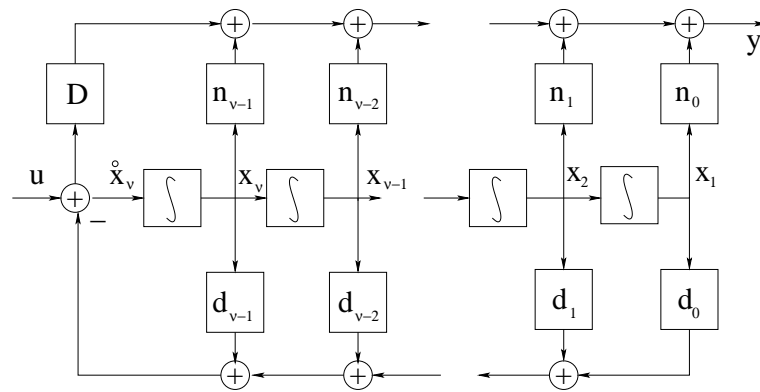
dove  $D$  è nulla se e solo se  $W$  è strettamente propria. Secondo quanto discusso prima, una possibile realizzazione è data dalle matrici, questa volta in forma di Frobenius:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [n_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_{\nu-1}] \quad (5.9)$$

Inoltre, dato che  $m = 1$  si ottiene che questa realizzazione è anche minima se e solo se non ci sono cancellazioni in  $W(s)$ . Questa rappresentazione di stato può essere implementata in digitale od in analogico seguendo lo schema a blocchi presentato in figura (5.1).



Figura 5.1: Schema a blocchi della realizzazione minima con  $m = p = 1$ 

Lo schema è facilmente interpretabile se si considera che, dalle matrici, si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\
 \dot{x}_n &= -\left(\sum_{i=0}^{v-1} d_i x_{i+1}\right) + u \\
 y &= \sum_{j=0}^{v-1} n_j x_{j+1} + Du
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Fisicamente, ogni blocco sopra proposto può ad esempio essere implementato attraverso amplificatori operazionali.

## 5.4 Realizzazione di sistemi a tempo discreto

Il problema della realizzazione di sistemi a tempo discreto è del tutto analogo al problema della realizzazione per sistemi a tempo continuo. Per essi, la funzione di trasferimento è ricavata utilizzando la trasformata Zeta. Ricordiamo che la trasformata Zeta è un operatore che associa ad una successione  $f(k)$  una funzione di variabile complessa  $F(z)$  definito come segue

$$f(k) \xrightarrow{Z} F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \frac{1}{z^k}$$

Tale operatore è lineare e vale la seguente proprietà

$$f(k+1) \xrightarrow{Z} zF(z) - zf(0)$$

Ponendo  $x(0) = 0$ , si ha che a ogni sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

è possibile associare la funzione di trasferimento discreta

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

che ha la stessa forma dei sistemi a tempo continuo. Pertanto il problema della realizzazione si risolve esattamente nello stesso modo indicato nel caso di sistemi a tempo continuo.

## Capitolo 6

# Regolazione di sistemi

### 6.1 Considerazioni generali

Il problema della regolazione consiste, in termini generici, nel portare il sistema in un stato desiderato e qui mantenerlo agendo opportunamente sull'ingresso di controllo  $u$ .

Si parla di **controllo a catena aperta** se al processo viene applicato un ingresso  $u(t)$  predefinito, sintetizzato sulla base di qualche criterio che non prevede la conoscenza di  $x(t)$  o  $y(t)$ . Qualora, invece, l'ingresso al processo sia generato istante per istante da un algoritmo di controllo che tenga conto dell'uscita effettiva del sistema, si parla di **controllo in retroazione**. Lo scopo principale della retroazione è quello di poter modificare la dinamica di un sistema rendendolo stabile o più semplicemente rendendolo più veloce in termini di convergenza. In questa sede si tratterà il caso di retroazione di sistemi lineari. In generale, gli ingressi e le uscite di un processo lineare possono essere divisi secondo lo schema riportato in figura (6.1).



Figura 6.1: Suddivisione di ingressi ed uscite in un sistema

Le componenti del vettore  $d(t)$  rappresentano **ingressi esterni** non modificabili dall'utente. In questa categoria ricadono, per esempio, i disturbi. Il vettore  $u(t)$ , invece, è il vettore degli **ingressi di controllo**, su cui si può effettivamente agire al fine di modificare la dinamica del processo. Le componenti del vettore  $e(t)$  sono dette **uscite di prestazione**, per le quali solitamente si danno delle specifiche, mentre le componenti di  $y(t)$  sono le **uscite di misura**, ossia quelle misurate tramite sensori per generare la legge di controllo. Gli ingressi  $u(t)$  corrispondono dunque all'azione degli attuatori, mentre le uscite  $y(t)$  provengono da sensori applicati al sistema. In generale, il processo retroazionato assume la forma riportata in figura (6.2). Il primo scopo della retroazione, è la **stabilizzazione** del processo qualora il sistema non sia già stabile. Anche nel caso di processi stabili, la retroazione può avere effetti benefici nel "migliorare la dinamica del processo. Nel caso

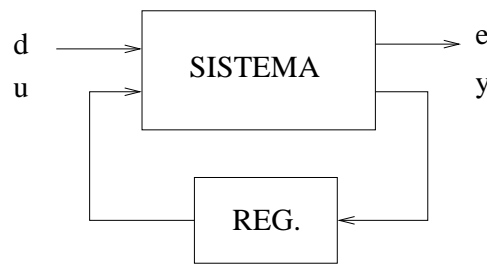


Figura 6.2: Sistema lineare retroazionato

dei sistemi lineari questo essenzialmente si traduce nell'**allocazione degli autovalori** al fine di modificare i modi del sistema stesso, e quindi la sua dinamica. L'allocazione degli autovalori è possibile solamente con controllori in retroazione, perché i controllori a catena aperta non sono in grado di alterare i modi del sistema.

Il processo generico da controllare è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ e(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

dove, per studiare la stabilità, si pone  $d(t) = 0$  e si trascura  $e(t)$ . Anche il controllore può essere a sua volta un sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) \\ u(t) = Hz(t) + Ky(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

Connettendo i due sistemi, trascurando  $e(t)$  e ponendo  $d(t) = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[Hz(t) + Ky(t)] \\ \dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) + BH z(t) \\ \dot{z}(t) = GCx(t) + Fz(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Il sistema complessivo diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BKC & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \omega(t) \\ e(t) &= \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

I modi del sistema retroazionato sono dunque associati agli autovalori che fanno parte dello spettro della nuova matrice  $A$  del processo. Solitamente, la realizzazione del controllore si propone, come primo scopo quello di modificare opportunamente la dinamica del sistema. Il problema basilare è il seguente

**Assegnazione degli autovalori** Fissato un insieme  $\Lambda_{cl}$  di  $\dim(A) + \dim(F)$  autovalori, determinare le matrici incognite  $F, G, H, K$  che danno origine a un controllore che produce un sistema

ad anello chiuso avente  $\Lambda_{cl}$  come insieme degli autovalori.

Un principio fondamentale nell'affrontare il problema dell'allocazione degli autovalori è il seguente: gli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili sono invarianti per retroazione, cioè non possono essere modificati. Di conseguenza, un processo può essere stabilizzato se e solo se le sue parti non raggiungibili e non osservabili sono intrinsecamente stabili.

Per studiare l'allocazione degli autovalori, dunque, poniamo l'ipotesi che il sistema  $\Sigma(A, B, C)$  sia raggiungibile ed osservabile (le sue parti non raggiungibili e/o non osservabili vengono eventualmente eliminate ponendo il sistema nella forma di Kalman). La prima fase nella realizzazione del controllore è lo studio della cosiddetta **retroazione dello stato**; essa prevede che all'ingresso del processo sia riportato lo stato stesso  $x(t)$ , secondo le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = Kx(t) \end{cases} \quad (6.5)$$

Lo schema a blocchi corrispondente è rappresentato in figura (6.3).

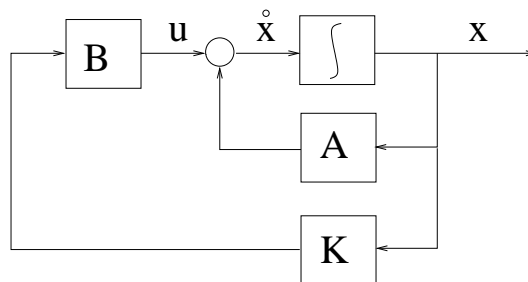


Figura 6.3: Studio della retroazione dello stato

Si noti che l'eventuale realizzazione pratica della retroazione dello stato richiede un sensore per ogni variabile di stato, e ciò può essere sconveniente dal punto di vista economico. Questo porta alla seconda fase del progetto, nota come **stima dello stato**, secondo quanto riportato in figura (6.4). Il blocco stimatore non fa altro che restituire una stima approssimativa dello stato

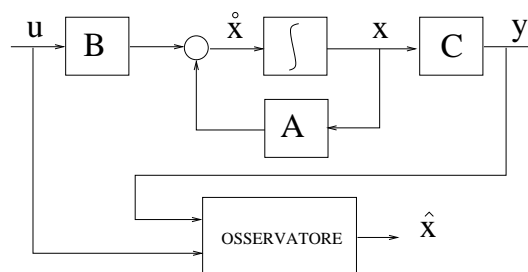


Figura 6.4: Osservatore dello stato

$x(t)$  del processo, e questo valore viene utilizzato successivamente per operare la retroazione. Ciò può risultare conveniente dal punto di vista economico qualora i sensori per la variabili di stato abbiano un prezzo elevato, oppure quando una variabile di stato risulti particolarmente difficile da

misurare. Nelle sezioni successive studieremo separatamente e in dettaglio le due fasi di progetto sopra riportate.

## 6.2 Retroazione dello stato

Il progetto di un controllore in retroazione nasce con la scelta del valore degli autovalori del sistema ad anello chiuso, e prosegue con lo studio della retroazione dello stato. Formalmente, possiamo dire che dato l'insieme  $\Lambda_c = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$  (il pedice C sta per compensatore) con il vincolo del coniugio (cioè per ogni autovalore complesso è presente anche il suo coniugato, e questo per poter trattare problemi reali), si cerca la matrice  $K$  tale che il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = Kx(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (6.6)$$

abbia insieme degli autovalori  $\sigma(A+BK) = \Lambda_c$ . La matrice  $K$  è di dimensioni  $m \times n$ , per cui ci sono  $m \cdot n$  parametri liberi da assegnare per poter risolvere il problema. Questo è un caso più generale di quello già noto del luogo delle radici, in cui la posizione degli autovalori si modificava attraverso l'applicazione di un unico guadagno complessivo. Con quel tipo di soluzione del problema, gli autovalori erano comunque vincolati a rimanere sui punti di un luogo geometrico ben definito, diversamente da questo nuovo caso. Si può ora formulare il seguente:

**Teorema** Il problema ha soluzione con  $\Lambda_c$  arbitrariamente fissato  $\Leftrightarrow$  il sistema  $\Sigma(A, B)$  è raggiungibile. Invece, se il sistema non è raggiungibile, il problema ha soluzione  $\Leftrightarrow \Lambda_c$  contiene tutti gli autovalori non raggiungibili del sistema.

**Dimostrazione** Se il sistema non è raggiungibile, è possibile utilizzare una trasformazione tale da renderlo in forma di Kalman. L'equazione  $u(t) = Kx(t)$  si trasforma in  $\hat{u}(t) = KT\hat{x}(t) = \hat{K}\hat{x}(t)$  (si noti che  $\hat{K}$  ha la stessa trasformazione della matrice  $C$ ), e si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B}\hat{K} &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_r & \hat{A}_{r,nr} \\ \hline 0 & \hat{A}_{nr} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \hat{B}_r \\ \hline 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_r + \hat{B}_r\hat{K}_1 & \hat{A}_{r,nr} + \hat{B}_r\hat{K}_2 \\ \hline 0 & \hat{A}_{nr} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

Si tratta allora di una matrice triangolare a blocchi, il cui spettro è dato da  $\sigma(\hat{A}_r + \hat{B}_r\hat{K}_1) \cup \sigma(\hat{A}_{nr})$ . La parte dello spettro derivante dalla matrice del sottosistema non raggiungibile è pertanto invariante, e non può essere modificata con la retroazione.

Supponendo ora che il sistema sia raggiungibile, consideriamo il caso  $m = 1$  e discutiamo su come si possano assegnare arbitrariamente gli autovalori al sistema retroazionato. Se il sistema è raggiungibile, è sempre possibile trovare una matrice  $T$  tale che la trasformazione di stato  $A_F = T^{-1}AT$  e  $B_F = T^{-1}B$  restituisca la forma di Frobenius. Dato che  $\hat{K} = KT$ , si ottiene che la matrice

del sistema retroazionato in forma di Frobenius è pari a:

$$A_F + B_F \hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 + \hat{k}_1 & -a_1 + \hat{k}_2 & -a_2 + \hat{k}_3 & \dots & -a_{n-1} + \hat{k}_n \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

e risulta quindi ancora una matrice in forma di Frobenius. Ciò significa che il polinomio caratteristico del sistema retroazionato, che come già detto in precedenza dipende dai coefficienti dell'ultima riga della matrice, può essere modificato attraverso i singoli elementi  $\hat{k}_i$ . Il problema dell'arbitraria assegnazione degli autovalori può essere ricondotto all'*assegnazione del polinomio caratteristico* le cui radici sono gli autovalori desiderati, seguendo i seguenti passi:

1. scelta di  $\Lambda_c = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$  e calcolo del polinomio caratteristico che si desidera in retroazione:

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - \bar{\lambda}_i) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \dots + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

2. calcolo dei vecchi coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , facenti parte del polinomio caratteristico della matrice  $A$  non retroazionata;
3. calcolo degli elementi  $\hat{k}_i$  utilizzando le espressioni:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= a_0 - \hat{k}_1 \Rightarrow \hat{k}_1 = a_0 - \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 &= a_1 - \hat{k}_2 \Rightarrow \hat{k}_2 = a_1 - \bar{a}_1 \\ &\dots \\ \bar{a}_{n-1} &= a_{n-1} - \hat{k}_n \Rightarrow \hat{k}_n = a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{aligned} \quad (6.9)$$

4. ritorno dalla forma di Frobenius alla forma generale, applicando la trasformazione inversa:  $K = \hat{K}T^{-1}$ . Questo passaggio è necessario perché la forma di Frobenius è solo uno strumento per agevolare la soluzione del problema.

Nel caso in cui il sistema presenti  $m > 1$ , le cose si complicano notevolmente ma il teorema può essere comunque dimostrato in diversi modi. Innanzitutto, possiamo dire che se il sistema risulta completamente raggiungibile da un singolo ingresso fra tutti quelli presenti, ci si può ricondurre alla dimostrazione precedente. Se invece la raggiungibilità completa si ottiene solamente considerando la totalità degli ingressi, le strade sono due:

- si può dimostrare che esiste una pre-azione in grado di rendere il sistema completamente raggiungibile da un solo ingresso, riconducendosi poi alla dimostrazione precedente;
- in alternativa, per ogni ingresso preso singolarmente si trova la parte del sistema non raggiungibile dall'ingresso precedentemente considerato (cioè per il secondo ingresso si trova

la parte non raggiungibile dal primo, e così via). Una volta trovato tale sottosistema, per esso (e soltanto per esso) si fissano gli autovalori desiderati.

Si è visto come l'assegnazione degli autovalori possa essere arbitraria se il sistema è completamente raggiungibile. Questo è sempre vero da un punto di vista matematico. Nella pratica bisogna scegliere gli autovalori compatibilmente con le limitazioni fisiche degli attuatori applicati al processo.

### 6.2.1 Un semplice algoritmo per l'assegnazione

Consideriamo ora un caso molto comune nella pratica che permette di risolvere il problema della reazione dello stato senza passare per la forma di Frobenius. Assumiamo  $m = 1$  ed un sistema  $\Sigma(A, B)$  raggiungibile, con matrice  $B$  nella seguente forma:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Se la matrice  $B$  non è nella forma suddetta, è sempre possibile trovare una matrice  $T$  tale che, applicando una trasformazione,  $\hat{B} = T^{-1}B$  sia nella forma voluta. Tale matrice può essere presa come

$$T = [B \tilde{B}]$$

dove  $\tilde{B}$  è una matrice arbitraria che complementa  $B$  ovvero rende  $T$  invertibile.

Assunta  $B$  nella forma indicata, calcolando il polinomio caratteristico del sistema retroazionato, si ottiene:

$$\begin{aligned} \det(sI - (A + BK)) &= \\ &= \det \begin{bmatrix} s - a_{11} - b_1 k_1 & -a_{12} - b_1 k_2 & \dots & -a_{1n} - b_1 k_n \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{bmatrix} = \\ &= a_0(k_1, k_2, \dots, k_n) + a_1(k_1, k_2, \dots, k_n)s + \dots + \\ &+ a_{n-1}(k_1, k_2, \dots, k_n)s^{n-1} + s^n \end{aligned} \quad (6.11)$$

Il polinomio caratteristico è allora dipendente dagli elementi incogniti  $k_i$  **in maniera lineare**. E' ora sufficiente uguagliare i coefficienti  $a_i$  con quelli desiderati dopo la retroazione:

$$\begin{cases} a_0(k_1, k_2, \dots, k_n) = \bar{a}_0 \\ a_1(k_1, k_2, \dots, k_n) = \bar{a}_1 \\ \dots \\ a_{n-1}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \bar{a}_{n-1} \end{cases} \quad (6.12)$$



Risolvendo questo sistema lineare, si ricavano gli elementi  $k_i$  necessari per la retroazione dello stato.

### Esempio

Si consideri il sistema instabile descritto dalle equazioni:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Applicando un controllo in retroazione, si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$\det(sI - (A + BK)) = \det \begin{bmatrix} s - 2 - k_1 & -1 - k_2 \\ -1 & s - 2 \end{bmatrix} = s^2 - (4 + k_1)s + 3 + 2k_1 - k_2$$

Supponendo di voler stabilizzare il sistema con autovalori  $\bar{\lambda}_1 = -1$  e  $\bar{\lambda}_2 = -2$ , il polinomio caratteristico del sistema retroazionato deve essere

$$p(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

da cui si ricava il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -4 - k_1 = 3 \\ 3 + 2k_1 - k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -7 \\ k_2 = -13 \end{cases}$$

## 6.3 Osservatore dello stato

L'osservatore dello stato è di fondamentale importanza quando le variabili di stato non sono tutte accessibili, o non si vogliono misurare per ragioni economiche. Si consideri allora lo schema presentato in figura (6.5).

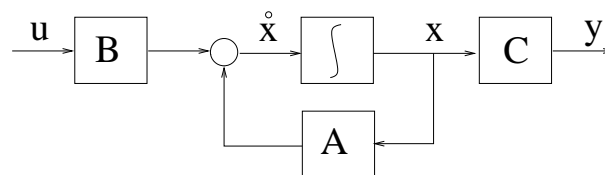


Figura 6.5: Schema generale di un sistema

Il caso più favorevole che si può presentare è quando  $C$  è la matrice identica: questo significa che le uscite sono proprio le variabili di stato, e quindi si può procedere con la retroazione dello stato come visto in precedenza. Quando però la matrice  $C$  è generica, bisogna agire in modo diverso. Una prima idea potrebbe essere quella di replicare un sistema con le stesse matrici del processo da controllare, secondo le equazioni:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (6.13)$$

In questo caso si parla di **osservatore banale (a catena aperta)**, in cui  $\hat{x}(t)$  costituisce una stima delle variabili di stato del sistema da controllare. Per giudicare l'efficacia di questa soluzione introduciamo l'errore di stima

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

Dato che il sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

è possibile operare una sottrazione tra lo stato e la stima dello stato. Si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\hat{x}(t) - x(t)) = A(\hat{x}(t) - x(t)) + Bu(t) - Bu(t) = A(\hat{x}(t) - x(t)) \quad (6.14)$$

ovvero che l'errore di stima è descritto dall'equazione:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) \quad (6.15)$$

ossia evolve in risposta libera. Si osserva subito il problema fondamentale di questo tipo di osservatore: esso non è valido per sistemi instabili, perché l'errore diverge.

In realtà, si può vedere che anche per sistemi stabili questo osservatore banale non fornisce buoni risultati. Lo stato  $\hat{x}(0)$  deve essere infatti inizializzato a  $x(0)$ , di cui non sappiamo nulla. La scelta più ovvia dal punto di vista della simmetria del problema è porre  $\hat{x}(0) = 0$ ; ma questo significa che  $e(0) = \hat{x}(0) - x(0) = -x(0)$ . Supponendo, per esempio,  $u(t) = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) \\ \dot{e}(t) &= Ae(t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

in cui l'errore ha le condizioni iniziali opposte dello stato. L'evoluzione dell'errore e dello stato è riportata in figura (6.6).

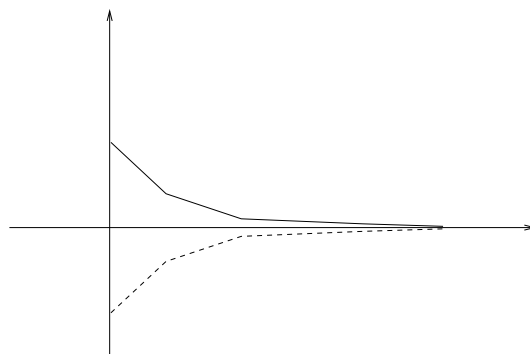


Figura 6.6: Evoluzione dello stato (linea continua) e dell'errore (linea tratteggiata) con l'osservatore banale

Si osserva che l'errore è ha la stessa ampiezza dello stato:  $\|x(t)\| = \|e(t)\|$ , ovvero l'errore è pari al 100 %.

Ciò che in realtà si vorrebbe realizzare è un osservatore in grado di generare una stima dello stato che converga ad  $x(t)$ , anche nel caso di sistemi instabili e, in caso di stabilità converga “più velocemente del sistema, come qualitativamente riportato in figura (6.7).

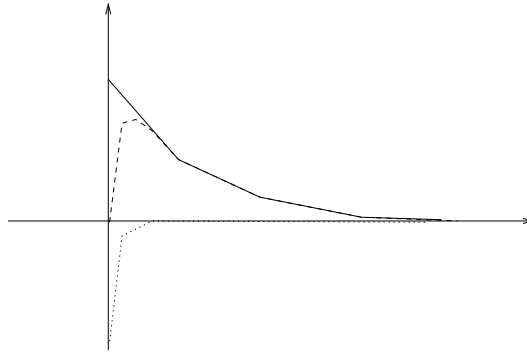


Figura 6.7: Evoluzione qualitativa dell'errore nel caso di buon osservatore: evoluzione dello stato (linea continua), della stima (linea tratteggiata) e dell'errore (linea puntata)

La soluzione consiste nell'uso dell'**osservatore di Luemberger**. Esso, al contrario dell'osservatore banale che tratta solo le informazioni fornite da  $u(t)$ , considera le informazioni del sistema provenienti sia dall'ingresso che dall'uscita del processo. L'equazione differenziale che governa la stima dello stato è la seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - LC(\hat{x}(t) - x(t)) = \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + LCx(t) = \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)\end{aligned}\quad (6.17)$$

dove la matrice  $L$  di dimensioni  $n \times p$  è costituita da parametri liberi a scelta del progettista. E' interessante osservare che il termine  $\hat{x}(t) - x(t)$  è ancora incognito, ma non lo è il termine  $C(\hat{x}(t) - x(t))$  perché  $\hat{x}(t)$  è noto dall'osservatore e  $Cx(t) = y(t)$  è noto dall'uscita del sistema. Lo schema generale dell'osservatore di Luemberger è rappresentato in figura (6.8).

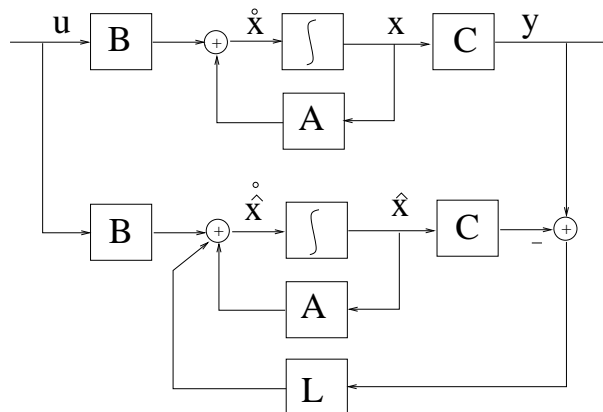


Figura 6.8: Schema generale dell'osservatore di Luemberger

Si noti che per  $L = 0$  si ottiene nuovamente l'osservatore banale. Possiamo ricavare nuovamente l'espressione dell'errore, sottraendo lo stato dalla stima dello stato:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{x}(t) - x(t)) &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) - Ax(t) - Bu(t) = \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) - Ax(t) + LCx(t) = \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) - (A - LC)x(t) \\ &= (A - LC)(\hat{x}(t) - x(t)) \end{aligned}$$

otteniamo così

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

Si osserva dunque che l'errore non dipende da  $u(t)$  ed evolve in risposta libera secondo i modi della matrice  $(A - LC)$ . La matrice  $L$ , dunque, ha un ruolo simile alla matrice  $K$  nella retroazione dello stato. In analogia a quel tipo di problema, allora, sarebbe interessante imporre un insieme di autovalori  $\Lambda_o$  (la  $O$  sta per osservatore) per la matrice  $(A - LC)$  in modo che l'errore possa convergere a zero più o meno velocemente, a seconda delle scelte progettuali. Più formalmente, il problema è il seguente.

**Assegnazione degli autovalori dell'osservatore** Dato

$$\Lambda_o = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$$

con il vincolo del coniugio, si determini la matrice  $L$  in modo tale che l'insieme degli autovalori di  $A - LC$  risulti  $\sigma(A - LC) = \Lambda_o$ .

Vale il seguente risultato.

**Teorema**  $\Lambda_o$  è arbitrariamente assegnabile con il vincolo del coniugio  $\Leftrightarrow (A, C)$  è completamente osservabile. Se manca l'osservabilità del sistema, il problema è comunque risolubile purché  $\Lambda_o$  contenga tutti gli autovalori del sottosistema non osservabile.

**Dimostrazione** La dimostrazione del teorema si esegue sfruttando le proprietà di dualità. Consideriamo allora il duale del sistema che dà luogo alla matrice  $(A - LC)$ :

$$\begin{aligned} A^* &= A^T \\ B^* &= C^T \\ K^* &= -L^T \end{aligned} \tag{6.18}$$

Si ottiene che il duale della matrice  $(A - LC)$  è pari a:

$$(A - LC)^T = (A^T - C^T L^T) = (A^* + B^* K^*) \tag{6.19}$$

e si ricorda che lo spettro delle due matrici rimane il medesimo. Pertanto, l'assegnazione degli autovalori  $\Lambda_o$  nel sistema primario è stata ricondotta allo studio della retroazione dello stato duale; ma in questo caso noi sappiamo che il problema è risolubile se il sistema duale è completamente

raggiungibile. Per dualità, possiamo allora dire che il sistema primario deve essere osservabile, ed il teorema è dimostrato.

Le strette relazioni che esistono tra il problema della retroazione dello stato e dell'osservatore di Luemberger, dovute alle proprietà di dualità, permettono di sfruttare gli stessi algoritmi per ricavare le matrici  $K$  ed  $L$ . Supponendo, infatti, di avere una procedura che, dati in ingresso  $A$ ,  $B$ ,  $\Lambda_c$  restituisca la matrice  $K$  per la retroazione dello stato, è possibile anche dare in ingresso  $A^T$ ,  $C^T$ ,  $\Lambda_o$  ed ottenere in uscita la matrice  $K^*$  per la retroazione dello stato del sistema duale. Dalle relazioni sopra riportate, allora, si ottiene che  $L = (-K^*)^T$ .

### Esempio

Si consideri un servocomando come in figura (6.9), in cui è riportato lo schema di un semplice posizionatore. Assumendo  $\theta = 0$  l'angolo di riferimento, poniamoci il problema di portare il sistema allo stato nullo  $\theta = \dot{\theta} = 0$ .

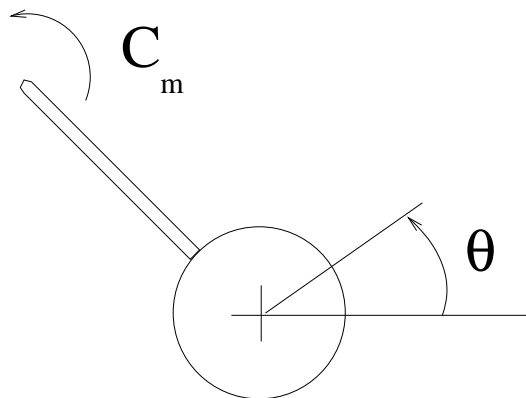


Figura 6.9: Sistema di posizionamento

L'equazione che descrive questo sistema è la seguente:

$$J\ddot{\theta}(t) = C_m(t) \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = \frac{C_m(t)}{J} = u(t)$$

Ponendo  $x_1(t) = \theta(t)$  e  $x_2 = \dot{\theta}(t)$ , si ottiene una rappresentazione di stato con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo di avere un sensore sia per la posizione che per la velocità. Operando una retroazione dello stato del tipo:

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

si ottiene la seguente matrice:

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Essendo già nella forma di Frobenius, tutto ciò che bisogna fare è imporre che  $k_1$  e  $k_2$  siano uguali ai coefficienti del polinomio caratteristico voluto, con il segno cambiato. Supponendo di scegliere  $p(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$ , si ottiene immediatamente che deve essere  $k_1 = -2$  e  $k_2 = -3$ .

Impiegare sia sensori di velocità che di posizione non è però sempre conveniente dal punto di vista economico. Si può allora pensare di avere un sensore per una variabile di stato, ed un osservatore per calcolare la stima dell'altra variabile di stato non misurata.

Se si possiede solo un sensore di velocità, la matrice  $C$  risulta pari a:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, con un brevissimo calcolo, si può notare che il sistema non è osservabile (com'è noto, dalla velocità non si riesce a risalire alla posizione). Inoltre, l'autovalore della parte non raggiungibile è pari a zero, e quindi non è asintoticamente stabile: dunque lo spettro di  $(A - LC)$  deve per forza contenere l'autovalore nullo, e questo non è un bene perché l'errore risulta stabile non asintoticamente.

Se, invece, si considera solo il sensore di posizione, la matrice  $C$  assume la forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed in questo caso la matrice di osservabilità ha rango pieno. Possiamo allora calcolare  $(A - LC)$ :

$$(A - LC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è pari a:

$$\det(sI - A + LC) = \det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + l_1 s + l_2$$

Supponendo di voler imporre  $\bar{\lambda}_3 = -3$  e  $\bar{\lambda}_4 = -4$ , si ha  $p(s) = s^2 + 7s + 12$  da cui risulta immediatamente che  $l_1 = 7$  e  $l_2 = 12$ .

Si noti che l'osservatore genera una stima del vettore  $\hat{x}(t)$  composto dalla posizione, che in realtà abbiamo già in uscita grazie al sensore, e dalla velocità. Questa considerazione può portare al così detto *osservatore di ordine ridotto* che non viene trattato nel corso.

## 6.4 Sintesi del regolatore

Dopo aver operato la retroazione dello stato e la stima dello stato (necessaria solo se qualche variabile di stato non è misurata e se  $C$  è diversa dalla matrice identica), il passo successivo è sintetizzare il controllore. Verificheremo che esso è semplicemente costituito dalla retroazione della stima dello stato, così come riportato in figura (6.10).

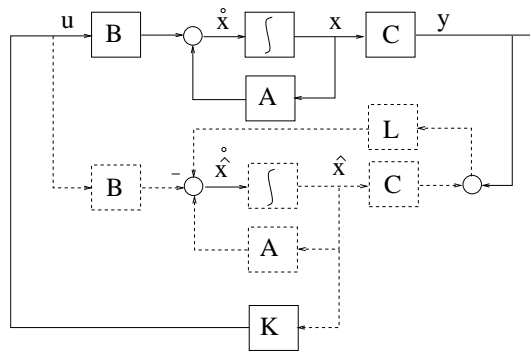


Figura 6.10: Schema a blocchi del controllore basato sull'osservatore

E' abbastanza intuitivo che le cose funzionino correttamente. Tuttavia, analizziamo il sistema complessivo ottenuto, per verificare la strategia. Le equazioni del processo da controllare sono:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

mentre quelle del blocco costituito dall'osservatore più il regolatore sono:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \end{cases}$$

Il sistema complessivo che si viene a formare consta dunque di  $n + n = N$  variabili di stato, introdotte dal processo e dal controllore. Per svolgere i calcoli successivi, tuttavia, è più conveniente operare una trasformazione di stato, in modo da ottenere un vettore composto dalle variabili di stato del processo e dall'errore del controllore. Matematicamente, si ha:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

La matrice di trasformazione dalla nuova alla vecchia base è allora:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

cioè l'inverso di quella sopra utilizzata. Dato che il sistema complessivo risulta governato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \end{cases} \quad (6.22)$$

applicando la trasformazione di stato (ossia manipolando opportunamente le equazioni, ricordando

che  $\hat{x}(t) = x(t) + e(t)$  si perviene facilmente alle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BKe(t) \\ \dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \end{cases} \quad (6.23)$$

In forma matriciale abbiamo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{=A_{cl}} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Si osserva che la matrice  $A_{CL}$  (CL sta per **closed loop**) è triangolare a blocchi di dimensione  $2n \times 2n$ , pertanto il suo spettro di autovalori è pari all'unione degli spettri dei blocchi sulla diagonale principale:

$$\sigma(A_{CL}) = \sigma(A + BK) \cup \sigma(A - LC) \quad (6.25)$$

Sotto ipotesi di raggiungibilità ed osservabilità del sistema da controllare, dunque, è possibile assegnare ad arbitrio gli autovalori di  $A_{CL}$ , attraverso le tre fasi seguenti:

1. progetto del regolatore per la retroazione dello stato ed assegnazione di  $\sigma(A + BK)$ ;
2. progetto dell'osservatore per la stima dello stato ed assegnazione di  $\sigma(A - LC)$ ;
3. realizzazione del controllore come retroazione dello stato stimato, ossia

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ u(t) &= K\hat{x}(t) \end{aligned}$$

Dato che le assegnazioni degli autovalori nelle prime due fasi sono indipendenti fra loro, questo modus operandi è anche ricordato con il nome di **principio di separazione**. Nella realtà spesso si richiede che le prestazioni dell'osservatore siano superiori a quelle del sistema retroazionato; pertanto, è usuale imporre agli autovalori di  $(A - LC)$  una parte reale negativa più grande in valore assoluto (anche di 3 o 4 volte) rispetto a quella degli autovalori di  $(A + BK)$ .

Il controllore, costituito dall'osservatore più il regolatore, è dunque governato dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \end{cases}$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima si giunge ad una semplice semplificazione matematica, ma molto importante dal punto di vista fisico:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC + BK)\hat{x}(t) + Ly(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \end{cases} \quad (6.26)$$

Osservando gli schemi precedenti, infatti, ci si accorge che il sistema retroazionato non deve più possedere sensori in grado di misurare l'ingresso  $u(t)$  per poi spedirlo all'osservatore, perché l'ingresso stesso è generato all'uscita del regolatore. Il controllore così ottenuto può essere realizzato in pratica con un circuito analogico, oppure implementando al calcolatore il sistema discreto



equivalente, con matrici:

$$\begin{aligned} F_D &= e^{FT} = e^{(A-LC+BK)T} \\ G_D &= \int_0^T e^{F\sigma} d\sigma L = \int_0^T e^{(A-LC+BK)\sigma} d\sigma L \\ H_D &= K \end{aligned}$$

Nel caso di implementazione al calcolatore, l'algoritmo di massima per il controllore può essere di questo tipo:

1. calcolare  $F_D$ ,  $G_D$ ,  $H_D$  con passo  $T$  fissato;
2. inizializzare  $\hat{x}(0)$ ;
3. calcolare  $u(T) = H_D \hat{x}(T)$ ;
4. porre il valore di  $u(T)$  nella locazione di memoria in cui sarà prelevato dal convertitore D/A;
5. leggere il valore di  $y(T)$  dalla locazione di memoria in cui è posto dal convertitore A/D;
6. calcolare la stima al passo successivo  $\hat{x}(T+1) = F_D \hat{x}(T) + G_D y(T)$ ;
7. tornare al punto 3 se si vuole continuare il controllo del sistema, altrimenti uscire.

Un'ultima considerazione riguarda la funzione di trasferimento del sistema retroazionato. Si può dimostrare facilmente che, se l'ingresso del sistema è pari a:

$$u(t) = K\hat{x}(t) + v(t) \quad (6.27)$$

dove  $v(t)$  è un segnale di riferimento (spesso costante), la funzione di trasferimento tra  $v(t)$  ed  $y(t)$  quando si ha sia l'osservatore che la retroazione della stima dello stato è la medesima di quella tra  $v(t)$  ed  $y(t)$  quando è solamente presente la retroazione dello stato, ossia  $u(t) = Kx(t) + v(t)$ .

### Esempio

Si riconsideri l'esempio precedente, in cui si sono ricavati i parametri delle matrici  $K$  ed  $L$  per il posizionario. Per quanto ora esposto, l'implementazione del controllore è immediata:

$$\begin{aligned} F &= A - LC + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -14 & -3 \end{bmatrix} \\ G &= L = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} \\ H &= K = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema retroazionato complessivo ha dunque modi derivanti dagli autovalori  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$  (detti **modi del regolatore**) e modi derivanti dagli autovalori  $\lambda_3 = -3$ ,  $\lambda_4 = -4$  (detti **modi dell'osservatore**). Si può facilmente verificare che si ottiene lo stesso spettro di autovalori se, al posto di  $u(t) = K\hat{x}(t)$ , si implementa, in questo semplice esempio, un ingresso pari a  $u(t) = k_1 x_1 + k_2 \hat{x}_2$ , in cui la prima variabile di stato non è stimata ma proviene direttamente dall'uscita del sistema (si ricordi infatti la forma della matrice  $C$ ).

## 6.5 Disturbi esterni

I sistemi da controllare sono spesso affetti da disturbi dovuti ad agenti esterni o ad errori di misurazione. In questo caso, il sistema è descritto da un'equazione del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \quad (6.28)$$

e la situazione è diversa a seconda che  $d(t)$  sia misurabile o meno. Nel primo caso, più semplice, basta implementare un osservatore con l'equazione:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) + Ed(t) \quad (6.29)$$

ed in questo modo, sottraendo le due espressioni, si ottiene il medesimo andamento dell'errore vista in precedenza. Nel caso, invece, in cui il disturbo non sia misurabile, non è possibile aggiungere alcun termine all'osservatore, e di conseguenza l'errore ha un'espressione del tipo:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - Ed(t) \quad (6.30)$$

Molto spesso è possibile fornire una stima per l'ampiezza di  $d$

$$\|d(t)\| < \alpha$$

Essendo il sistema osservatore asintoticamente stabile a regime potremo garantire una limitazione del tipo  $\|e(t)\| < \beta$ , ma non la convergenza a zero. Questa situazione, è accettabile se ci si assicura che l'errore assuma valori ragionevolmente piccoli. Un esempio reale di disturbo non misurabile che affligge l'uscita di un sistema,  $y(t) = Cx(t) + Nw(t)$ , può essere l'errore di quantizzazione di un encoder che legge la posizione angolare. In questo caso l'equazione dell'errore diventa

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - Ed(t) + LNw \quad (6.31)$$

Assunto  $\|w(t)\| < \gamma$  si può sempre pervenire ad una stima del tipo  $\|e(t)\| < \beta$ , sotto ipotesi di asintotica stabilità di  $A - LC$ .

Un ultimo accenno riguarda i sistemi a tempo discreto. Per essi, è possibile considerare uno stimatore dello stato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} u(k) &= Kx(k) \\ \hat{x}(k+1) &= (A - LC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k) \end{aligned} \quad (6.32)$$

e si può dimostrare, come per i sistemi a tempo continuo, che l'errore è governato dall'equazione:

$$e(k + 1) = (A - LC)e(k) \quad (6.33)$$

La teoria della retroazione di un sistema a tempo discreto procede allora di pari passo a quella dei sistemi a tempo continuo. L'unica accortezza è che l'assegnazione degli autovalori deve tenere presente che un modo è stabile se  $|\bar{\lambda}_k| < 1$ .



## Capitolo 7

# Sistemi non lineari

### 7.1 Considerazioni generali

La maggior parte dei sistemi che costituiscono la realtà è non lineare, e questo ha limitato la portata della teoria dei sistemi perché i casi risolvibili in modo analitico sono molto pochi, e spesso sono anche molto particolari. I sistemi per i quali non è possibile uno studio analitico possono, tuttavia, essere trattati in modo numerico ottenendo una soluzione approssimata delle equazioni differenziali.

Dal punto di vista concettuale, una differenza sostanziale tra i sistemi lineari e quelli non lineari è l'omogeneità del comportamento. Per i primi, infatti, è possibile parlare di funzioni modali, analisi in frequenza, stabilità ... Per i sistemi non lineari ciascuna proprietà è di fatto solo attribuibile a determinati punti di equilibrio. Ovvero un sistema non lineare può essere stabile o meno, sensibile al rumore o meno, oscillante o meno ecc. a seconda del punto di equilibrio nel quale è analizzato. La teoria globale dei sistemi lineari non è in generale estendibile e bisogna considerare teorie locali.

#### **Esempio: andamento di una popolazione**

L'andamento di una popolazione, che può essere una colonia di batteri od una specie animale, può essere modellata da equazioni più o meno sofisticate. Una di queste, molto semplice e di tipo lineare, prevede che la popolazione  $x(t)$  evolva secondo l'equazione:

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

dove  $a > 0$  è un coefficiente scalare. La soluzione è dunque il classico esponenziale  $x(t) = e^{at}x(0)$ ; tuttavia questo modello non tiene conto delle limitazioni sulle risorse dell'ambiente circostante.

Nel caso in cui si voglia modellare anche la dipendenza dalle risorse disponibili, un modello ampiamente accettato è il seguente:

$$\dot{x}(t) = a \left[ 1 - \frac{x(t)}{C} \right] x(t)$$

Si nota infatti che per  $x(t) \ll C$  il termine  $\frac{x(t)}{C}$  è trascurabile ed il modello è quasi lineare; quando, invece,  $x(t)$  cresce, lo stesso termine rappresenta una limitazione al tasso di natalità, dovuto alla scarsità delle risorse. Addirittura, se  $x(t) > C$  si verifica un'inversione di tendenza, con numero di nascite inferiore al numero di morti.

Il sistema, in questo modo, è diventato non lineare; tuttavia esso rappresenta un caso in cui è possibile dare la soluzione analitica, che risulta:

$$x(t) = \frac{e^{at} x(0)}{\left(1 - \frac{x(0)}{C}\right) + \frac{x(0)}{C} e^{at}}$$

Si ribadisce, tuttavia, che in generale c'è poca speranza di trovare soluzioni esprimibili come questa. Dall'equazione del sistema, comunque, è possibile trarre delle informazioni qualitative:

- per  $x(t) > C$ ,  $\dot{x}(t) < 0$ ;
- per  $x(t) < C$ ,  $\dot{x}(t) > 0$ ;
- ci sono due punti che annullano la derivata, pari a  $x(t) = C$  e  $x(t) = 0$ .

Studiando l'andamento della soluzione con i metodi appresi nei corsi di Analisi Matematica, è possibile disegnare l'evoluzione della popolazione con diverse condizioni iniziali, come riportato in figura (7.1).

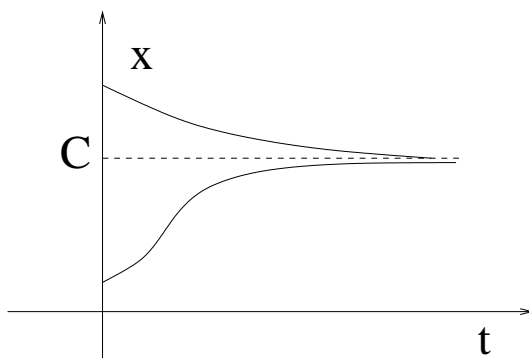


Figura 7.1: Evoluzione di una popolazione per diverse condizioni iniziali

Si osserva in particolare che la soluzione  $x(t) = C$  è un punto di equilibrio stabile, perché ivi convergono tutte le soluzioni con condizioni iniziali maggiori di zero. Viceversa,  $x(t) = 0$  è un punto di equilibrio instabile, perché ogni piccola variazione delle condizioni iniziali da zero porta all'allontanamento dalla retta  $y = 0$ . In realtà, quello che si può vedere, è che tutte le considerazioni che abbiamo ricavato dalla soluzione analitica sono deducibili dall'analisi qualitativa che verrà trattata in seguito.

Lo studio dei sistemi non lineari viene affrontata considerando i sistemi continui autonomi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (7.1)$$

ed i sistemi a tempo discreto autonomi:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k+1) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \quad (7.2)$$

Si evita il caso in cui ci sia una diretta dipendenza dal tempo di  $\dot{x}(t)$  o  $x(k+1)$ , perché esso rappresenta un caso complicato e relativamente poco importante nella realtà.

## 7.2 Punti di equilibrio

Vale la seguente definizione.

**Definizione** Dato un vettore  $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ , esso è un **punto di equilibrio** se  $\exists \bar{u}$  detto **ingresso di equilibrio** tale che, posto  $x(0) = \bar{x}$  e  $u(t) = \bar{u}$ , si ha  $x(t) \equiv \bar{x}$ . In tal caso, la coppia  $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  è detta **coppia di equilibrio**.

Le condizioni di equilibrio di un sistema non lineare si ricavano facilmente, perché se deve accadere che  $x(t) = \bar{x}$  e  $u(t) = \bar{u}$  è anche vero che si ha  $\dot{x} = 0$  nel caso di sistemi continui, e  $x(k+1) = x(k)$  nel caso di sistemi discreti. Pertanto, le coppie di equilibrio dei sistemi a tempo continuo si trovano ponendo:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \quad (7.3)$$

e per i sistemi a tempo discreto ponendo:

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (7.4)$$

### Esempio

Riconsiderando l'equazione per l'evoluzione della popolazione tratta dal precedente esempio, possiamo facilmente trovarne i punti di equilibrio:

$$\left[1 - \frac{\bar{x}}{C}\right] \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0, \bar{x} = C$$

E' interessante osservare cosa succede se all'equazione si aggiunge un termine che tiene conto di un ingresso esterno (può essere la caccia di una popolazione di animali, o la predazione):

$$\left[1 - \frac{\bar{x}}{C}\right] \bar{x} + \bar{u} = 0$$

dove  $\bar{u} < 0$ . In tal caso, i punti di equilibrio sono soluzioni dell'equazione di secondo grado sopra riportata, e risultano pari a:

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{C}{a} \left[ \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a}{C} \bar{u}} \right]$$

L'andamento della soluzione per questa nuova situazione è riportata in figura (7.2).

Si osserva che, per condizioni iniziali superiori a  $\bar{x}_2$ , si ha una mortalità superiore alla natalità dovuta alla carenza di risorse. Nella fascia compresa tra  $\bar{x}_1$  ed  $\bar{x}_2$ , invece, si ha una ripopolazione; mentre per condizioni iniziali al di sotto di  $\bar{x}_1$  si ha l'estinzione della specie. La soglia di estinzione

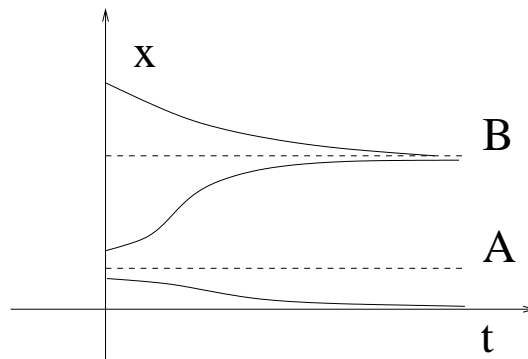


Figura 7.2: Evoluzione di una popolazione con ingresso esterno; linea A: soglia estinzione; linea B: soglia sovrappopolamento

$\bar{x}_1$  è stata introdotta a seguito dell'ingresso esterno minore di zero. Si noti inoltre che  $u(t)$  può avere natura diversa: se esso è riferito alla predazione, è certamente influenzato da  $x(t)$  (cosa che va a complicare ulteriormente il modello), mentre se si riferisce alla caccia esso ne è sostanzialmente indipendente.

**Esempio** Si vuole ora fare una considerazione sull'approssimante discreto di Eulero di un sistema continuo. Il sistema di Eulero si ottiene approssimando la derivata  $\dot{x}(t)$  con il rapporto incrementale:

$$\dot{x}(t) \simeq \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} \quad (7.5)$$

e quindi, sostituendo tale espressione nella formula generale di un sistema a tempo continuo e valutandola solamente per  $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$  si avrebbe il sistema discreto:

$$x(t + \tau) = x(t) + \tau f(x(t), u(t)) \quad (7.6)$$

Questo metodo, noto come **metodo di Eulero esplicito**, costituisce una buona approssimazione se il passo  $\tau$  è sufficientemente piccolo, mentre per scelte del passo troppo elevate può non convergere alla soluzione continua.

Una verifica preliminare sulla bontà di questo metodo è controllare se le condizioni di equilibrio del sistema di Eulero coincidono con quelle del sistema di partenza. In effetti così è. È infatti molto facile verificare che i punti di equilibrio del sistema approssimante discreto sono gli stessi del sistema continuo di partenza. Ovviamente nulla si può dire sulla stabilità. Infatti punti di equilibrio stabili nel sistema continuo possono risultare instabili in quello approssimante discreto (in particolare se  $\tau > 0$  non è sufficientemente piccolo).

Ulteriori esempi di punti di equilibrio verranno considerati nel seguito.

### 7.3 Funzioni di Lyapunov

Come già precedentemente accennato, un sistema non lineare può avere punti di equilibrio di cui si può studiare la **stabilità locale**, ossia per piccole perturbazioni intorno ai punti di equilibrio stessi. Alcuni esempi di punti di equilibrio stabili ed instabili sono riportati in figura (7.3).



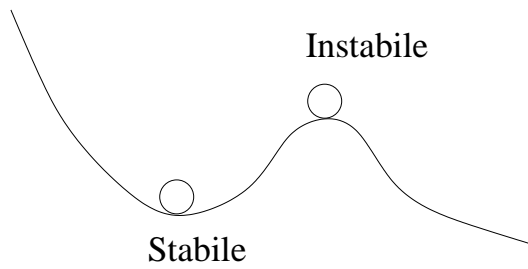


Figura 7.3: Esempi di punti di equilibrio stabili ed instabili

Si supponga allora di studiare un sistema non lineare con un punto di equilibrio caratterizzato dalla condizione

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (7.7)$$

Se assumiamo  $\bar{u}$  fissato possiamo studiare il sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}) = F_{\bar{u}}(x(t)) \quad (7.8)$$

che risulta dunque essere autonomo senza ingressi, con ovvio punto di equilibrio in  $\bar{x}$ . Si opera ora una traslazione di coordinate: si introduce allora la nuova variabile  $z(t) = x(t) - \bar{x}$ , da cui risulta:

$$\dot{z}(t) = F_{\bar{u}}(x(t)) = F_{\bar{u}}(z(t) + \bar{x}) \quad (7.9)$$

Con queste nuova definizione, il punto di equilibrio si trova in  $\bar{z} = 0$ . Definiamo  $G_{\bar{x}, \bar{u}}(z(t)) = F_{\bar{u}}(z(t) + \bar{x})$ . Possiamo quindi ricondurci allo studio del sistema:

$$\dot{z}(t) = G_{\bar{x}, \bar{u}}(z(t)) \quad (7.10)$$

con punto di equilibrio  $0 = G_{\bar{x}, \bar{u}}(0)$ . Si osservi come, con questo cambio di variabili, ci si sia ricondotti allo studio di un solo sistema autonomo senza ingressi con un punto di equilibrio in  $0$ , e questo è possibile per ogni punto di equilibrio del sistema originario pari a  $\bar{x}$ . Si hanno allora le seguenti:

**Definizione** Il sistema si dice **stabile nel punto di equilibrio (N.P.E.)** se, dato  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tale che se  $\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon$ .

La definizione, nelle variabili originali, prevedrebbe  $\|x(0) - \bar{x}\| \geq \delta$  e  $\|x(t) - \bar{x}\| \geq \varepsilon$ , ma abbiamo visto come ci si possa ricondurre allo studio di un sistema con  $\bar{x} = 0$ .

**Definizione** Il sistema si dice **asintoticamente stabile nel punto di equilibrio (N.P.E.)** se è stabile N.P.E. ed inoltre, per  $\|x(0)\| \leq \delta$ , si ha  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

Lo studio effettivo della stabilità di un punto di equilibrio di un sistema non lineare si basa sulla teoria esposta da Lyapunov agli inizi del secolo XX, nella quale si generalizza il concetto di energia in un sistema.

Si supponga, infatti, di avere una funzione differenziabile con continuità ( $\in C^1$ ) e definita nello spazio degli stati  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , con le proprietà di una funzione definita positiva in un intorno dell'origine  $W$  (vedi figura (7.4)):

- $V(0) = 0$ ;
- $V(x) > 0$  per  $x \in W, x \neq 0$ .

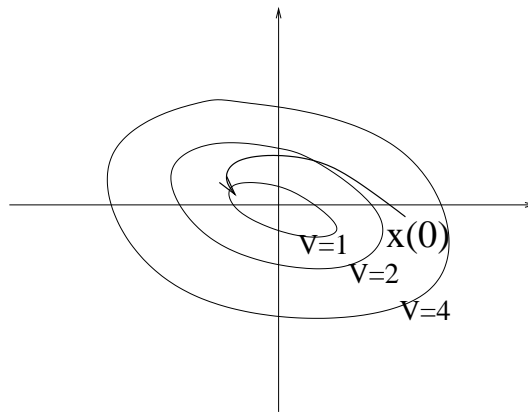


Figura 7.4: Curve di livello per una funzione di Lyapunov

Si osserva che l'origine degli assi è contenuta in tutte le superfici di sottolivello  $V(x) \geq k$  della funzione.

Il concetto espresso da Lyapunov, e che formalizzeremo tra breve con un teorema, si basa su quest'osservazione: se una traiettoria  $x(t)$  del sistema, con  $x(0)$  sufficientemente piccolo, è tale che  $V(x(t))$  è una funzione non crescente, allora siamo costretti a rimanere su una superficie di sottolivello. Questa visione ha una giustificazione intuitiva se si considera che ogni sistema in natura, da quelli elettrici a quelli meccanici, che sia composto da elementi passivi è sicuramente stabile in un punto in cui si ha un minimo di energia.

Il problema fondamentale è che non è possibile, nella maggioranza dei casi, conoscere la traiettoria  $x(t)$  di un sistema non lineare, e quindi in prima istanza non saremmo in grado di osservare se  $V(x(t))$  è una funzione non crescente. Tuttavia, questo ostacolo è facile da aggirare se consideriamo la derivata della funzione di Lyapunov:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) = \nabla V(x)\dot{x}(t) = \nabla V(x)f(x(t)) \quad (7.11)$$

dove  $\nabla V(x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$ .

Ciò che si nota è che, se ad un certo istante  $t$  il sistema attraversa uno stato  $\tilde{x}$ , la derivata è facilmente calcolabile:

$$\left. \frac{d}{dt}V(x(t)) \right|_{x(t)=\tilde{x}} = \left. \dot{V}(x(t)) \right|_{x(t)=\tilde{x}} = \nabla V(\tilde{x})f(\tilde{x}) \quad (7.12)$$

e quindi non è più necessario conoscere l'intera traiettoria  $x(t)$ . Questa derivata, chiamata anche **derivata alla Lyapunov**, è utile per determinare la stabilità di un sistema: se  $V(x)$  è una funzione non crescente, si ha  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Possiamo allora formalizzare queste idee con il seguente:

**Teorema** Se  $\exists V \in C^1$ ,  $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , tale che in un intorno  $W$  dell'origine si ha  $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0$  per  $x \in W \setminus \{0\}$ , se  $\dot{V}(x) \leq 0$  per  $x \in W$  allora il sistema è stabile N.P.E. in zero. Inoltre, se  $\dot{V}(x) < 0$  per  $x \in W \setminus \{0\}$ , allora il sistema è asintoticamente stabile N.P.E. in zero.

**Dimostrazione** Verifichiamo solamente la prima parte del teorema, cioè che se  $\dot{V}(x) \leq 0$  allora il sistema è stabile N.P.E. in zero. Fissiamo dunque una sfera  $S_\varepsilon = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$  nell'insieme degli stati. Non è restrittivo prendere  $S_\varepsilon \subset W$ ; sulla superficie esterna della sfera,  $\|x\| = \varepsilon$ , fissiamo il valore  $m \doteq \min V(x)$ ,  $x \in \partial S_\varepsilon$ . Consideriamo ora una sfera di raggio  $\delta < \varepsilon$  e definiamo  $M \doteq \max V(x)$ ,  $x \in \partial S_\delta$ , con  $M < m$ : se supponiamo, per assurdo, che il sistema non sia stabile, allora sarebbe possibile, da una condizione iniziale dentro  $S_\delta$ , operare una traiettoria che faccia fuoriuscire lo stato dalla sfera  $S_\varepsilon$ . In particolare, esisterebbe un istante di tempo  $t'$  tale che  $x(t') \in S_\varepsilon$ ; dato che le traiettorie sono differenziabili, ci sarebbe almeno un punto di attraversamento, e se ne considera il primo:

$$t_1 = \min\{t \geq 0 : x(t_1) \in S_\varepsilon\} \quad (7.13)$$

Tra l'istante 0 e l'istante  $t_1$  la traiettoria è contenuta in  $S_\varepsilon$ , e quindi in  $W$ , dove sappiamo che  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ . Tuttavia, per costruzione possiamo anche operare le seguenti maggiorazioni:

$$V(x(t_1)) \geq m > M \geq V(x(0)) \quad (7.14)$$

per cui risulta anche  $V(x(t_1)) > V(x(0))$ , ossia  $\dot{V}(x) > 0$  che risulta incompatibile con l'ipotesi sostenuta. Pertanto, il sistema deve essere per forza stabile.

La seconda parte del problema, che prevede l'asintotica stabilità, non viene dimostrata, e si rimanda a testi specializzati.

### Esempio: il pendolo

Si vuole studiare la stabilità di un punto di equilibrio del pendolo, rappresentato in figura (7.5).

Il sistema è descritto dall'equazione:

$$l_m^2 \ddot{\vartheta}(t) = -l_m g \sin \vartheta(t)$$

che, detti  $x_1(t) = \vartheta(t)$  e  $x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$ , in forma di sistema è:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sin x_1(t) \end{cases}$$

La candidata ad essere una funzione energia per il pendolo è, da quanto ci insegna la Fisica, l'energia meccanica, pari alla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + 1 - \cos x_1$$

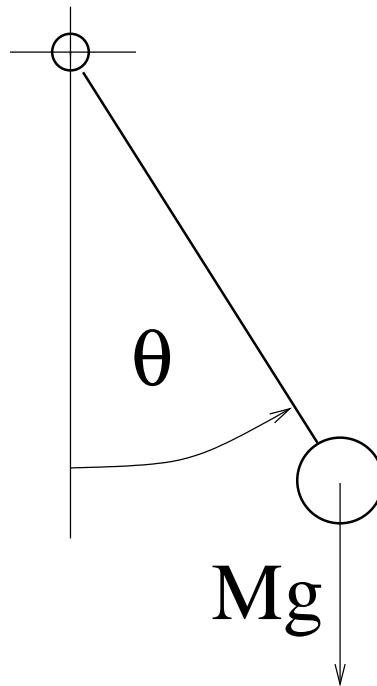


Figura 7.5: Pendolo semplice

Essa possiede tutte le caratteristiche di una funzione di Lyapunov, se considerata in un intorno. Si ottiene allora:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{bmatrix} = x_2 \sin x_1 - x_2 \sin x_1 = 0$$

e pertanto  $\dot{V}(x_1, x_2)$  è semidefinita negativa, da cui si ricava la stabilità del sistema.

### Esempio

Dimostriamo che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2^2 + x_1^4 \\ \dot{x}_2 = 3x_1^3 - 2x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

è asintoticamente stabile, se si sceglie  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . La derivata alla Lyapunov è infatti:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2^2 + x_1^4 \\ 3x_1^3 - 2x_2 + x_1^2 \end{bmatrix} = \\ &= -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2^2 + 2x_1^5 + 6x_1^3x_2 + 2x_1^2x_2 \end{aligned}$$

In un intorno sufficientemente piccolo del punto di equilibrio  $(0, 0)$ , i termini al quadrato dominano sul resto e pertanto la funzione risulta definita negativa, e ciò prova l'asintotica stabilità del sistema.

**Esempio**

Consideriamo il sistema a due vasche le cui equazioni verranno presentate nella sezione 9.7

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -\frac{1}{\alpha S} \sqrt{h_1 - h_2} + u \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{\alpha S} \sqrt{h_1 - h_2} - \frac{1}{\beta S} \sqrt{h_2} \end{cases}$$

e un punto di equilibrio generico in  $(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$ . Traslando il sistema con  $x_1 = h_1 - \bar{h}_1$  e  $x_2 = h_2 - \bar{h}_2$ , si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{\alpha S} \sqrt{x_1 - x_2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2} + u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\alpha S} \sqrt{x_1 - x_2 + \bar{h}_1 - \bar{h}_2} - \frac{1}{\beta S} \sqrt{x_2 + \bar{h}_2} \end{cases}$$

Utilizzando la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\dot{V}(x_1, x_2)$  risulta essere

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \\ &= (x_1 - x_2) \left( \frac{1}{\alpha S} \sqrt{x_1(t) + \bar{h}_1 - x_2(t) - \bar{h}_2} - \bar{q} \right) + x_2 \left( \frac{1}{\beta S} \sqrt{x_2(t) + \bar{h}_2} - \bar{u} \right) \end{aligned}$$

Si vede facilmente che  $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$  (per  $x_1, x_2 \neq (0, 0)$ ), provando così l'asintotica stabilità N.P.E..

E' importante notare che una scelta errata della funzione  $V(x)$  potrebbe non verificare le condizioni anche se il sistema fosse asintoticamente stabile: ciò significa che, scelta una funzione di Lyapunov la cui derivata sia anche maggiore di zero nell'intorno  $W$ , non si può concludere nulla sulla stabilità del sistema.

**Esempio** Si consideri allora in sistema  $\dot{x} = Ax$  dove  $A$  è la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

con  $\alpha \geq 0$ . Tale sistema è asintoticamente stabile (infatti,  $\det(sI - A) = s^2 + 2s + 1 + \alpha$ ). Considerata  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , tuttavia, essa è una funzione di Lyapunov solamente per determinati valori di  $\alpha$ ; per esempio, si può facilmente vedere che per  $\alpha = 1$  le condizioni del teorema di Lyapunov sono verificate, mentre per  $\alpha$  grande non lo sono.

Il problema fondamentale, dunque, è la scelta di una funzione di Lyapunov in grado di dimostrarci la stabilità del sistema: essa deve possedere proprietà tali da avere delle curve di livello che in qualche modo siano adeguate all'andamento delle traiettorie del sistema. Esistono dei teoremi inversi, i quali dimostrano, sotto opportune ipotesi, l'esistenza di una funzione di Lyapunov per ogni sistema asintoticamente stabile. Tali risultati sono teorici e in generale, non sono di aiuto per quanto riguarda la determinazione di  $V(x)$ .

**Esempio: Il pendolo dissipativo**

Si considerino nuovamente le equazioni del pendolo, a cui però si sottrae un termine derivante da un'azione viscosa proporzionale alla velocità:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sin x_1(t) - \alpha x_2(t) \end{cases}$$

Dato che il sistema è dissipativo, si sarebbe portati a sperare che la funzione di Lyapunov possa confermare l'asintotica stabilità del sistema. Considerando però la stessa funzione di Lyapunov usata precedentemente, si ottiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - \alpha x_2 \end{bmatrix} = -\alpha x_2^2$$

Si ottiene dunque una funzione semidefinita negativa, nulla sia nell'origine che sull'asse  $x_2 = 0$ . Questo, per inciso, significa che l'energia non varia quando la velocità è nulla, ossia non c'è dissipazione nel punto di massima elongazione del pendolo. Tuttavia questi calcoli non ci sono utili per confermare l'asintotica stabilità del sistema, perché non si  $\dot{V}(x)$  non è definita negativa.

Esiste un altro criterio che garantisce la stabilità asintotica di un sistema: il **criterio di Krasovskii**.

**Teorema** Supponiamo che  $\exists V \in C^1$ ,  $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  con  $V(x) > 0 \forall x \in W \setminus \{0\}$  e  $V(0) = 0$ , con  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in W$ . Considerando l'insieme  $N = \{x \neq 0 : \dot{V}(x) = 0\}$ , se non esistono traiettorie del sistema interamente contenute in  $N \cap W$  (ossia  $x(t) \notin N \cap W \forall t \geq 0$ ) allora il sistema è asintoticamente stabile.

Il criterio, in pratica, indica che se il sistema non si sofferma in zone dove c'è assenza di dissipazione, prima o poi si ricadrà nel punto di equilibrio. Tale criterio si applica al caso del pendolo.

**Esempio**

Si riconsideri il caso del pendolo dissipativo, e si osservi la figura (7.6).

In essa sono riportati l'intorno  $W$ , l'insieme  $N$  e l'andamento del vettore  $\dot{x}(t)$  calcolato dalle equazioni del sistema a partire da una situazione in cui  $x_2 = 0$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

Ciò che si nota è che in ogni istante successivo alla situazione in cui  $x_2 = 0$  la derivata ha la direzione di  $x_1$ , per cui la traiettoria è obbligata per forza ad uscire da  $N$ , ricadendo in stati in cui c'è dissipazione. Intuitivamente, così, si riconosce l'asintotica stabilità del sistema, attraverso il

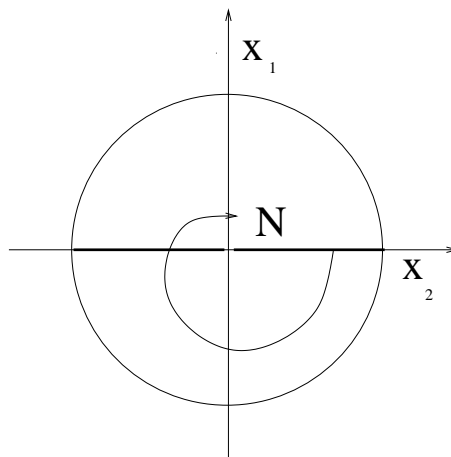


Figura 7.6: Insiemi N e W e vettore  $\dot{x}(t)$

criterio di Krasowskii. Per completezza, in figura (7.7) sono riportate le traiettorie di un pendolo dissipativo.

Accanto ai criteri di stabilità, ovviamente, esistono anche dei criteri di instabilità.

**Teorema (Criterio di Cetaev)** Supponiamo che  $V(x) \in C^1$  in un intorno  $W$  dell'origine, e che esista un insieme aperto  $A$  tale che l'origine sia contenuta nella chiusura di  $A$  (ossia sia all'interno che sulla frontiera  $\partial A$ ). Se accade che:

- $V(x) = 0 \forall x \in \partial A \cap W$ ;
- $V(0) = 0$ ;
- $V(x) > 0, \dot{V}(x) > 0 \forall x \in A \cap W$

allora il sistema è instabile N.P.E..

Di questo teorema si può dare una spiegazione intuitiva. Supponiamo, per semplicità, che l'origine appartenga alla frontiera di  $A$ , come riportato in figura (7.8). Si nota subito che qualunque traiettoria che parte da  $W$  in prossimità della frontiera di  $A$ , ovvero  $\partial A \cap W$ , essendo  $V$  e  $\dot{V}$  positive e continue, deve per forza fuoriuscire da  $W$ , per cui non può esserci stabilità locale.

### Esempio

Si consideri il levitatore magnetico, riportato in figura (9.14) in sezione 9.8. Se trascuriamo l'equazione elettrica, esso è descritto da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = g - \frac{k}{m} \frac{i^2}{x_1^2} \end{cases}$$

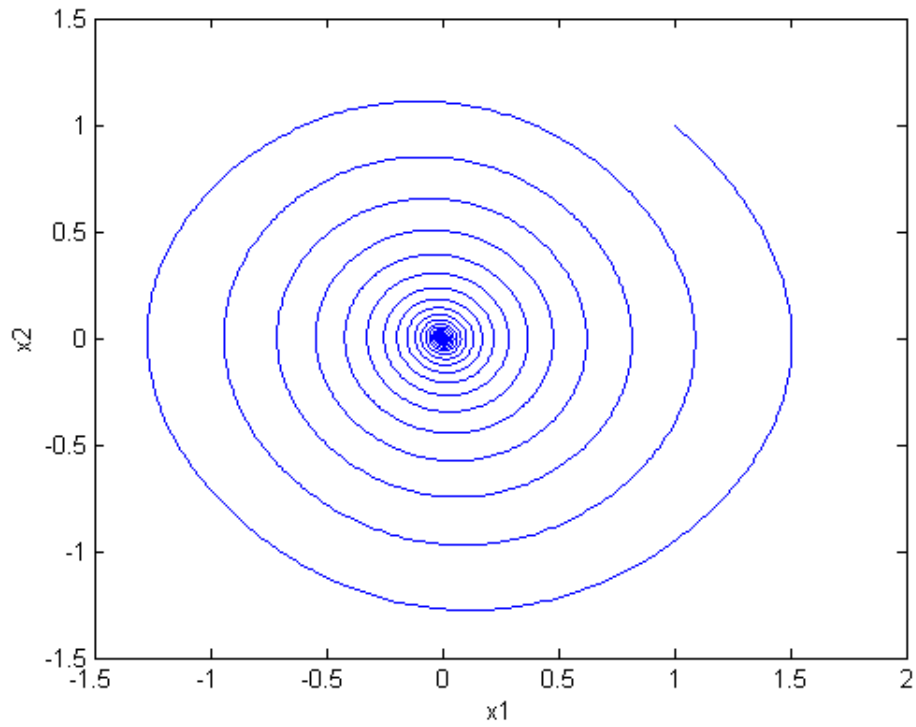


Figura 7.7: Traiettorie del pendolo dissipativo

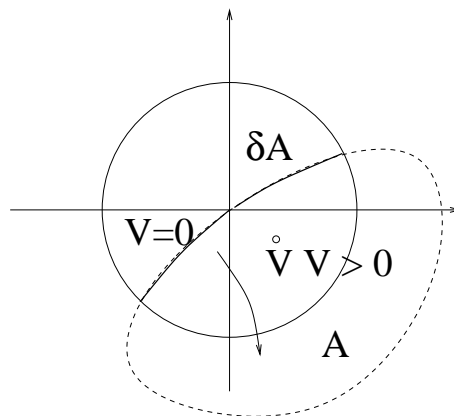


Figura 7.8: Rappresentazione intuitiva del criterio di Cetaev



Il punto di equilibrio del sistema è pari a:

$$\begin{cases} 0 = x_2(t) \\ 0 = g - \frac{k}{m} \frac{i^2}{x_1^2} \end{cases}$$

e ciò significa avere velocità nulla e forza magnetica uguale e contraria alla forza di gravità. Si vuole ora dimostrare l'instabilità del punto di equilibrio ottenuto con un valore di corrente costante  $i = \bar{i}$ . Per prima cosa operiamo la traslazione degli assi:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ z_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \bar{x}_2 = z_2 \\ \dot{z}_2 = g - \frac{k}{m} \frac{\bar{i}^2}{(z_1 + \bar{x}_1)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Il punto di equilibrio è ora spostato in  $(0, 0)$ . Come candidata funzione di Cetaev prendiamo  $V(x_1, x_2) = z_1 z_2$  e  $A = \{z_1, z_2 > 0\}$ ; risulta allora:

$$\dot{V}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_2 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ g - \frac{k}{m} \frac{\bar{i}^2}{(z_1 + \bar{x}_1)^2} \end{bmatrix} = z_2^2 + z_1 \left( g - \frac{k}{m} \frac{\bar{i}^2}{(z_1 + \bar{x}_1)^2} \right)$$

Il secondo termine è pari a 0 se  $z_1 = 0$ , cioè nel punto di equilibrio, ed è maggiore di zero se  $z_1 > 0$  perché il termine negativo diminuisce all'aumentare del denominatore. Pertanto  $\dot{V}(z_1, z_2) > 0$  in  $A \cap W$ , e sono dunque verificate tutte le ipotesi del criterio di Cetaev: il sistema è instabile N.P.E..

## 7.4 Criterio di Lyapunov per sistemi discreti

La formulazione del criterio di Lyapunov per i sistemi discreti ricalca quella data per i sistemi continui, con qualche piccolo cambiamento. Il sistema discreto, infatti, è nella forma:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (7.15)$$

ed i punti di equilibrio si trovano ponendo:

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (7.16)$$

La traslazione avviene come per i sistemi continui, ponendo  $z = x - \bar{x}$ , e supponendo  $u(k) = \bar{u}$  fissato si giunge allo studio di un sistema del tipo:

$$z(k+1) = F_{\bar{x}, \bar{u}}(z(k)) \quad (7.17)$$

con punto di equilibrio in zero. Nel caso di sistemi discreti non è definita la derivata, per cui il criterio di Lyapunov non può essere enunciato come per i sistemi continui. Al posto della derivata viene presa in considerazione la **differenza di Lyapunov** così definita:

$$\Delta V(x(k)) \doteq V(x(k+1)) - V(x(k)) = V(f(x(k))) - V(x(k)) \quad (7.18)$$

Si osservi come nell'ultimo passaggio si sia sostituita l'equazione che descrive il sistema, eliminando la necessità di conoscere la traiettoria. L'idea di fondo è che se la differenza è non crescente, il sistema è stabile. Più formalmente:

**Teorema** Se esiste  $V(x)$  continua in un intorno  $W$  di  $0$  definita positiva in  $W$  (ossia  $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0 \forall x \in W \setminus \{0\}$ ), si ha:

- se  $\Delta V(x) \leq 0 \forall x \in W$  allora il sistema è stabile N.P.E.;
- se  $\Delta V(x) < 0 \forall x \in W \setminus \{0\}$  allora il sistema è asintoticamente stabile N.P.E..

## 7.5 Equazioni di Lyapunov per sistemi lineari

Abbiamo visto in precedenza che non esiste un metodo sistematico per associare una funzione di Lyapunov ad un sistema non lineare. Tipicamente, la determinazione di una buona candidata è lasciata all'intuito e tipicamente basata su considerazioni sul sistema stesso (per esempio considerazioni di tipo fisico). Fanno, tuttavia, eccezione i sistemi lineari, per i quali c'è un modo sistematico per individuare una funzione di Lyapunov opportuna in caso di sistemi asintoticamente stabili.

Si consideri, a questo proposito, la seguente funzione quadratica:

$$V(x) = x^T P x \quad (7.19)$$

Se la matrice  $P$  risulta simmetrica e definita positiva, allora  $V(x)$  è una candidata ad essere una funzione di Lyapunov. Si può facilmente verificare che risulta:

$$\nabla V(x) = 2x^T P \quad (7.20)$$

in cui  $\nabla V(x)$  è una vettore riga. Le funzioni quadratiche con matrici simmetriche e definite positive sono senza dubbio le funzioni di Lyapunov più usate. Se ora consideriamo un sistema lineare  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  (l'ingresso non è necessario per testare la stabilità) e calcoliamo la derivata della funzione di Lyapunov appena introdotta, si ottiene:

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = 2x^T P A x = x^T P A x + x^T P A x \quad (7.21)$$

Gli ultimi due termini sono degli scalari, per cui è possibile trasporre il primo senza che il risultato cambi. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T A^T P^T x + x^T P A x = x^T A^T P x + x^T P A x = \\ &= x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x \end{aligned} \quad (7.22)$$

dove si è posto:

$$A^T P + P A = -Q \quad (7.23)$$

che viene detta **equazione di Lyapunov**. Si vede facilmente che  $Q$  è una matrice simmetrica, in quanto somma di  $A^T P$  e della sua trasposta.

Se ora supponiamo che il sistema sia asintoticamente stabile, potremmo pensare di cercare una  $Q$  tale da essere definita positiva, in modo che  $\dot{V}(x)$  sia definita negativa verificando le condizioni del teorema di Lyapunov. In realtà questo non funziona, perché non è facile trovare la matrice  $P$  tale da rendere definita positiva la  $Q$ . E' invece opportuno e utile ragionare al contrario, fissando una matrice  $Q$  che verifichi le condizioni del teorema e calcolare la corrispondente  $P$  dell'equazione (7.23). Questo procedimento è supportato dal seguente teorema.

**Teorema** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  è asintoticamente stabile;
2.  $\forall Q$  simmetrica e definita positiva, la matrice  $P$  soluzione dell'equazione di Lyapunov  $A^T P + PA = -Q$  è simmetrica e definita positiva.

**Dimostrazione** Partiamo facendo vedere che 2 implica 1. Se fissiamo ad arbitrio una matrice  $Q$  e ne ricaviamo una matrice  $P$  simmetrica e definita positiva, allora la funzione quadratica  $V(x) = x^T P x$  è proprio una valida funzione di Lyapunov. Applicando i calcoli già svolti in precedenza, risulta  $\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq 0$  perché  $Q$  è simmetrica e definita positiva, per cui sono verificate le condizioni del teorema di Lyapunov.

Dimostriamo ora che 1 implica 2. Supponendo il sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  asintoticamente stabile, fissiamo ad arbitrio una  $Q$  simmetrica e definita positiva. La soluzione dell'equazione di Lyapunov è allora la seguente:

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (7.24)$$

Infatti, sostituendo tale espressione nell'equazione  $A^T P + PA = -Q$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= A^T \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt + \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt A = \\ &= \int_0^{+\infty} [A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A] dt \end{aligned} \quad (7.25)$$

dato che  $\frac{d}{dt} e^{A t} = A e^{A t} = e^{A t} A$ , ed è uno dei pochi casi in cui è indifferente la posizione della matrice  $A$  nella derivata, l'integrando risulta proprio la derivata di un prodotto di funzioni:

$$A^T P + PA = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [e^{A^T t} Q e^{A t}] dt = [e^{A^T t} Q e^{A t}]_0^{+\infty} = 0 - Q \quad (7.26)$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che il sistema è asintoticamente stabile, per cui  $e^{A t} \Big|_{t \rightarrow +\infty} = 0$ .

Verificato che  $P$  è data dall'espressione sopra riportata, dimostriamo ora che è simmetrica e definita positiva.

- $P$  è simmetrica e lo si vede molto facilmente perché l'integrando è simmetrico, in quanto si prova banalmente che  $(e^{A t})^T = e^{A^T t}$ ;

- $P$  è definita positiva, perché preso  $\bar{x} \neq 0$  si ha:

$$\bar{x}^T \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt \bar{x} = \int_0^{+\infty} \bar{x}^T e^{A^T t} Q e^{At} \bar{x} dt = \int_0^{+\infty} x^T(t) Q x(t) dt \quad (7.27)$$

dove si è introdotto  $x(t) = e^{At} \bar{x} \neq 0$  perché i modi non sono mai esattamente nulli. Risulta allora che l'integrando è maggiore di zero perché  $Q$  è definita positiva, per cui anche l'integrale è maggiore di zero provando che  $P$  è definita positiva.

L'equazione di Lyapunov è lineare in  $P$ , per cui nella si preferisce evitare di calcolare l'integrale come soluzione di  $P$ , ed impostare invece un sistema lineare in cui le incognite sono gli elementi del triangolo superiore (od inferiore) di  $P$ , che è simmetrica. Il numero totale di incognite e di equazioni è allora pari a  $n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{(n + 1)n}{2}$ .

Il caso dei sistemi discreti  $x(k + 1) = Ax(k)$  è analogo, in cui la funzione di Lyapunov è sempre  $V(x) = x^T P x$  ma invece della derivata si deve considerare la differenza di Lyapunov. Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(x(k + 1)) - V(x(k)) = V(Ax) - V(x) = \\ &= (Ax)^T P (Ax) - x^T P x = x^T A^T P A x - x^T P x = \\ &= x^T (A^T P A - P) x = -x^T Q x \end{aligned} \quad (7.28)$$

dove questa volta si è posto:

$$A^T P A - P = -Q \quad (7.29)$$

che viene chiamata **equazione di Lyapunov discreta**. Sussiste allora il seguente:

**Teorema** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $x(k + 1) = Ax(k)$  è asintoticamente stabile;
2.  $\forall Q$  definita positiva, la soluzione  $P$  dell'equazione di Lyapunov discreta  $A^T P A - P = -Q$  è definita positiva.

**Dimostrazione** La dimostrazione ricalca in pieno quella già precedentemente esposta, considerando al posto dell'integrale una sommatoria.

La discussione svolta fino ad ora ci permette di eseguire un test per verificare l'asintotica stabilità o meno di un sistema; tuttavia, avendo trattato sistemi lineari, ciò non è molto utile perché la stabilità può essere studiata semplicemente analizzando gli autovalori della matrice  $A$ . Di più, quasi tutti gli algoritmi che calcolano la matrice  $P$  dall'equazione di Lyapunov continua e discreta passano per il calcolo degli autovalori di  $A$ , rendendo quindi inutile la soluzione. Tuttavia, la teoria appena esposta è di importanza fondamentale per le conseguenze fra le quali la possibilità di dare un supporto rigoroso alla teoria della linearizzazione.

Un'ultima considerazione sulla scelta della matrice  $Q$  nel caso si voglia trovare la matrice  $P$ . Scegliere una matrice definita positiva è semplice: o si prende la matrice identica, oppure si considera una matrice quadrata ed invertibile  $R$  e si considera  $R^T R$ . Quest'ultima infatti risulta:

- simmetrica perché  $(R^T R)^T = R^T R$ ;
- definita positiva perché  $\forall x \neq 0$  si ha  $x^T (R^T R)x = (Rx)^T (Rx) = \|Rx\|^2 > 0$ , in quanto  $R$  è invertibile.

## 7.6 Linearizzazione

Gli argomenti trattati in questa e nella prossima sezione sono di notevole importanza, perché in parte giustificano l'attenzione che abbiamo posto sulla teoria sviluppata per i sistemi lineari.

Per iniziare, si consideri una funzione non lineare qualsiasi in una dimensione, del tipo  $f(x)$ . E' ben noto che, se  $f$  è differenziabile con continuità attraverso uno sviluppo in serie di Taylor, è possibile scrivere la funzione come segue

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x - x_0) \quad (7.30)$$

dove  $R(x - x_0)$  è il resto. Tale resto è un infinitesimo di ordine superiore

$$\frac{|R(x - x_0)|}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad (7.31)$$

I primi due termini formano l'**approssimante lineare**:

$$\bar{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (7.32)$$

e rappresentano una retta che passa per il punto  $x_0$  con pendenza  $f'(x_0)$ .

Nel caso di funzioni non lineari in due variabili, la situazione è analoga. Con uno sviluppo in serie, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x, u) &= f(x_0, u_0) + \nabla f \begin{bmatrix} x - x_0 \\ u - u_0 \end{bmatrix} + R(x - x_0, u - u_0) = \\ &= f(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, u_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0} (u - u_0) + \\ &\quad + R(x - x_0, u - u_0) \end{aligned} \quad (7.33)$$

In questo caso, l'approssimante lineare risulta essere l'equazione di un piano che passa per  $(x_0, u_0)$  avente equazione:

$$\bar{f}(x, u) = f(x_0, u_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(u - u_0) \quad (7.34)$$

Queste considerazioni possono essere applicate al caso di sistemi non lineari  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , in cui lo sviluppo in serie viene eseguito con riferimento ad un particolare punto di equilibrio

identificato da  $0 = f(\bar{x}, \bar{u})$ :

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} (u - \bar{u}) + R(x - \bar{x}, u - \bar{u}) \quad (7.35)$$

I termini

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}}$$

sono le matrici Jacobiane, i cui termini i-j sono pari a

$$\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \quad \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{\bar{x}, \bar{u}}$$

e diventano dei semplici numeri una volta che le derivate vengono valutate nei punti di equilibrio.

E' ora possibile introdurre le variabili  $z(t) = x(t) - \bar{x}$  e  $v(t) = u(t) - \bar{u}$ , in modo da operare una traslazione degli assi ed avere un punto di equilibrio in  $(z, v) = (0, 0)$ . Lo sviluppo in serie allora diventa:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) + R(z(t), v(t)) \\ &= 0 + A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + B_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) + R(z(t), v(t)) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Il resto ha la proprietà:

$$\frac{\|R(z, v)\|}{\|z\| + \|v\|} \rightarrow 0 \text{ per } (\|v\|, \|z\|) \rightarrow 0 \quad (7.37)$$

Dunque per piccoli spostamenti intorno al punto di equilibrio si può trascurare il termine del resto, ottenendo un sistema linearizzato del tipo:

$$\dot{z}(t) = A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + B_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) \quad (7.38)$$

Se è data una trasformazione d'uscita,

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

è possibile linearizzarla nel punto di equilibrio. Assumiamo

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

quale uscita di equilibrio. Allora si ha che

$$y(t) = G(x(t), u(t)) = \bar{y} + \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) + S(z(t), v(t)) \quad (7.39)$$

dove  $S$  è il resto. Introducendo ora la variabile  $w(t) = y - \bar{y}$  e trascurando il resto, si ha l'equazione:

$$\begin{aligned} w(t) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) + S(z(t), v(t)) \\ &= C_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + D_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) \end{aligned} \quad (7.40)$$

Ricapitolando, il sistema linearizzato nel punto di equilibrio risulta:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + B_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) \\ w(t) = C_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + D_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) \end{cases} \quad (7.41)$$

dove gli elementi delle matrici sono pari a:

$$\begin{aligned} [A]_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{u}) \\ [B]_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x}, \bar{u}) \\ [C]_{ij} &= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{u}) \\ [D]_{ij} &= \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned} \quad (7.42)$$

Una volta ottenuto il sistema linearizzato nel punto di equilibrio, ci si possono porre due problemi.

- problema di analisi della stabilità: si analizzerà il sistema approssimante  $\dot{z}(t) = A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t)$ ;
- problema di sintesi: si costruirà un regolatore, considerando l'approssimante lineare e le tecniche studiate per sistemi lineari. Tale regolatore viene applicato al sistema secondo lo schema riportato in figura (7.9).

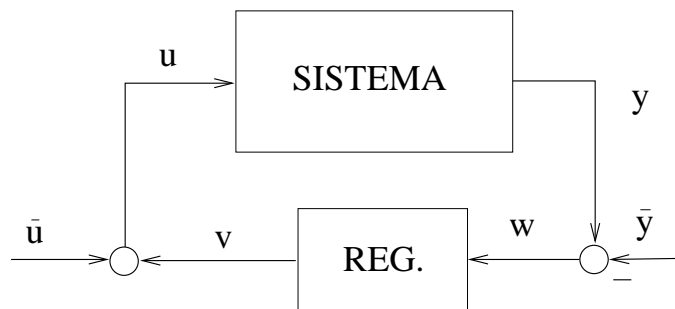


Figura 7.9: Controllore per sistema linearizzato in un punto di equilibrio

### Esempio

Consideriamo il levitatore magnetico descritto nella sezione 9.8. Le equazioni che descrivono il sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = g - \frac{k}{m} \frac{x_3^2(t)}{x_1^2(t)} \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{cases}$$

L'uscita  $e(t)$  è la tensione di un fotodiodo che rileva la posizione della sfera metallica, sulla base di quanta luce attraversa un diaframma e non è coperta dalla sfera stessa. I punti di equilibrio del

sistema sono dati da:

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = g - \frac{k}{m} \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{x}_1^2} \\ 0 = -\frac{R}{L} \bar{x}_3 + \frac{1}{L} \bar{u} \end{cases}$$

E' usuale, in questo caso, fissare la posizione  $\bar{x}_1$  in cui si vuole controllare la sfera, e poi ricavare  $\bar{x}_3$  e  $\bar{u}$  di conseguenza. Posto  $z_1 = x_1 - \bar{x}_1$ ,  $z_2 = x_2 - \bar{x}_2$  e  $z_3 = x_3 - \bar{x}_3$ , si ha il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{k}{m} \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{x}_1^2} & 0 & -2\frac{k}{m} \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

Esso può essere anche scritto nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha^2 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} v(t)$$

dove

$$\alpha^2 = 2\frac{k}{m} \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{x}_1^2} \quad \beta = 2\frac{k}{m} \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1^2} \quad \gamma = \frac{R}{L} \quad \delta = \frac{1}{L}$$

Il punto di equilibrio risulta instabile perché gli autovalori risultano posizionati in  $-\gamma$ ,  $-\alpha$ ,  $+\alpha$ . Il semplice test di raggiungibilità dimostra che il sistema è raggiungibile, dunque è possibile progettare un controllore a retroazione dello stato per stabilizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio.

Per quanto riguarda l'uscita del sistema, si ha che  $e(t) = \varphi(y(t))$ , per cui:

$$e(t) - \bar{e} = \varphi(y(t)) - \varphi(\bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + R(y(t) - \bar{y})$$

La derivata presente nella matrice  $C_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3}$  si può ricavare dalla pendenza della caratteristica del fotodiode data dal costruttore. La matrice  $C$  è del tipo

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con  $\mu \neq 0$  per cui il sistema è osservabile, come facilmente verificabile. Il sistema linearizzato è dunque stabilizzabile.

## 7.7 Analisi della stabilità del punto di equilibrio

L'approssimazione lineare è riferita ad un particolare punto di equilibrio. Dunque, è intuitivo che essa può darci delle informazioni sulla stabilità di tale punto di equilibrio, che è una proprietà locale.



Supponiamo allora che  $v(t) = 0$ , cioè  $u(t) = \bar{u}$ , ossia che il sistema non lineare da studiare sia:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}) \quad (7.43)$$

Utilizzando lo sviluppo in serie e la traslazione delle coordinate  $z(t) = x(t) - \bar{x}$ , si ha:

$$\dot{z}(t) = f_{\bar{u}}(z(t)) = A_0 z(t) + R(z(t)) \quad (7.44)$$

dove  $A_0$  indica che il punto di equilibrio è in  $z = 0$ . Associamo ora il modello lineare al sistema:

$$\dot{z}(t) = Az(t) \quad (7.45)$$

e ci chiediamo che informazioni è in grado di darci l'analisi della stabilità del sistema lineare. Vale il seguente risultato fondamentale.

**Teorema** Se il sistema lineare è asintoticamente stabile, allora il sistema non lineare è asintoticamente stabile N.P.E.. Se il sistema lineare è esponenzialmente instabile (cioè  $\exists \lambda \in \sigma(A)$  tale che  $\Re\{\lambda\} > 0$ ) allora il sistema non lineare è instabile N.P.E..

**Dimostrazione** Verifichiamo solo la prima affermazione, in quanto la seconda è più complessa da provare.

Per la dimostrazione servono due importanti proprietà. Ricordiamo che la norma di una matrice è definita come segue

$$\|M\| \doteq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} = \left( \max \sigma(M^T M) \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \|Mx\| \leq \|M\| \|x\| \quad (7.46)$$

Si dimostra facilmente che  $\|MNx\| \leq \|M\| \|N\| \|x\|$ . Ricordiamo inoltre che vale disuguaglianza di Schwartz, secondo la quale, se si indica con  $\langle x, y \rangle$  il prodotto scalare tra due vettori  $x$  ed  $y$ , si ha:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (7.47)$$

Se il sistema lineare è asintoticamente stabile,  $\forall Q$  definita positiva la matrice  $P$  soluzione dell'equazione di Lyapunov è definita positiva. Assumiamo allora  $Q = I$  matrice identica, da cui risulta che la soluzione  $P$  dell'equazione

$$A^T P + PA = -I \quad (7.48)$$

da origine alla funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ . Vogliamo dimostrare che  $V(x)$  è funzione di Lyapunov anche per il sistema non lineare, provandone così la stabilità nel punto di equilibrio.

Calcoliamo allora  $\dot{V}(x)$  in riferimento al sistema non lineare:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \nabla V(x)f(x) = \\
 &= 2x^T P(Ax + R(x)) = 2x^T PAx + 2x^T PR(x) = \\
 &= x^T PAx + x^T PAx + 2x^T PR(x) = \\
 &= x^T A^T Px + x^T PAx + 2x^T PR(x) = \\
 &= x^T (A^T P + PA)x + 2x^T PR(x) = \\
 &= -x^T Ix + 2x^T PR(x) = \\
 &= -\|x\|^2 + 2x^T PR(x)
 \end{aligned} \tag{7.49}$$

Ritornando all'espressione di  $\dot{V}(x)$ , si ottiene:

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^2 \left( 1 - \frac{2x^T PR(x)}{\|x\|^2} \right) \text{ per } x \neq 0 \tag{7.50}$$

Per far vedere che  $\dot{V}(x)$  è definita negativa anche per il sistema non lineare, basta concentrarsi sul secondo termine, in quanto il primo è sicuramente minore di zero. Dunque è sufficiente dimostrare che esiste un intorno  $W$  di zero tale che:

$$\frac{2x^T PR(x)}{\|x\|^2} < 1 \tag{7.51}$$

e la disuguaglianza vale anche se calcoliamo il moduli di ambo i membri. In effetti, applicando la disuguaglianza di Schwartz si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2x^T PR(x)}{\|x\|^2} \right| &= 2 \frac{|x^T PR(x)|}{\|x\|^2} = \frac{|\langle x, PR(x) \rangle|}{\|x\|^2} \leq \\
 &\leq \frac{2\|x\|\|PR(x)\|}{\|x\|^2} = \frac{2\|PR(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{2\|P\|\|R(x)\|}{\|x\|}
 \end{aligned} \tag{7.52}$$

Dato che  $R(x)$  è un infinitesimo di ordine superiore al primo, e quindi  $\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ , esiste sicuramente un intorno  $W$  di zero tale che l'ultimo termine dell'espressione sia minore di 1, ossia:

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{2\|P\|} \tag{7.53}$$

per  $x \neq 0$ . In tal caso, la derivata  $\dot{V}(x)$  risulta minore di zero e quindi sono verificate tutte le condizioni del teorema di Lyapunov, provando la stabilità N.P.E. del sistema non lineare.

Il teorema non contempla il caso in cui il sistema lineare sia stabile non asintoticamente e il caso in cui si abbia instabilità non esponenziale, ovvero quando esistono degli autovalori anche con parte reale uguale a zero e non ce ne sono di altri con parte reale maggiore di zero. Il teorema in questi casi non ci può venire in aiuto. Tuttavia, nella pratica, questa è comunque una situazione da evitare perché piccole perturbazioni sui parametri del sistema potrebbero portare gli autovalori ad assumere una parte reale maggiore di zero, con conseguente instabilità.

**Esempio**

Si consideri il sistema  $\dot{x}(t) = \alpha x^3(t)$ . E esso può avere comportamenti diversi a seconda dei valori di  $\alpha$ :

- se  $\alpha > 0$ , allora per  $x(t) > 0$  si ha  $\dot{x}(t) > 0$ , e per  $x(t) < 0$  si ha  $\dot{x} < 0$ : in altre parole, il sistema è instabile N.P.E.;
- se  $\alpha < 0$ , allora per  $x(t) > 0$  si ha  $\dot{x}(t) < 0$ , e per  $x(t) < 0$  si ha  $\dot{x} > 0$ : questa volta il sistema è asintoticamente stabile N.P.E., e lo si può anche vedere con la funzione di Lyapunov  $V(x) = x^2$ ;
- se  $\alpha = 0$ , il sistema è stabile non asintoticamente.

Se operiamo una linearizzazione del sistema nel punto di equilibrio  $\bar{x} = 0$ , si ottiene facilmente:

$$\dot{x}(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 x + R(x) = 0 + R(x)$$

La matrice del sistema lineare approssimante è allora nulla indipendentemente da  $\alpha$  ( $A_0 = [0]$  e quindi l'autovalore è pari a zero) indipendentemente da  $\alpha$ . È dunque ovvio come questo non ci dia nessun tipo di informazione sulla stabilità del sistema non lineare.

**7.8 Stabilizzazione**

Supponiamo di aver effettuato una linearizzazione in un punto di equilibrio per un sistema non lineare (assumiamo  $D = 0$  per non complicare i calcoli):

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) + R(z(t), v(t)) \\ y(t) = Cz(t) + S(z(t), v(t)) \end{cases} \quad (7.54)$$

Trascurando i resti e lavorando solo con i sistemi lineari approssimanti, è logico chiedersi se il progetto di un regolatore basato sul sistema lineare, permetta di stabilizzare nel punto di equilibrio anche il sistema non lineare.

Il regolatore, ricavato con qualunque dei metodi disponibili per sistemi lineari, sarà espresso da un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \dot{z}_C(t) = Fz_C(t) + Gw(t) \\ v(t) = Hz_C(t) + Kw(t) \end{cases} \quad (7.55)$$

Supponiamo che esso stabilizzi il sistema lineare approssimante. Complessivamente la forma matriciale del sistema lineare retroazionato è del tipo:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{z}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ z_C(t) \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

Tale sistema è stabile per costruzione.

Il regolatore stesso, tuttavia, è applicato all'impianto vero, che è un sistema non lineare. Combinando quelle espressioni con quelle del regolatore, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= Az + BH z_C + BK w + R(z, w) = \\
 &= Az + BH z_C + BK(Cz + S(z)) + R(z, v) = \\
 &= (A + BKC)z + BH z_C + R(z, v) + BKS(z) \\
 \dot{z}_C &= F z_C + G(Cz + S(z)) = F z_C + GCz + GS(z)
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

che può essere scritto nella seguente forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{z}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ z_C(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} R(z, v) + BKS(z) \\ GS(z) \end{bmatrix}}_{\text{resto infinitesimo superiore}} \tag{7.58}$$

Se ora applichiamo il teorema visto in precedenza sull'analisi della stabilità nel punto di equilibrio, dobbiamo studiare la stabilità dei modi associati alla matrice risultante dalla linearizzazione di questo sistema. Ma tale matrice che è proprio quella nata dal progetto del regolatore per il sistema lineare approssimante, precisamente

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BKC & BH \\ GC & F \end{bmatrix}$$

dunque il sistema risulta stabilizzato nel punto di equilibrio. Ciò ci conferma che il progetto di un regolatore sul sistema lineare approssimante ci permette di ottenere un sistema non lineare asintoticamente stabile N.P.E., come riportato schematicamente in figura (7.10). Nella figura gli archi tratteggiati rappresentano la linearizzazione, quelli continui l'applicazione del regolatore. Si vede che invertendo le operazioni di linearizzazione e applicazione del regolatore si perviene allo stesso sistema stabile.

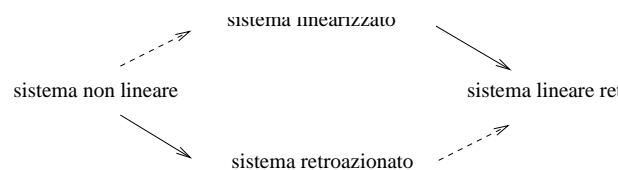


Figura 7.10: Schema di principio di regolatore per un sistema non lineare

## 7.9 Robustezza della stabilità

Nella maggior parte dei casi il modello di cui si dispone nella pratica è affetto da incertezza. Tipicamente tale incertezza è dovuta ai seguenti fattori

- parametri non noti in quanto non misurabili;
- parametri varianti nel tempo;

- inaccuratezza del modello.

In questi casi la stabilità deve essere garantita in modo robusto ovvero a fronte di tutte le possibili variazioni. Consideriamo il modello

$$\dot{x}(t) = [A + E(t, x(t), w(t))]x(t) \quad (7.59)$$

dove  $A$  rappresenta il modello nominale mentre  $E$  è la matrice di perturbazione. Tipicamente quello che si assume è che  $E$  sia ignota, ma soggetta al vincolo

$$\|E(t, x(t), w(t))\| \leq \rho \quad (7.60)$$

Il seguente teorema ci garantisce che se il sistema nominale è stabile, allora esiste un margine di stabilità robusta.

**Teorema** Se il modello nominale

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (7.61)$$

è asintoticamente stabile, allora esiste  $\rho > 0$  tale che il modello perturbato (7.59) è asintoticamente stabile per ogni  $E$  come in (7.60).

**Dimostrazione** Se (7.61) è stabile asintoticamente, allora esiste  $P$  definita positiva tale che

$$A^T P + PA = -I$$

Applichiamo la funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  al sistema (7.59). La derivata di Lyapunov è

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P[A + E]x = x^T(A^T P + PA) + 2x^T P E x = -x^T I x + 2x^T P E x \\ &\leq -x^T x + |2x^T P E x| \leq -\|x\|^2 + 2|x^T P E x| \leq 2\|x\| \|P E x\| \\ &\leq -\|x\|^2 + 2\|x\| \|P\| \|E\| \|x\| = -\|x\|^2 (1 - 2\|P\| \|E\|) \end{aligned}$$

Quindi, applicando il teorema di Lyapunov abbiamo che la derivata è definita negativa se  $2\|P\| \|E\| < 1$  ovvero se

$$\rho < \frac{1}{2\|P\|}$$



## Capitolo 8

# Rudimenti di controllo ottimo

### 8.1 Considerazioni generali

Spesso, quando si vuole controllare un sistema dinamico attraverso un controllo in retroazione, in qualche modo si vorrebbero assegnare degli autovalori con una parte reale “molto negativa, in modo da ottenere brevi transitori. Ciò però comporta che gli elementi della matrice  $K$  di retroazione dello stato potrebbero assumere valori troppo elevati per poter essere implementati nella realtà a causa della limitazione fisica introdotta dagli attuatori. Questo problema è affrontabile con la teoria **controllo ottimo**.

Ci sono essenzialmente due teorie fondamentali.

- la teoria del minimo di Pontryagin;
- la programmazione dinamica di Bellman;

La prima fornisce un controllo ottimo di tipo a catena aperta, mentre la seconda fornisce un controllo a catena chiusa e sarebbe, dunque, preferibile se non fosse estremamente complessa dal punto di vista numerico. Per brevità introdurremo solo la teoria della programmazione dinamica.

### 8.2 Programmazione dinamica

Consideriamo ora il problema minimizzare o massimizzare il seguente **indice su orizzonte infinito**:

$$J = \int_0^{\infty} l(x(t), u(t)) dt \quad (8.1)$$

con il vincolo  $u(t) \in U$ , un insieme di vincoli e

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Uno dei modi di procedere è definire la funzione cost-to-go ovvero

$$\psi(x_0) \doteq \text{valore ottimo del problema con condizioni iniziali } x_0$$

Questa funzione deve avere la seguente proprietà. Sia  $t$  l'istante iniziale e sia  $x(t+h)$  uno stato intermedio della traiettoria ottima. Allora deve valere

$$\psi(x(t)) = \min_{u(t) \in U} \left\{ \underbrace{\int_t^{t+h} l(x(t), u(t)) dt}_{\text{costo parziale}} + \underbrace{\psi(x(t+h))}_{\text{costo residuo}} \right\}$$

(dove il minimo è da ritenersi vincolato dall'equazione del sistema). Siccome  $\psi(x(t))$  non dipende da  $u$ , abbiamo

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ \frac{\psi(x(t+h)) - \psi(x(t))}{h} + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} l(x(t), u(t)) dt \right\} = 0$$

Facciamo l'assunzione che la funzione  $\psi$  sia differenziabile. Allora derivando abbiamo che

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ \dot{\psi}(x(t)) + l(x(t), u(t)) \right\} = 0$$

e questo deve valere per ogni  $t$ . Considerando la derivata alla Lyapunov di  $\psi$  otteniamo l'equazione

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ \nabla \psi(x) f(x, u) + l(x, u) \right\} = 0 \quad (8.2)$$

detta equazione di Bellman della programmazione dinamica. Se la funzione  $\psi(x)$  è nota il controllo si può derivare come l'elemento  $u = u(x)$  che minimizza l'espressione sopra. Purtroppo tale equazione è insolubile nella maggior parte dei casi.

### 8.2.1 Controllo lineare quadratico

Nel caso particolare di un sistema è lineare e costo quadratico la soluzione del problema è determinabile facilmente. Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (8.3)$$

La matrice  $Q$  è assunta semidefinita positiva, mentre  $R$  è assunta simmetrica e definita positiva. Assumiamo  $U = \mathcal{R}^n$ . L'equazione (8.2) diventa

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ \nabla \psi(x) (Ax + Bu) + \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) \right\} = 0 \quad (8.4)$$

Tentiamo la soluzione  $\psi(x) = x^T P x / 2$  e sostituiamo

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ x^T P (Ax + Bu) + \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) \right\} = 0 \quad (8.5)$$



Il minimo è ottenibile annullando le derivate parziali ovvero ponendo

$$x^T PB + u^T R = 0$$

ovvero

$$u = -R^{-1} B^T P x$$

che è un controllo lineare. Sostituendo nell'equazione si ha

$$x^T P A x - x^T P B R^{-1} B^T P x + \frac{1}{2} (x^T Q x + x^T P B R^{-1} R R^{-1} B^T P x) = 0$$

ricordando che  $x^T P A x = (x^T P A x + x^T A^T P x)/2$  otteniamo

$$x^T [A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q] x = 0$$

che dovendo valere per ogni  $x$ , ci porta all'equazione di Riccati

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (8.6)$$

Si può facilmente vedere che se  $Q$  è definita positiva allora il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile. Infatti la matrice ad anello chiuso è  $(A - B R^{-1} B^T P)$  dalla (8.6) ricaviamo

$$(A - B R^{-1} B^T P)^T P + P (A - B R^{-1} B^T P) + Q = 0 \quad (8.7)$$

quindi essendo  $Q$  definita positiva,  $x^T P x$  è una funzione di Lyapunov.

Un'ulteriore proprietà del controllo ottenuto è che ha margine di guadagno infinito. Infatti se prendiamo il controllo

$$u = -\kappa R^{-1} B^T P x$$

con  $\kappa \geq 1$  arbitrariamente grande, il sistema rimane stabile. La cosa è facilmente verificabile.

Una osservazione interessante è la seguente. Consideriamo una uscita di prestazione  $z(t) = Hx(t)$  e il costo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T(t) H^T H x(t) + u^T(t) u(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\|z(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) dt$$

Questo è un caso particolare con  $R = I$  e  $Q = H^T H$ . Consideriamo "l'uscita aumentata

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} x(t)$$

e il corrispondente sistema

$$\dot{x}(t) = [A + BK]x(t) + I\Delta(t) \quad (8.8)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (8.9)$$

$$z(t) = Hx(t) \quad (8.10)$$

con ingresso  $\Delta$ . Si può dimostrare che, detta  $W(t)$  la matrice delle risposte impulsive, il controllo LQ è quello che minimizza

$$J_{tr} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} tr[W(t)^T W(t)] dt$$

dove  $tr[S]$  indica la traccia della matrice  $S$ <sup>1</sup>. Si noti che

$$tr[M^T M] = tr[MM^T] = \sum_{ij} M_{ij}^2$$

L'equazione di Riccati da risolvere nel caso particolare è

$$A^T P + PA - PBB^T P + H^T H = 0 \quad (8.11)$$

### 8.2.2 Osservatore ottimo–Filtro di Kalman–Bucy

Consideriamo un osservatore per un sistema in presenza di rumore

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ev(t) \\ y(t) &= Cx(t) - w(t) \end{aligned}$$

dove  $v(t)$  e  $w(t)$  sono rumori o disturbi non noti. Se consideriamo l'osservatore standard

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

otteniamo che l'equazione dell'errore, definito come  $e = \hat{x} - x$ , risulta essere

$$\dot{e}(t) = [A - LC]e(t) - Lw(t) - Ev(t) \quad (8.12)$$

$$\eta(t) = e(t) \quad (8.13)$$

Si può notare che (8.12)–(8.13) è il sistema duale di (8.8)–(8.10), quindi la sua matrice delle risposte impulsive è la matrice trasposta della matrice delle risposte impulsive di (8.12)–(8.13). Come abbiamo visto  $tr[M^T M] = tr[MM^T]$ . Quindi per minimizzare

$$J_{tr} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} tr[W(t)W(t)^T] dt$$

possiamo avvalerci della dualità sostituendo  $K$  con  $-L^T$ ,  $H$  con  $-E^T$  e sostituendo  $B$  con  $C^T$ . Trasponendo 8.11, otteniamo così l'equazione di Riccati duale

$$PA^T + AP - PC^T CP + EE^T = 0 \quad (8.14)$$

e il guadagno del filtro ottimo

$$L = PC^T.$$

<sup>1</sup>la traccia è la somma degli elementi diagonali  $tr[S] = \sum S_{ii}$

## Capitolo 9

# Esempi di sistemi dinamici

### 9.1 Macchina elettrica in corrente continua

Si osservi la figura (9.1). In essa è rappresentato lo schema di una macchina elettrica in corrente

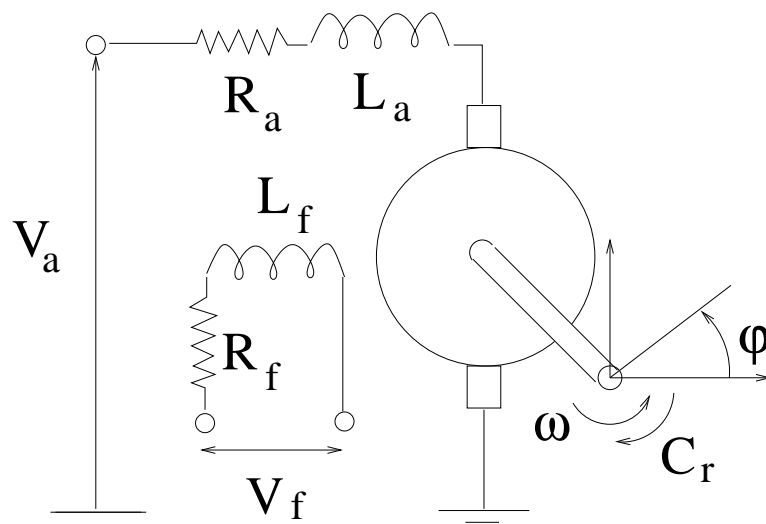


Figura 9.1: Modello generale di un motore elettrico

continua, per la quale sono possibili due regimi di funzionamento:

- se si fornisce potenza meccanica, si può ricavare potenza elettrica (la macchina funziona da generatore);
- se si fornisce potenza elettrica, si può ricavare potenza meccanica (la macchina funziona da motore).

La corrente che passa nel circuito d'armatura ed entra nel collettore del rotore della macchina interagisce con il flusso del circuito di interazione e crea una coppia. Le equazioni del circuito in esame sono:

$$L_f \dot{i}_f(t) = -R_f i_f(t) + v_f(t) \quad (9.1)$$

per quanto riguarda il circuito di eccitazione;

$$L_a \dot{i}_a(t) = -R_a i_a(t) - k i_e(t) \omega(t) + v_a(t) \quad (9.2)$$

per quanto riguarda il circuito di armatura; il termine  $k i_e(t) \omega(t)$  è una forza elettromotrice indotta. Ci sono poi due equazioni di tipo meccanico:

$$\begin{aligned} J \dot{\omega}(t) &= k i_e(t) i_a(t) - f \omega(t) - C_r(t) \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \end{aligned} \quad (9.3)$$

dove  $k i_e(t) i_a(t)$  è la coppia prodotta dalla macchina,  $f \omega(t)$  è una coppia viscosa,  $C_r(t)$  è una coppia dovuta al carico. Il sistema, caratterizzato da equazioni esatte della fisica meccanica e da alcune derivanti dal modello stesso, non è di tipo lineare. Possiamo assumere, come ingressi e variabili di stato, i seguenti vettori:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_e(t) \\ v_a(t) \\ C_r(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad x(t) = \begin{bmatrix} i_e(t) \\ i_a(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4 \quad (9.4)$$

Per quanto riguarda l'uscita del sistema, essa dipende dal problema in esame anche in base ai sensori utilizzati. Tipicamente, per sistemi di controllo si può prendere come uscita il seguente vettore:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

E' necessario ora decidere come interfacciare la macchina ed il circuito di eccitazione con l'esterno. Ci sono tre possibili collegamenti:

- parallelo (figura (9.2)): in tal caso risulta  $v_e = v_a$ , e gli ingressi pertanto si riducono a due;

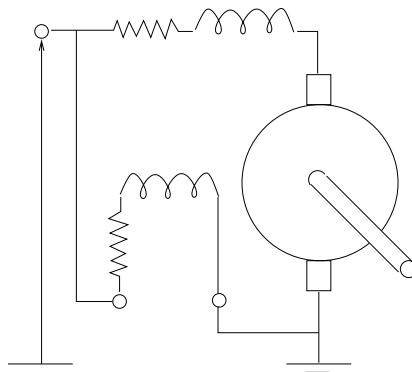


Figura 9.2: Collegamento di tipo parallelo

- serie (figura(9.3)): in tal caso  $i_e(t) = i_a(t)$ ;

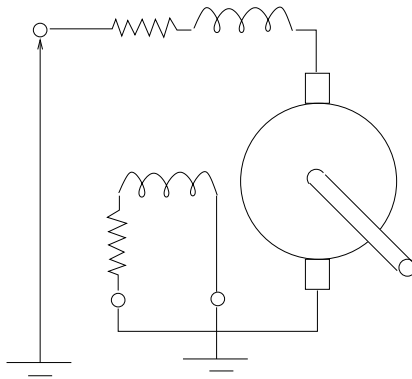


Figura 9.3: Collegamento di tipo serie

- collegamento indipendente (figura (9.4)): in quest'ultimo caso, si pone  $v_e(t) = \bar{v}_e$  costante, ed il sistema diventa di tipo lineare.

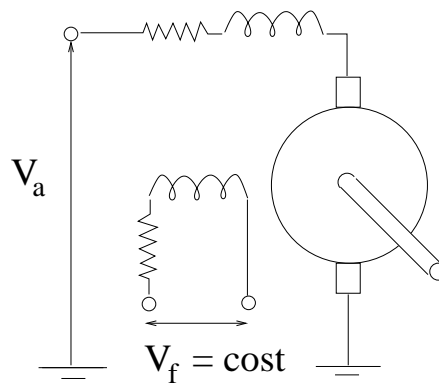


Figura 9.4: Collegamento di tipo indipendente

Infatti, l'equazione del circuito di eccitazione risulta slegata dalle altre, pari a:

$$\dot{i}_e = \frac{R_e}{L_e} i_e(t) + \frac{\bar{v}_e}{L_e} \quad (9.6)$$

con un valore di regime  $\bar{i}_e = \frac{\bar{v}_e}{R_e}$ .

Assumendo pertanto che il transitorio per la corrente di eccitazione sia esaurito, e che questa si sia dunque portata al suo valore di regime, le restanti equazioni risultano:

$$\begin{aligned} \dot{i}_a(t) &= \frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{k\bar{i}_e}{L_a} \omega(t) + \frac{v_a(t)}{L_a} \\ \dot{\omega}(t) &= \frac{k\bar{i}_e}{J} i_a(t) - \frac{f}{J} \omega(t) - \frac{C_r(t)}{J} \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \end{aligned} \quad (9.7)$$

con le medesime uscite scelte in precedenza. E' possibile scrivere il sistema in forma matriciale, nel seguente modo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ C_r(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

per quanto riguarda i vettori;

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k\bar{i}_e}{L_a} & 0 \\ \frac{k\bar{i}_e}{J} & -\frac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ C_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

per quanto riguarda le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Scritto in forma semplificata, il sistema risulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \gamma & -\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

Si vogliono ora trovare i modi del sistema. A questo proposito, si cercano gli autovalori della matrice  $A$ :

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s + \alpha & +\beta & 0 \\ -\gamma & s + \delta & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = s[(s + \alpha)(s + \delta) + \beta\gamma]$$

Una radice del polinomio caratteristico è già presente, ed è  $s = 0$ ; gli altri due autovalori, per macchine di questo tipo, sono di solito reali e negativi, ma dipendono ovviamente dal tipo di carico e dai parametri utilizzati. I modi del sistema sono dunque del tipo  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ , 1 dove l'ultimo modo (dovuto ad  $s = 0$ ) è sempre presente per qualsiasi valore dei parametri, ed è associato al fatto che una macchina ferma con un angolo iniziale non nullo in ingresso rimane ferma in tale posizione. La funzione di trasferimento risulta:

$$W(s) = \frac{\begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) \end{bmatrix}}{s[(s + \alpha)(s + \delta) + \beta\gamma]} \quad (9.11)$$

dove il numeratore deve essere calcolato in base ai minori complementari di  $(sI - A)$ , secondo la formula  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$ . C'è tuttavia un modo più semplice per calcolare ogni singolo elemento al numeratore della matrice, che permette di evitare il calcolo dell'inversa (operazione

solitamente sconveniente). La formula è la seguente:

$$n_{ij}(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B_j \\ C_i & D_{ij} \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

dove  $C_i$  è la  $i$ -esima riga della matrice  $C$ , e  $B_j$  è la  $j$ -esima colonna della matrice  $B$ . Per esempio, ponendo  $u_2 \equiv 0$  (nessuna coppia resistiva esterna) possiamo calcolare  $y_1(s) = W_{11}(s) u_1(s)$ , in cui:

$$n_{11}(s) = \det \begin{bmatrix} s + \alpha & +\beta & 0 & -\varepsilon \\ -\gamma & s + \delta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon\gamma \quad (9.13)$$

Il calcolo degli altri elementi  $n_{ij}$  avviene in maniera analoga. La teoria fondata sullo studio della funzione di trasferimento è senz'altro potente e conserva le informazioni sulla risposta libera al denominatore della matrice  $W(s)$ ; tuttavia essa è di difficile applicazione nel caso di sistemi con più ingressi e più uscite, per i quali è più conveniente uno studio basato sulla rappresentazione in termini di stato.

## 9.2 Il braccio di un robot antropomorfo

Si consideri la figura (9.5), rappresentante due schemi semplificati del braccio di un robot antropomorfo.

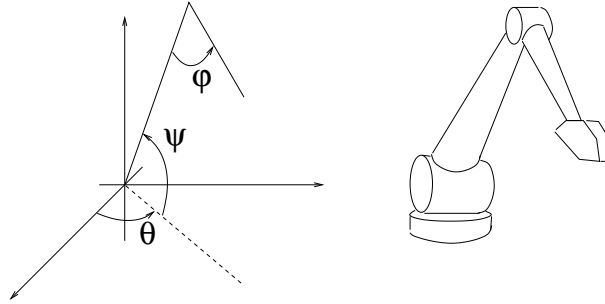


Figura 9.5: Schemi di un braccio di robot antropomorfo

La scrittura delle equazioni di un sistema di questo tipo, con tre gradi di libertà, non è semplice. Si dimostra comunque che è possibile giungere ad equazioni del tipo:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + H(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + K(q(t)) = \tau(t) \quad (9.14)$$

dove  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t)$  sono rispettivamente gli angoli, le velocità angolari, le accelerazioni angolari del sistema in esame. Ponendo l'ipotesi che  $M(q(t))$  sia una matrice non singolare e quindi invertibile, si sceglie come legge di controllo la seguente espressione:

$$\tau(t) = H(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + K(q(t)) + M(q(t))u(t) \quad (9.15)$$

dove  $u$  è un nuovo segnale di controllo. Si noti che per implementare tale controllo vi è la necessità di sensori in grado di rilevare gli angoli e le velocità angolari. Sostituendo nelle equazioni iniziali si perviene a:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) = M(q(t))u(t) \Rightarrow M(q(t))[\ddot{q}(t) - u(t)] = 0 \quad (9.16)$$

Siccome è stato supposto che  $M(q(t))$  sia non singolare, questo ci porta a dire che:

$$\ddot{q}(t) = u(t) \quad (9.17)$$

Il sistema risultante (indicato dal rettangolo tratteggiato nella figura 9.6) è lineare e può essere controllato con una delle numerose tecniche disponibili. Dunque, attraverso una **cancellazione delle non linearità** e attraverso una successiva **retroazione lineare** si può giungere ad una efficace azione di controllo del robot.

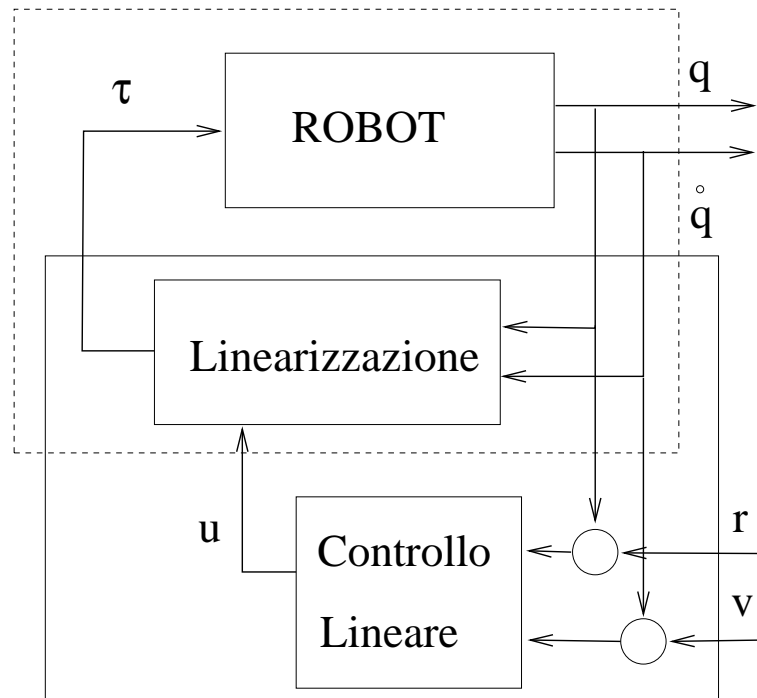


Figura 9.6: Schema del controllo di un braccio di robot antropomorfo.  $r$  e  $v$  sono i riferimenti di posizione e velocità

In altre parole, la scelta della legge di controllo ha portato ad  $m$  equazioni disaccoppiate ( $m$  è il numero di angoli considerati) di tipo lineare, secondo le quali è possibile agire sugli angoli del braccio direttamente con gli ingressi del sistema. In generale, la rappresentazione di stato è la seguente:

$$q(t) \in \mathbf{R}^m, \quad u(t) \in \mathbf{R}^m, \quad x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u(t)$$



dove  $I \in \mathbf{R}^m$  è la matrice identica. Se il sistema ha dei sensori di posizione (encoder), è usuale prendere come uscita gli angoli  $q(t)$ , per cui:

$$y(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

Se, invece, sono anche presenti misuratori di velocità, si può scegliere come uscita

$$y(t) = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

cioè  $y(t) = x(t)$ . Come si è già visto, è possibile risparmiare i sensori di velocità perché si può risalire alla velocità angolare dalla sola misura degli angoli.

### 9.3 Il pagamento di un mutuo

Anche fenomeni di tipo economico possono essere studiati con la teoria dei sistemi dinamici. Si supponga ad esempio che lo stato di un conto corrente possa essere descritto dalla seguente equazione:

$$x(k+1) = x(k) + r(k) + i x(k) \quad (9.18)$$

dove  $x(k)$  rappresenta il saldo del conto corrente,  $r(k)$  ciò che si versa o si preleva dal conto stesso, ed  $i$  la percentuale di interesse sullo stato del conto corrente (da cui ha origine un contributo di denaro positivo nel caso di saldo positivo, e negativo in caso contrario). Il sistema è di tipo discreto, cioè gli istanti  $k$  sono discretizzati (un giorno, un mese, ecc.), e l'ipotesi di fondo è che i versamenti o i prelievi  $r(k)$  avvengano solamente in tali istanti. Risistemando l'equazione sopra riportata, si ottiene:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) + r(k) \quad \Rightarrow \quad x(k+1) = \alpha x(k) + r(k) \quad (9.19)$$

Secondo le formule ricavate nei paragrafi precedenti, considerando  $r(k)$  come ingresso del sistema, l'evoluzione del saldo del conto corrente risulta:

$$x(k) = \alpha^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} \alpha^{k-h-1} r(h) \quad (9.20)$$

Supponiamo ora che nel conto corrente sia presente il saldo negativo di un mutuo da restituire (lo indicheremo con  $-C$ ) in un tempo prefissato  $N$ , attraverso il pagamento di una rata costante  $\bar{r}$ . Ciò che si vuole sapere è l'importo della rata costante affinché il debito sia estinto con l'ultimo pagamento al tempo  $N$ .

A tal fine, è sufficiente porre  $x(0) = -C$  come condizione iniziale, e considerare che all'istante  $k = N$  si ha  $x(k+1) = 0$ :

$$0 = \alpha^N (-C) + \sum_{h=0}^{N-1} \alpha^{N-h-1} \bar{r} \quad (9.21)$$

Dato che la sommatoria è la classica serie geometrica  $\sum_{i=0}^n \alpha^i = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$ , si ottiene:

$$\bar{r} = \frac{\alpha^N(\alpha - 1)}{\alpha^N - 1} C = \frac{(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} i C \quad (9.22)$$

Si osserva una cosa interessante se si calcola la rata costante in base alla generica evoluzione del saldo del conto corrente:

$$\bar{r} = -i x(k) + [x(k+1) - x(k)] \quad (9.23)$$

Infatti, le prime rate ( $k$  prossimo a zero) il termine  $-i x(k) > 0$  è grande, e quindi, dovendo essere costante la rata, il secondo termine deve risultare per forza piccolo. La situazione si inverte in prossimità della fine del prestito ( $k$  prossimo a  $N$ ); si può dunque concludere che, nel caso di rata costante, si restituisce più interesse che capitale durante i primi pagamenti, e più capitale che interesse negli ultimi.

## 9.4 Sistemi vibranti

Si consideri la figura (9.7), che riporta lo schema semplificato di un edificio sotto azione sismica.

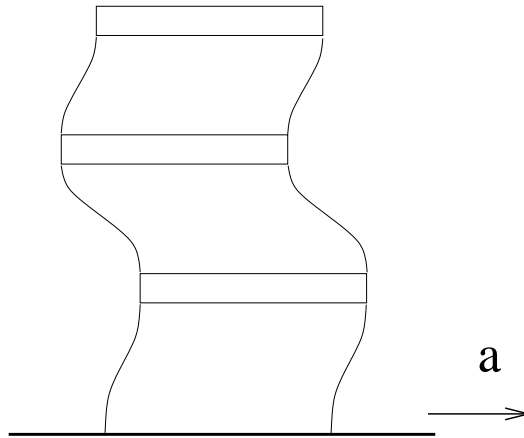


Figura 9.7: Edificio sotto azione sismica

$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  rappresentano gli spostamenti relativi dei piani rispetto alla verticale; le masse  $m_1, m_2, m_3$  si suppongono concentrate sui piani stessi. Questo sistema è governato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vartheta}_1(t) = -k_1 \vartheta_1(t) - k_{12} (\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)) - m_1 a(t) \\ m_2 \ddot{\vartheta}_2(t) = -k_{12} (\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)) - k_{23} (\vartheta_2(t) - \vartheta_3(t)) - m_2 a(t) \\ m_3 \ddot{\vartheta}_3(t) = -k_{23} (\vartheta_3(t) - \vartheta_2(t)) - m_3 a(t) \end{cases} \quad (9.24)$$

Il termine  $k_1 \vartheta_1$  rappresenta la forza di richiamo esercitata dal basso sul primo piano, mentre i termini  $\pm k_{ij} (\vartheta_i - \vartheta_j(t))$  sono forze di richiamo relative esercitate tra un piano e l'altro. I termini  $m_i a(t)$ , invece, sono forzanti dovute alla forza apparente, originata dallo spostamento del sistema solidale al terreno a causa del sisma ( $a(t)$  è l'accelerazione del terreno).

Questo sistema può essere scritto nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}(t) = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_{12}) & k_{12} & 0 \\ k_{12} & -(k_{12} + k_{23}) & k_{23} \\ 0 & k_{23} & -k_{23} \end{bmatrix} \vartheta(t) + \begin{bmatrix} -m_1 \\ -m_2 \\ -m_3 \end{bmatrix} a(t) \quad (9.25)$$

In generale, un sistema vibrante può essere scritto nella seguente forma:

$$M\ddot{\vartheta}(t) = -K\vartheta(t) + Ru(t) \quad (9.26)$$

dove la matrice  $M$  è sempre definita positiva (infatti, l'energia cinetica è  $E_c = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^T(t)M\dot{\vartheta}(t) > 0$  se il sistema è in movimento) e la matrice  $K$  è semidefinita positiva (perché l'energia potenziale  $E_p = \frac{1}{2}\vartheta^T(t)K\vartheta(t) \geq 0$ ). Nel caso particolare dell'edificio sotto azione sismica, si può dimostrare che anche la matrice  $K$  risulta definita positiva.

Per ottenere una valida rappresentazione di stato che permetta lo studio del sistema, è necessario premoltiplicare l'equazione precedente per  $M^{-1}$ . Si ottiene:

$$\ddot{\vartheta}(t) = -M^{-1}K\vartheta(t) + M^{-1}Ru(t) \quad (9.27)$$

Scelto come vettore di stato  $x(t) = \begin{bmatrix} \vartheta(t) & \dot{\vartheta}(t) \end{bmatrix}^T$  si ha:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vartheta(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}R \end{bmatrix} u(t) \quad (9.28)$$

Posto  $S = M^{-1}K$ , dunque, si ottiene che la matrice  $A$  è del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -S & 0 \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

Calcolando i modi del sistema, si ha:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & I \\ -S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

da cui, sviluppando la prima equazione del sistema,  $I\bar{x}_2 = \lambda\bar{x}_1$ . Questo ci dice che il generico autovettore associato alla matrice  $A$  è del tipo  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \lambda\bar{x}_1 \end{bmatrix}^T$ . Sfruttando ora la seconda equazione del sistema, si ottiene:

$$-S\bar{x}_1 = \lambda\bar{x}_2 = \lambda(\lambda\bar{x}_1) \Rightarrow S\bar{x}_1 = -\lambda^2\bar{x}_1 \quad (9.31)$$

Si può dimostrare che esiste sempre una trasformazione tale da rendere  $S$  simmetrica e semidefinita positiva. Detti allora  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2$  gli autovalori associati ad  $A$  (tutti maggiori o uguali a

zero), si ha:

$$\omega_k^2 = -\lambda_k^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = -j\omega_k \quad (9.32)$$

Questo significa che il sistema vibrante presenta in generale dei modi oscillanti del tipo  $\sin(\omega_k t)$  e  $\cos(\omega_k t)$  non smorzati; le pulsazioni  $\omega_k$  sono dette **pulsazioni di risonanza del sistema**.

Supponiamo ora di considerare solo la risposta libera del sistema costituito dall'edificio (cioè si pone  $u(t) = 0$ ); l'uscita  $\vartheta_3(t)$  ha allora la seguente espressione generale:

$$\vartheta_3(t) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \alpha_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

in cui i termini  $\alpha_i$  e  $\varphi_i$  sono determinati dalle condizioni iniziali del sistema. Ipotizziamo anche di imporre la condizione iniziale  $\dot{\vartheta}(0) = 0$  e  $\vartheta(0) = \bar{\vartheta}_1$ , dove  $\bar{\vartheta}_1$  è un autovettore della matrice  $S$ . Si verifica facilmente che l'uscita del sistema è pari a  $\vartheta(t) = \bar{\vartheta}_1 \cos(\omega_1 t)$ , perché l'equazione che governa la risposta libera del sistema edificio è la seguente:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}(t) &= -S \vartheta(t) \\ \Rightarrow -\omega_1^2 \bar{\vartheta}_1 \cos(\omega_1 t) &= -S \bar{\vartheta}_1 \cos(\omega_1 t) \\ \Rightarrow S \bar{\vartheta}_1 &= \omega_1^2 \bar{\vartheta}_1 \end{aligned}$$

che è proprio verificata da  $\bar{\vartheta}_1$  autovettore di  $S$ . Questo significa che, sistemando ipoteticamente l'edificio secondo gli spostamenti indicati dall'autovettore e ponendo  $\dot{\vartheta}(0) = 0$ , una volta rilasciato il sistema comincia ad oscillare permanentemente in risposta libera, senza bisogno di alcun ingresso. In particolare, esso evidenzia una componente armonica con pulsazione data dalla pulsazione di risonanza associata all'autovettore di  $S$  scelto per le condizioni iniziali.

## 9.5 Circuiti elettrici

Una classe importante di circuiti lineari è quella rappresentata dai circuiti elettrici, in cui sono considerati solo componenti resistive, induttive, capacitive e vengono escluse mutue induttanze e capacità parziali.

Possiamo infatti concepire ogni componente alla luce della teoria esposta in precedenza. Le resistenze, per esempio, possono essere considerate sistemi lineari particolari in cui non si hanno variabili di stato, con una relazione ingresso-uscita data dalla legge di Ohm:

$$v(t) = Ri(t) \quad (9.33)$$

Le induttanze sono componenti in cui la variabile di stato è la corrente che vi scorre; la legge di bipolo corrispondente è la seguente:

$$L\dot{i}(t) = v(t) \quad (9.34)$$

I condensatori, infine, sono componenti in cui la variabile di stato è la tensione ai capi del condensatore stesso. La legge di bipolo è:

$$i(t) = C\dot{v}(t) \quad (9.35)$$

Utilizzando le leggi di bipolo sopra riportate ed applicando le leggi di Kirchoff, è possibile modellare secondo una rappresentazione di stato qualsiasi circuito lineare; gli ingressi di questi sistemi lineari sono i generatori ideali di corrente o di tensione collegati in qualche punto del circuito stesso. Si consideri, come esempio, la figura (9.8).

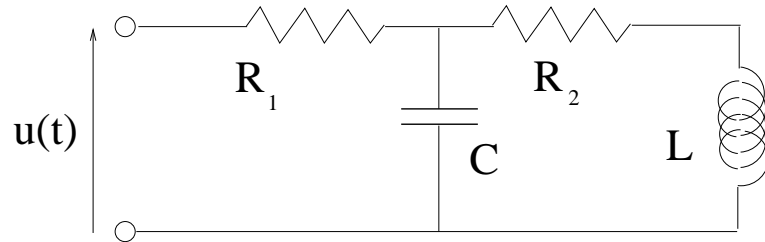


Figura 9.8: Esempio di circuito lineare

Applicando le leggi di Kirchoff alle maglie, si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\begin{aligned} v &= R_1 i_1 + v_C \\ v_C &= R_2 i_L + L \dot{i}_L \end{aligned} \quad (9.36)$$

mentre applicando al nodo centrale del circuito la legge di Kirchoff ai nodi, si ha:

$$i_1 = i_L + i_C = i_L + C \dot{v}_C \quad (9.37)$$

dove abbiamo assunto che  $i_1$  sia entrante, mentre  $i_L$  e  $i_C$  siano uscenti. Sostituendo ad  $i_1$  l'espressione appena trovata, e ponendo in forma canonica le equazioni differenziali del primo ordine si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{v}_C = -\frac{1}{R_1 C} v_C - \frac{1}{L} i_L + \frac{1}{R_1 C} v \\ \dot{i}_L = \frac{1}{L} v_C - \frac{R_2}{L} i_L \end{cases} \quad (9.38)$$

Posto  $u(t) = v(t)$ ,  $x_1(t) = v_C(t)$ ,  $x_2(t) = i_L(t)$ , il sistema si presenta nella seguente forma matriciale:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (9.39)$$

L'uscita del sistema può essere scelta ad arbitrio. Per esempio, se volessimo in uscita  $i_1(t)$ , si avrebbe:

$$y = i_L + C \dot{v}_C = i_L + C \left( -\frac{1}{R_1 C} v_C - \frac{1}{L} i_L + \frac{1}{R_1 C} v \right) = -\frac{1}{R_1} v_C + \frac{1}{R_1} v \quad (9.40)$$

Si osservi come l'equazione per l'uscita sia stata elaborata in modo da presentare una dipendenza dalle variabili di stato, e non dalle derivate delle variabili di stato stesse. In forma matriciale, si ha:

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} v(t) \quad (9.41)$$

Si può facilmente calcolare il polinomio caratteristico della matrice  $A$  del sistema. Si ha infatti:

$$\det(sI - A) = s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right) s + \frac{1}{LC} \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \quad (9.42)$$

Si osservi come il termine che moltiplica  $s$  sia la traccia di  $-A$ , mentre il termine che moltiplica  $s^0$  è il determinante di  $A$ . Le radici di questo polinomio sono negative, perché ogni valore di resistenza, capacità ed induttanza è positivo per ragioni fisiche; d'altra parte questo è un risultato che ci si doveva aspettare, in quanto un circuito passivo non può che essere stabile.

Lo studio del circuito può avvenire anche utilizzando la trasformata di Laplace. Ponendo  $x(0) = 0$  per semplicità, si ha che le leggi di bipolo precedenti diventano:

- per le resistenze:  $v(s) = Ri(s)$ ;
- per le induttanze:  $v(s) = sLi(s)$ ;
- per i condensatori:  $i(s) = sCv(s)$ .

Si osservi che nel caso particolare in cui  $s = j\omega$  si ottengono le relazioni dei bipoli in regime sinusoidale, secondo quanto visto in Elettrotecnica.

Queste relazioni, divenute lineari nel dominio della trasformata di Laplace, possono essere utilizzate in tutto e per tutto come impedenze generalizzate su cui operare i noti calcoli di serie-parallelo fra componenti. Nel caso del circuito in esame, l'intera rete passiva può essere considerata con un'impedenza equivalente con questa espressione:

$$Z(s) = R_1 + \frac{1}{sC} \parallel (R_2 + sL) = R_1 + \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2 + sL}} \quad (9.43)$$

Per la scelta dell'uscita operata in precedenza, è facilmente verificabile che l'impedenza equivalente così calcolata rappresenta l'inversa della funzione di trasferimento  $W(s) = C(sI - A) - 1B = Z^{-1}(s)$ .

La rappresentazione in termini di stato è certamente poco conveniente per circuiti delle dimensioni qui considerate, per i quali i calcoli possono essere svolti velocemente utilizzando le trasformate di Laplace. Tuttavia, per circuiti più complessi la forma di stato può essere molto conveniente, perché facilmente implementabile al calcolatore.

## 9.6 Amplificatori operazionali

Gli amplificatori operazionali sono componenti elettronici il cui schema e circuito equivalente è riportato in figura (9.9).

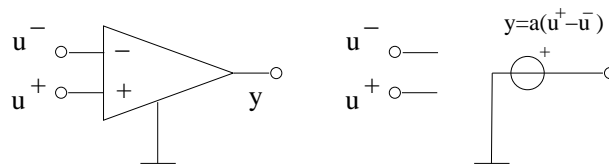


Figura 9.9: Amplificatore operazionale

Il fattore  $a$  è un coefficiente molto grande, idealmente tendente all'infinito. Questo componente elettronico può essere utilizzato in retroazione, come per esempio nello schema circuitale riportato in figura (9.10).

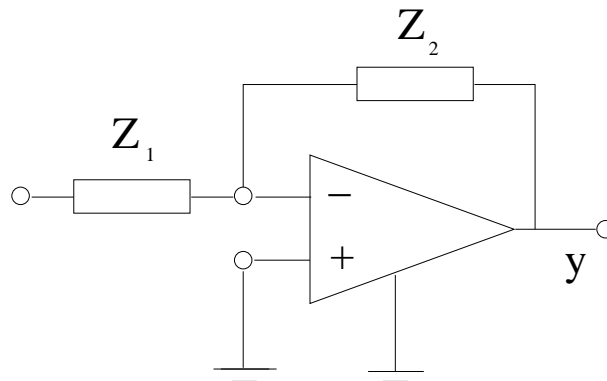


Figura 9.10: Amplificatore retroazionato in configurazione invertente

Supponendo che  $Z_1 = R_1$  e  $Z_2 = R_2$  (cioè impedenze puramente reali), l'equazione al nodo di ingresso al morsetto negativo risulta:

$$\frac{y - u^-}{R_2} + \frac{u - u^-}{R_1} = 0 \quad (9.44)$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$u^- \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{y}{R_2} + \frac{u}{R_1} \quad (9.45)$$

Dato che  $u(t) = -\frac{y(t)}{a}$ , e che  $a \rightarrow +\infty$ , si ha  $u(t) \rightarrow 0$  da cui:

$$y(t) = -\frac{R_2}{R_1} u(t) \quad (9.46)$$

Si nota dunque che l'amplificatore operazionale permette di operare un'amplificazione invertente con guadagno variabile, dipendente dalle sole resistenze esterne e non dallo schema circuitale interno dell'operazionale stesso.

Se si rimane nell'ambito del calcolo simbolico, e si utilizzano delle impedenze generiche, la configurazione precedente dell'amplificatore operazionale ritorna:

$$y(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} u(s) \quad (9.47)$$

Supponendo, per esempio,  $Z_1 = R$  e  $Z_2 = \frac{1}{sC}$ , cioè utilizzando una resistenza ed un condensatore, si ottiene:

$$y(s) = -\frac{1}{sCR} u(s) \quad (9.48)$$

che, a meno di un fattore moltiplicativo, è la funzione di trasferimento di un blocco integratore. Analogamente, ponendo  $Z_1 = \frac{1}{sC}$  e  $Z_2 = R$ , è facile osservare che si ottiene la funzione di trasferimento di un blocco derivatore.

Un'altra interessante configurazione per un amplificatore operazionale è riportata in figura (9.11).

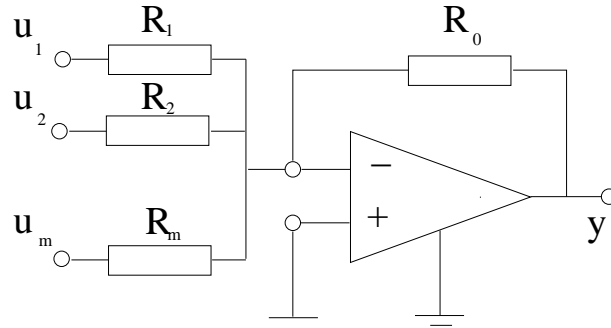


Figura 9.11: Amplificatore retroazionato sommatore

L'equazione al nodo di  $u^-$  risulta:

$$\frac{u_1 - u^-}{R_1} + \frac{u_2 - u^-}{R_2} + \dots + \frac{u_m - u^-}{R_m} + \frac{y - u^-}{R_0} = 0 \quad (9.49)$$

da cui, posto  $u^+ = 0$  e  $u = -\frac{y}{a} \approx 0$ , si ricava facilmente:

$$y = - \sum_{i=1}^m \frac{R_0}{R_i} u_i \quad (9.50)$$

Si osserva dunque che si è realizzato un circuito sommatore, in grado di restituire una combinazione lineare degli ingressi. Il segno meno non è veramente un problema, perché è sufficiente posporre all'operazionale od anteporre ad ogni ingresso uno stadio invertente.

Esiste anche un'ulteriore configurazione dell'amplificatore operazionale, in grado di realizzare un'amplificazione di tipo non invertente. Questi componenti, dunque, possono essere utilizzati per realizzare in analogico dei blocchi amplificatori, integratori, derivatori e sommatore, praticamente tutto ciò di cui si ha bisogno per implementare controllori in retroazione.

## 9.7 Sistema a due vasche

Si consideri la figura (9.12), che rappresenta un sistema costituito da due vasche collegate fra loro più una vasca di raccolta in basso.

Le equazioni geometriche che descrivono la portata volumetriche ed il volume sono:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= q_0 - q_1 \\ \dot{v}_2 &= q_1 - q_2 \\ v_1 &= (h_1 - h_{10})S_1 \\ v_2 &= (h_2 - h_{20})S_2 \end{aligned}$$





Figura 9.12: Sistema costituito da più vasche

dove  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  sono le portate in ingresso, di collegamento fra prima e seconda vasca, di uscita dalla seconda vasca. Dalla fluidodinamica è possibile inoltre ricavare le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= \alpha^2 q_1^2 \\ h_2 &= \beta^2 q_2^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{h_1 - h_2} \\ q_2 &= \frac{1}{\beta} \sqrt{h_2} \end{aligned}$$

Quindi, dato che si ha anche  $\dot{v}_1 = S_1 \dot{h}_1$  e  $\dot{v}_2 = S_2 \dot{h}_2$ , le equazioni di stato che descrivono il sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = \frac{q_0}{S_1} - \frac{1}{\alpha S_1} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \\ \dot{h}_2(t) = \frac{1}{\alpha S_2} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \frac{1}{\beta S_2} \sqrt{h_2(t)} \end{cases}$$

ed è dunque un sistema non lineare. Per studiare la statica del problema, è sufficiente cercare i punti di equilibrio e porre  $\dot{h}_1(t) = 0$  e  $\dot{h}_2(t) = 0$ , che significa anche porre in equilibrio la portata

in ingresso con quella in uscita in ogni vasca:

$$\begin{cases} 0 = \frac{q_0}{S_1} - \frac{1}{\alpha S_1} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \\ 0 = \frac{1}{\alpha S_2} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \frac{1}{\beta S_2} \sqrt{h_2(t)} \end{cases}$$

Svolgendo questi semplici conti, si ricava che:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= S_1^2 (\alpha^2 + \beta^2) \bar{u}^2 \\ \bar{h}_2 &= S_1^2 \beta^2 \bar{u}^2 \end{aligned}$$

dove  $\bar{u} = \bar{q}_0 S_1$ . Si osserva che  $\bar{h}_1 > \bar{h}_2$  perché  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti positive. In effetti, il modello proposto è valido per  $h_1(t) > h_2(t)$ ; se si volesse studiare anche la possibilità di avere (per esempio, durante un transitorio)  $h_2(t) > h_1(t)$ , il modello andrebbe modificato in questo modo:

$$\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \implies \text{sign}(h_1(t) - h_2(t)) \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}$$

In ogni modo, le coppie di equilibrio  $(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$  sono una retta nel piano  $\bar{h}_1 - \bar{h}_2$ .

Questo modello è una semplificazione della realtà, in primo luogo perché bisogna già decidere sul significato di  $h(t)$ , valore restituito da un galleggiante. Inoltre, la portata che costituisce l'ingresso del sistema è pensata come continua, ma in realtà essa può essere quantizzata (come nel caso di un rubinetto aperto o chiuso). Tuttavia, quest'ultima considerazione non costituisce un vero e proprio problema, perché si può utilizzare la tecnica della segmentazione, come qualitativamente riportato in figura (9.13).

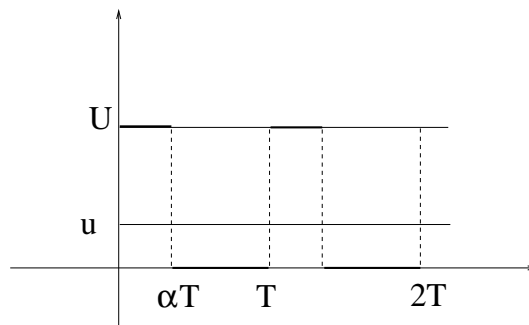


Figura 9.13: Esempio di segmentazione

Per ottenere infatti la portata voluta, si pone  $U\alpha T = uT$  dove  $T$  è il passo di campionamento del sistema; si ottiene allora  $\alpha = \frac{u}{U}$ . Questa tecnica permette dunque di ottenere un ingresso quantizzato con lo stesso valor medio di quello continuo desiderato, e funziona bene perché, denotando l'ingresso come  $v(t) = u(t) + \omega(t)$  dove  $\omega(t)$  è l'errore periodico di periodo  $T$ , si verifica immediatamente che  $\omega(t)$  ha frequenze superiori a quelle di funzionamento del sistema, se il passo di campionamento è sufficientemente piccolo.

## 9.8 Levitatore magnetico

Si consideri il levitatore magnetico, riportato in figura (9.14). Esso è descritto da un'equazione del tipo:

$$m\ddot{y}(t) = mg - f(t)$$

dove  $f(t)$  è la forza di richiamo, in prima approssimazione ed in un certo range uguale a:

$$f(t) = k \frac{i^2}{y^2}$$

Risulta pertanto:

$$\ddot{y}(t) = g - \frac{k}{m} \frac{i^2}{y^2}$$

Se introduciamo anche l'equazione elettrica del magnete, pilotato dalla tensione  $V$  abbiamo che le equazioni che descrivono il sistema sono:

$$\begin{aligned} L\dot{i}(t) &= -Ri(t) + V(t) \\ m\ddot{y}(t) &= mg - k \frac{i^2(t)}{y^2(t)} \end{aligned}$$

Introdotti  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  e  $x_3 = i$ , si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = g - \frac{k}{m} \frac{x_3^2(t)}{x_1^2(t)} \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{cases}$$

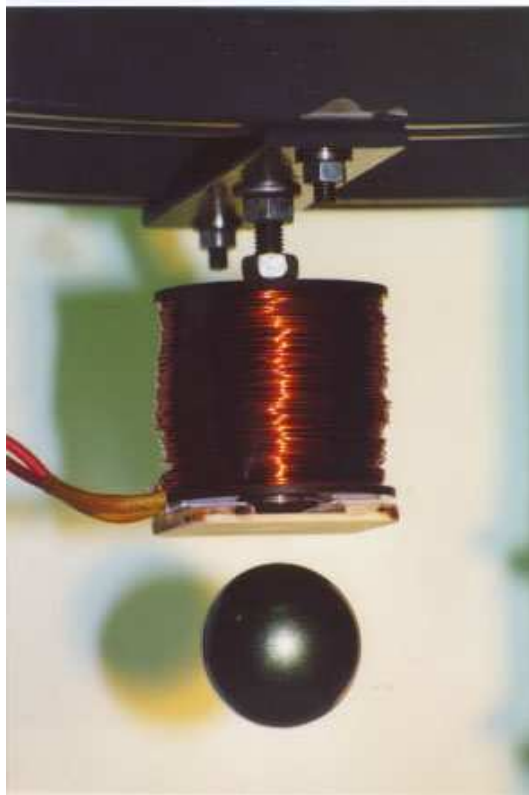


Figura 9.14: Il levitatore magnetico

# Appendice A

## Richiami di matematica

In questa sezione si richiameranno brevemente i concetti fondamentali di matematica necessari per lo studio dei sistemi dinamici. In particolare saranno riportate le nozioni relative all'algebra vettoriale utili alla formalizzazione di concetti importanti.

### A.1 Algebra lineare

In questa sezione si richiameranno brevemente i concetti fondamentali di algebra lineare necessari per la comprensione.

#### A.1.1 Spazi vettoriali

Uno spazio vettoriale  $X$  su un corpo numerico  $C$  è un insieme avente le seguenti proprietà

1. Se  $x \in X$  e  $\lambda \in C$  allora  $\lambda x \in X$ .
2. Se  $x_1, x_2 \in X$  allora  $x_1 + x_2 \in X$ .

Noi considereremo esclusivamente spazi vettoriali aventi come corpo  $\mathfrak{R}$ .

**Definizione: Insieme di generatori** Un insieme di vettori  $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$  è detto *insieme di generatori* se qualsiasi elemento  $x \in X$  è scrivibile come combinazione lineare di tali vettori, cioè

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

**Definizione: Insieme di vettori linearmente indipendenti** Un insieme di vettori  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  è detto *linearmente indipendente* se la condizione

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

implica che  $\lambda_i = 0$  per ogni  $i$  (cioè se l'unica loro combinazione lineare che è uguale al vettore nullo è quella avente nulli tutti i coefficienti).

**Definizione: Base** Un insieme di vettori  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  è detto *base* se è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

Una base ha la proprietà che ogni vettore  $x$  è esprimibile in modo unico come

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

cioè i coefficienti  $\lambda_i$  sono univocamente determinati da  $x$ .

Assegnato uno spazio vettoriale  $X$ , una sua base non è univocamente determinata. Ma se una base di  $X$  è formata da  $n$  elementi, ogni altra base è formata da  $n$  elementi. Tale numero è un invariante ed ha una importanza notevole.

**Definizione: Dimensione** Si dice dimensione dello spazio vettoriale  $X$  il numero degli elementi di ogni sua base e si indica con

$$\text{Dim}(X).$$

**Esempio: spazio dei polinomi di ordine 4** Consideriamo lo spazio dei polinomi reali di grado 4 o inferiore ovvero di funzioni del tipo

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4.$$

Si può provare che si tratta di uno spazio vettoriale (farlo per esercizio). Gli elementi

$$1, x, x^2, x^3, x^4$$

formano una base, quindi tale spazio ha dimensione 5.

**Esempio: spazio euclideo** Consideriamo lo spazio dei vettori a 3 componenti reali, del tipo  $x = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ . Si tratta di uno spazio vettoriale (verificarlo per esercizio) di dimensione 3. Infatti una base è

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tale base viene detta base *canonica*.

**Esempio: spazio nullo** L'insieme  $X = \{0\}$ , che contiene il solo vettore nullo è detto *spazio nullo* o *spazio banale* ed ha per definizione dimensione zero.

**Definizione: Sottospazio** Un sottoinsieme  $X_1$  di  $X$  che sia a sua volta uno spazio vettoriale è detto *sottospazio*. Dati due sottospazi  $X_1$  e  $X_2$ , le seguenti operazioni danno origine a sottospazi:

- Intersezione:

$$X_1 \cap X_2 = \{x : x \in X_1, \text{ e } x \in X_2\}$$

- Somma:

$$X_1 + X_2 = \{x = x_1 + x_2, x_1 \in X_1, \text{ e } x_2 \in X_2\}$$

**Definizione: Somma diretta** Due sottospazi si dicono *in somma diretta* se qualsiasi elemento  $x$  appartenente al sottospazio somma è scrivibile come  $x = x_1 + x_2$  dove  $x_1 \in X_1$  e  $x_2 \in X_2$  sono univocamente determinati. Si dimostra che la somma è diretta se e solo se

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}.$$

Quando la somma è diretta si usa la notazione

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

Fissata una base  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , ogni vettore dello spazio vettoriale è scrivibile nella forma

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n,$$

dove le componenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono univocamente determinate. Pertanto esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori  $v$  e le ennuple di numeri  $(x_1, \dots, x_n)$

$$v \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}^n$$

dove  $\mathfrak{K}^n$  è l'insieme delle ennuple reali. Per esempio il polinomio  $3 + 5x + x^4$  è associabile alla ennupla  $(3, 5, 0, 0, 1)$ .

Per questo, senza perdita di generalità noi considereremo lo spazio  $\mathfrak{K}^n$  delle ennuple reali (all'occorrenza  $C^n$ , lo spazio delle ennuple complesse).

### A.1.2 Matrici

Una applicazione lineare dallo spazio  $\mathfrak{K}^n$  allo spazio  $\mathfrak{K}^m$  è rappresentabile da una matrice  $m \times n$ . Essendo  $A$  tale matrice e  $y \in \mathfrak{K}^m$  e  $x \in \mathfrak{K}^n$  si ha

$$y = Ax$$

cioè

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dove i coefficienti  $y_i$  si calcolano come

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

La composizione di due applicazioni lineari rappresentate da matrici  $A$  e  $B$

$$Y \xleftarrow{A} Z \xleftarrow{B} X$$

Figura A.1: Mappe lineari

$$\mathfrak{R}^n \xrightarrow{A} \mathfrak{R}^m \xrightarrow{B} \mathfrak{R}^p$$

è lineare. Se  $y = Ax$  e  $z = By$

$$z = By = B(Ax) = (BA)x = Cx.$$

Se  $B$  ha dimensioni  $(p \times m)$  e  $A$  ha dimensioni  $(m \times n)$ , la matrice  $C$  ha dimensioni  $(p \times n)$  e il suo generico elemento è dato da

$$[C]_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Definizione: Immagine** Dicesi *immagine* di una matrice  $(m \times n)$  l'insieme

$$Ra(A) = \{y = Ax, \quad x \in \mathfrak{R}^n\} \subseteq \mathfrak{R}^m.$$

Tale insieme è un sottospazio di  $\mathfrak{R}^m$ , come è facile verificare.

**Definizione: Nucleo** Dicesi *nucleo* di una matrice  $(m \times n)$  l'insieme

$$Ker(A) = \{x : Ax = 0\} \subseteq \mathfrak{R}^n.$$

Tale insieme è un sottospazio di  $\mathfrak{R}^n$ , come è facile verificare.

### Esempio

Si vuole conoscere almeno un vettore facente parte del nucleo della seguente matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si nota facilmente che se si sottrae la seconda colonna alla prima, si ottiene proprio la terza colonna. Dunque un possibile vettore appartenente al nucleo della matrice  $M$  è pari a:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



**Esempio**

Si vuole calcolare il nucleo della seguente matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si osserva che l'ultima riga è pari alla somma delle prime due, per cui il rango di  $M$  è sicuramente pari a 2. Dato che la dimensione del nucleo di una matrice è in generale pari al numero di colonne meno il rango della matrice, ci si aspetta che  $\dim(\ker(M)) \geq 1$ . Per ottenere una base del sottospazio dei vettori appartenenti al nucleo, è possibile operare una triangolarizzazione di Gauss alla matrice; moltiplicando la prima riga per -1 e per -2 e sommandola rispettivamente alla seconda e terza riga, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

Semplicemente sommando la seconda riga alla terza si giunge infine a:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

Si osserva che la sottomatrice in alto a sinistra è quella che ritorna il rango della matrice, e riguarda le incognite  $x_1$  ed  $x_2$ . Parametizziamo allora le restanti incognite in questo modo: come primo caso, poniamo  $x_3 = 1$  ed  $x_4 = 0$ , ottenendo il seguente vettore:

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e nel secondo caso  $x_3 = 0$  ed  $x_4 = 1$ , ottenendo:

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tali vettori costituiscono una base del nucleo della matrice  $M$ . Se durante la triangolarizzazione ci si fosse imbattuti in un elemento pivot nullo, si sarebbe potuto operare uno scambio di colonna, con l'accortezza di modificare anche l'ordine delle incognite associate a tali colonne.

**Determinante** Se una matrice è quadrata ( $n \times n$ ) è possibile definire una funzione detta

*determinante*. Data la ennupla fondamentale  $(1, 2, \dots, n)$  e una permutazione

$$p = (j_1, j_2, \dots, j_n)$$

si dice che la permutazione ha classe pari = 2 se il numero di scambi di oggetti per arrivare dalla fondamentale è pari, altrimenti si dice di classe dispari = 1. Detto  $P$  l'insieme di permutazioni della fondamentale il determinante è definito come

$$\text{Det}(A) = \sum_{p \in P} (-1)^{\text{cl}(p)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

Si dimostra che vale anche la

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T) = \sum_{p \in P} (-1)^{\text{cl}(p)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}.$$

Valgono le seguenti formule di calcolo del determinante per righe o per colonne. Definiamo come  $\hat{A}_{ij}$  la matrice complementare all'elemento  $(i, j)$  ovvero la sottomatrice quadrata ottenuta da  $A$  sopprimendo la riga  $i$ -esima e la colonna  $j$ -esima. Allora si ha che

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\hat{A}_{ij}), \quad \text{per ogni } i \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\hat{A}_{ij}), \quad \text{per ogni } j \end{aligned}$$

Una matrice quadrata a determinante nullo (non nullo) si dice *singolare* (*non singolare*). Valgono le proprietà notevoli

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Vale poi il seguente fondamentale risultato.

**Teorema della caratteristica** Si considerino i numeri  $\hat{n}$  = il massimo numero di colonne linearmente indipendenti;  $\hat{m}$  = il massimo numero di righe linearmente indipendenti;  $\hat{r}$  = la dimensione della massima sottomatrice quadrata avente determinante non nullo. Allora vale

$$\hat{n} = \hat{m} = \hat{r}.$$

**Definizione: Rango**  $\hat{n} = \hat{m} = \hat{r}$  è detto *rango* della matrice e si indica con

$$\text{Rank}(A).$$

Se la matrice  $m \times n$  ha rango pari al massimo possibile (cioè il minimo tra  $m$  e  $n$ , numero di righe e di colonne) si dice *a rango pieno*. In particolare, una matrice quadrata ha rango pieno solo se il suo determinante è non nullo.

Data la matrice  $A$  ( $m \times n$ ) la matrice trasposta  $A^T$  è la matrice  $n \times m$  i cui elementi sono

$$[A^T]_{ij} = a_{ji}.$$

La trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine contrario

$$(A B C \dots)^T = (\dots C^T B^T A^T).$$

Per una matrice  $m \times n$   $A$  valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} n &= \text{Rank}(A) + \text{Dim}(\text{Ker}(A)) \\ m &= \text{Rank}(A) + \text{Dim}(\text{Ker}(A^T)). \end{aligned}$$

Data una matrice quadrata  $A$  ( $m \times n$ ) e un vettore  $b \in \mathfrak{R}^m$ , consideriamo il sistema di equazioni

$$Ax = b.$$

Tale sistema ha come insieme generale delle soluzioni l'insieme dei vettori

$$\bar{x} + \tilde{x}$$

dove  $\bar{x}$  è una qualunque soluzione e  $\tilde{x} \in \text{Ker}(A)$ .

Data una matrice quadrata  $A$  ( $n \times n$ ) e un vettore  $b \in \mathfrak{R}^n$ , consideriamo il sistema di equazioni

$$Ax = b.$$

Affinché tale sistema ammetta soluzione *unica* deve essere  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ . Quindi  $A$  deve avere rango pieno ovvero deve essere  $\det(A) \neq 0$ .

**Definizione: matrice inversa** Data una matrice quadrata  $A$  tale che  $\det(A) \neq 0$ , dicesi *matrice inversa* di  $A$  la matrice  $B = A^{-1}$ , che rappresenta l'operatore inverso di  $A$  ovvero tale che per ogni  $x$

$$y = Ax, \quad \Rightarrow \quad x = By.$$

La matrice inversa ha la proprietà che

$$AB = BA = I$$

dove  $I$  è la matrice identica. Vale la seguente formula per la determinazione dell'elemento  $B_{ij}$  di  $B = A^{-1}$  (si faccia attenzione all'inversione degli indici delle sottomatrici  $\hat{A}$ )

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(\hat{A}_{ji})}{\det A}.$$

L'inversa del prodotto è il prodotto delle inverse in ordine contrario

$$(A B C \dots)^{-1} = (\dots C^{-1} B^{-1} A^{-1}).$$

**Matrici partizionate** In molte occasioni è necessario considerare matrici di matrici ovvero matrici i cui elementi sono a loro volta matrici o vettori. Per esempio una matrice  $A$  è pensabile come un vettore riga di vettori colonna

$$A = [ \bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_m ]$$

oppure come un vettore colonna di vettori riga

$$B = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}.$$

In generale una matrice può essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

dove  $A_{ij}$  sono sottomatrici. È di particolare interesse la regola del prodotto: date due matrici partizionate

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pm} \end{bmatrix}$$

e assunto che il numero di righe di ogni sottomatrice  $A_{kj}$  corrisponda al numero di colonne della sottomatrice  $B_{ik}$  allora la matrice prodotto

$$C = BA = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & C_{pn} \end{bmatrix}$$

è partizionata e risulta

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik} A_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nella rappresentazione dello spazio  $\mathfrak{R}^n$  noi facciamo implicitamente riferimento alla base canonica. Infatti detto

$$e_k = [ \ 0 \ \dots \ 0 \ \underbrace{1}_{\text{posizione } k\text{-ma}} \ 0 \ \dots \ 0 \ ]^T$$

cioè il vettore avente tutti gli elementi nulli tranne il  $k$ -mo che vale 1, possiamo dire che

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Supponiamo ora di voler riferire il vettore  $x$  ad una nuova base  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Formata la matrice  $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$  abbiamo che

$$x = \sum_{j=1}^n t_j \hat{x}_j = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = T \hat{x},$$

dove  $\hat{x}_j$  sono le componenti rispetto alla nuova base. Tali componenti raccolte nel vettore  $\hat{x}$  sono calcolabili secondo la regola

$$x = T \hat{x} \Rightarrow \hat{x} = T^{-1} x.$$

Data una applicazione lineare  $y = Ax$  i cambiamenti di base  $x = T \hat{x}$  e  $y = S \hat{y}$  portano alla trasformazione

$$\hat{y} = S^{-1} A T \hat{x}$$

Se l'applicazione è da uno spazio in se stesso per cui la trasformazione (rappresentata da una matrice quadrata  $A$ ) è comune ( $x = T \hat{x}$  e  $y = T \hat{y}$ ) abbiamo che la applicazione lineare si trasforma come segue

$$\hat{y} = T^{-1} A T \hat{x} = \hat{A} \hat{x}.$$

In questo caso la trasformazione è detta *trasformazione per similitudine*. Data una potenza di  $\hat{A}^k$  di  $\hat{A}$ , con  $k$  intero positivo, abbiamo che

$$\hat{A}^k = \underbrace{T^{-1} A T \ T^{-1} A T \ \dots \ T^{-1} A T}_{k \text{ volte}} = T^{-1} A^k T.$$

Se  $A$  è invertibile (e allora anche  $\hat{A}$  lo è), la proprietà vale anche per  $k$  negativo.

### A.1.3 Autovalori e autovettori

**Definizione Autovettore e autovalori** Data una matrice quadrata  $A$  se esistono un vettore  $x \neq 0$  e uno scalare  $\lambda$  complesso tali che

$$Ax = \lambda x,$$

$x$  viene detto *autovettore* della matrice  $A$ , mentre  $\lambda$  viene detto *autovalore*.

L'equazione precedente può essere scritta nella forma

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Perché questa equazione abbia soluzione non banale è necessario che la matrice  $(A - \lambda I)$  non abbia

rango pieno ovvero sia singolare il che è equivalente alla condizione

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Tale funzione di  $\lambda$  è un polinomio

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

detto *polinomio caratteristico* di  $A$ . Tale polinomio è monico, ovvero il coefficiente di grado massimo è pari a 1. Gli autovalori sono dunque le radici (eventualmente complesse) di tale polinomio.

L'autovettore  $x \neq 0$  che soddisfa la relazione è anche chiamato *autovettore destro*. Un vettore  $z \neq 0$  tale che

$$z^T(A - \lambda I) = 0$$

è detto *autovettore sinistro*. Se trasponiamo la relazione abbiamo che

$$(A^T - \lambda I)z = 0$$

ovvero un autovettore sinistro è un autovettore destro della trasposta (gli autovalori della trasposta sono i medesimi di  $A$  perché  $\det(\lambda I - A) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A^T)$ ).

L'insieme degli autovalori di  $A$  ovvero l'insieme delle radici di  $p(\lambda)$  è detto *spettro* di  $A$  e si indica con

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}.$$

Assumiamo che la matrice  $A$  ammetta  $n$  autovalori distinti, ovvero che le radici di  $p(\lambda)$  siano distinte

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

In questo caso si può provare che gli autovettori corrispondenti  $t_j$  sono linearmente indipendenti. Chiamiamo  $T$  la matrice le cui colonne sono questi vettori

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix}.$$

Allora vale la seguente relazione

$$A \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se poniamo  $S = T^{-1}$  allora valgono tutte le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} AT &= T\Lambda \\ SA &= \Lambda S \\ A &= T\Lambda S \\ \Lambda &= SAT. \end{aligned}$$

Si noti che partizionando  $S$  per righe

$$S = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix}$$

la relazione  $SA = \Lambda S$  ci dice che le righe di  $S$  sono autovettori sinistri.

Nel caso in cui la matrice  $A$  non sia diagonalizzabile il problema risulta molto più complicato. Si può dimostrare che esiste una matrice  $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tale che  $A = TJT^{-1}$ , è diagonale a blocchi della forma

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r),$$

Dove il  $k$ -esimo blocco  $J_k$ , di dimensione  $\mu_k \times \mu_k$ , è della forma

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Una matrice  $J$  della forma indicata si dice in *forma di Jordan*.

È possibile ottenere una decomposizione di  $A$  del tipo

$$A = [T_1 T_2 \dots T_r] \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_r \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

dove  $T_k \in \mathfrak{R}^{n \times \mu_k}$  e  $S_k^T \in \mathfrak{R}^{\mu_k \times n}$ . La forma di Jordan è unica a meno di permutazioni sui blocchi. Il numero di blocchi e le loro dimensioni sono caratteristici della matrice.

Per ogni autovalore  $\lambda$  multiplo si possono definire tre parametri fondamentali.

**Molteplicità algebrica** : è la molteplicità di  $\lambda$  come radice del polinomio caratteristico.

**Molteplicità geometrica** : è il numero di blocchi di  $\lambda$  come radice del polinomio caratteristico.

**Grado** : è la dimensione del blocco più grande associato a  $\lambda$ .

In grado di un autovalore è di particolare importanza. Esiste un modo molto semplice per calcolarlo *senza passare per la forma di Jordan*.

### Calcolo del grado di $\lambda \in \sigma(A)$

per calcolare il grado definiamo i seguenti numeri:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \text{rank}(\lambda I - A)^1 \\ \rho_2 &= \text{rank}(\lambda I - A)^2 \\ &: \\ \rho_g &= \text{rank}(\lambda I - A)^g\end{aligned}$$

Si dimostra che  $\rho_i \geq \rho_{i+1}$ . Si prosegue nel calcolo finchè non si verifica l'uguaglianza:

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_g = \rho_{g+1}$$

il coefficient più piccolo per cui vale l'uguaglianza è il grado  $g$  di  $\lambda$  (formalmente  $g = \min_i : \rho_i = \rho_{i+1}$ ).

Vale la seguente proprietà che riguarda l'invarianza degli autovalori.

**Proprietà** Una trasformazione di similitudine conserva il polinomio caratteristico e dunque gli autovalori. Infatti se  $\hat{A} = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned}\det(sI - \hat{A}) &= \det(sT^{-1}T - T^{-1}AT) = \det[T^{-1}(sI - A)T] = \\ &= \det(T^{-1})\det(sI - A)\det(T) = \det(sI - A).\end{aligned}$$

Gli autovettori si trasformano come ogni altro vettore.

### A.1.4 Prodotto scalare

Dati un vettore  $x$  in  $\mathbf{C}^n$  definiamo il coniugato  $x^H$  come il vettore che si ottiene trasponendo e prendendo gli elementi coniugati

$$\begin{bmatrix} 2 + j \\ 3 - j4 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2 - j & 3 + j4 \end{bmatrix}$$

Chiaramente se il vettore è definito in  $\mathbf{R}^n$  il coniugato altro non è che il trasposto  $x^H = x^T$ .

Dati due vettori  $x, y$  in  $\mathbf{C}^n$  definiamo prodotto scalare

$$(x, y) \doteq x^H y$$

Chiaramente, per vettori in  $\mathbf{R}^n$

$$(x, y) \doteq x^T y$$



Se consideriamo la lunghezza ovvero la norma euclidea del vettore  $x$

$$\|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

come caso particolare quando  $x = y$  abbiamo che

$$(x, x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

ovvero la norma euclidea al quadrato.

Dati due vettori  $x$  e  $y$  questi si dicono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo

$$(x, y) = 0$$

Dato un sottospazio  $X$  di  $\mathbf{R}^n$ , l'insieme di tutti i vettori ortogonali è un sottospazio ed è detto il sottospazio ortogonale

$$X^\perp = \{y : (x, y) = 0\}$$

Infine ricordiamo che dato un vettore  $x \neq 0$  è sempre possibile normalizzarlo considerando il versore

$$v = \frac{x}{\|x\|}$$

che ovviamente ha lunghezza unitaria. La quantità  $(x, v)$  è la componente di  $x$  lungo la direzione  $v$ .

### A.1.5 Matrici simmetriche

Data una matrice  $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$  con elementi  $[d_{ij}]$ , la sua **trasposta** è definita come la matrice  $A^T$  di dimensioni  $n \times m$  con elementi  $[d_{ji}]$ . Si definisce anche la sua **hermitiana** come la matrice  $A^H$  di dimensioni  $n \times n$  con elementi  $[d_{ji}^*]$ .

#### Esempio

$$\begin{bmatrix} 2+j & 1 & 1+3j \\ 3-j & 2-2j & 4j \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2-j & 3+j4 \\ 1 & 2+2j \\ 1-3j & -4j \end{bmatrix}$$

Si possono verificare facilmente le seguenti proprietà:

- $(AB)^T = B^T A^T$ ;
- $(AB)^H = B^H A^H$ .

Una matrice si dice **hermittiana** se  $P = P^H$ . Nel caso delle matrici reali una matrice  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  si dice **simmetrica** se  $P = P^T$ . Si può ora dimostrare il seguente:

**Teorema** Una matrice hermitiana (simmetrica se reale) ha tutti gli autovalori reali.

**Dimostrazione** Considerando le espressioni valide per qualunque matrice

$$\begin{aligned} Px &= \lambda x \\ P^* x^* &= \lambda^* x^* \end{aligned}$$

si può premoltiplicare la prima per  $x^H$ , e trasporre la seconda. Si ottiene:

$$\begin{aligned} x^H Px &= \lambda x^H x \\ x^{*T} P^{*T} &= x^{*T} \lambda^* \Rightarrow x^H P^H = x^H \lambda^* \end{aligned}$$

Postmoltiplicando la seconda equazione per  $x$ , si ottiene infine:

$$\begin{aligned} x^H Px &= \lambda x^H x \\ x^H P^H x &= \lambda^* x^H x \end{aligned}$$

Le operazioni svolte fino a questo punto possono essere applicate a qualunque matrice. Ora si utilizza l'ipotesi di matrice hermitiana, cioè  $P = P^H$ ; si possono allora uguagliare i secondi membri delle due ultime equazioni sopra riportate, ottenendo:

$$\lambda x^H x = \lambda^* x^H x$$

dato che  $x^H x = \sum_{i=1}^n x_i^* x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$  è sempre maggiore di zero perché  $x \neq 0$ , allora deve per forza accadere che  $\lambda = \lambda^*$ , cioè gli autovalori della matrice  $P$  sono reali.

Si può anche dimostrare che se la matrice è simmetrica, gli autovettori associati a due autovalori distinti sono ortogonali, ossia  $q_i^T q_j = q_j^T q_i = 0$ .

### A.1.6 Matrici semidefinite e definite

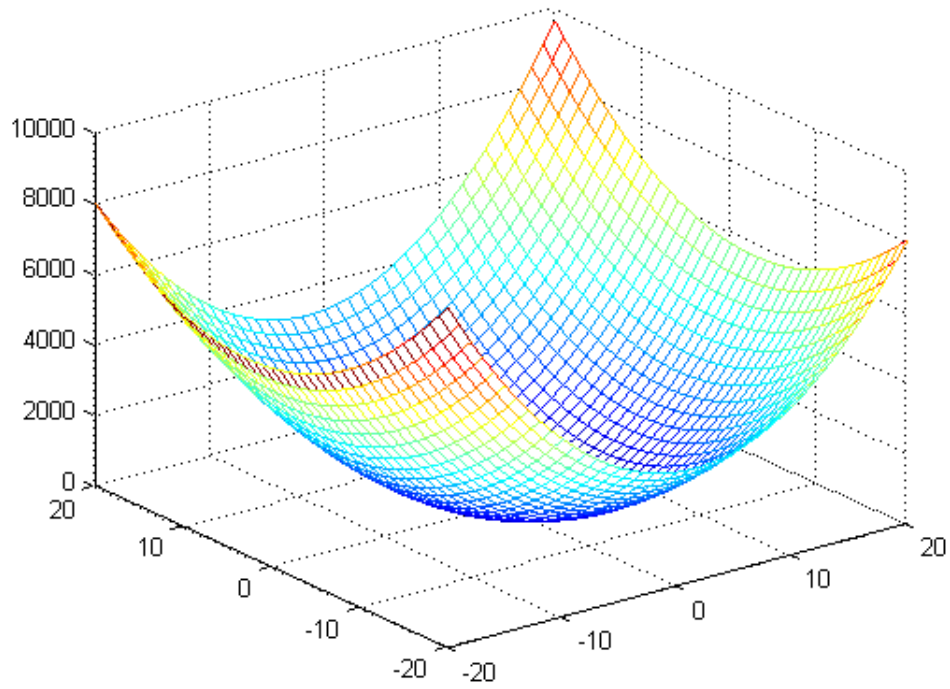
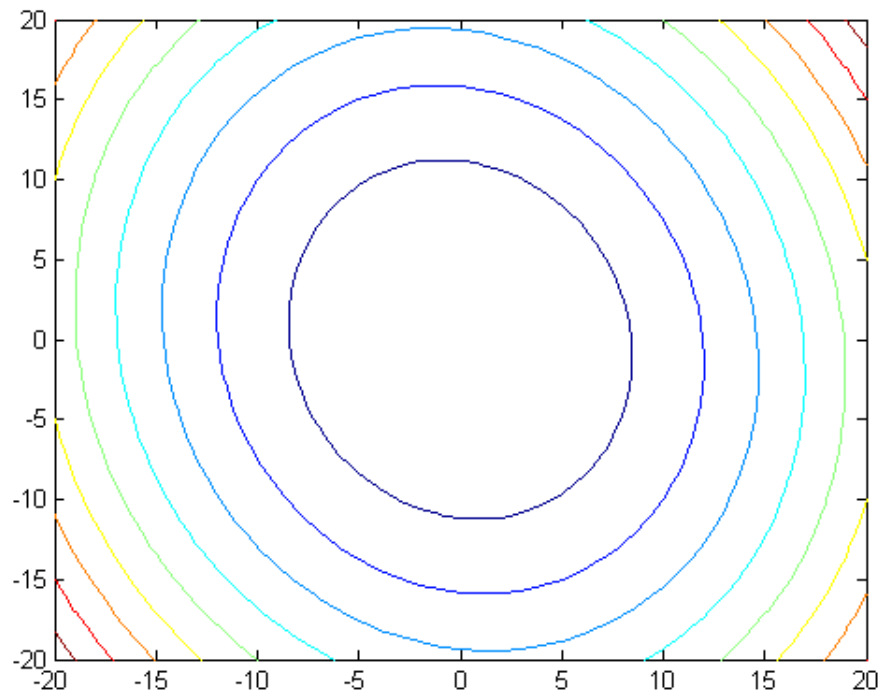
Data una matrice  $P$  simmetrica, essa si dice **semidefinita positiva** (o **negativa**) se:

$$x^T Px \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \forall x$$

Data una matrice  $P$  simmetrica, essa si dice **definita positiva** (o **negativa**) se:

$$x^T Px > 0 \quad (< 0) \quad \forall x \neq 0$$

Si può anche dire che  $P$  è una matrice definita positiva se e solo se  $-P$  è una matrice definita negativa; lo stesso vale se  $P$  è semidefinita positiva. Se si rappresenta in tre dimensioni la funzione quadratica  $V(x) = x^T Px$  si ottiene il paraboloide ellittico riportato in figura (A.2), le cui curve di livello sono riportate in figura (A.3).

Figura A.2: Grafico della funzione quadratica  $V(x)$ Figura A.3: Curve di livello della funzione quadratica  $V(x)$

La proprietà fondamentale posseduta da questo tipo di matrici, facilmente utilizzabile in sede di calcolo con programmi appositi come Matlab, è la seguente:

### Teorema

- se  $P$  è semidefinita positiva, allora ogni suo autovalore è maggiore o uguale a zero, e viceversa;
- se  $P$  è definita positiva, allora ogni suo autovalore è maggiore di zero, e viceversa.

**Dimostrazione** Supponiamo che la matrice  $P$  sia diagonalizzabile mediante trasformazione per similitudine secondo la formula  $PQ = Q\Lambda$ , dove  $Q$  è la matrice degli autovettori incolonnati. Dato che  $P$  è simmetrica per definizione,  $Q$  è una matrice ortogonale, ossia con ogni colonna ortogonale alle altre. Supponendo di operare una **normalizzazione della matrice**  $Q$ , cioè di calcolare gli autovalori in modo che  $\|q_i\| = 1$  (cosa sempre possibile, dato che gli autovalori sono definiti a meno di una costante), si ha che  $Q$  diventa una matrice **ortonormale**, che gode della proprietà  $Q^{-1} = Q^T$ . Premoltiplicando la trasformazione per similitudine per  $Q^T$ , si ottiene:

$$Q^T P Q = \Lambda$$

Se dunque  $P$  è matrice definita positiva, per definizione  $x^T P x > 0 \forall x$ , da cui risulta che ogni autovalore deve essere  $\lambda > 0$ . Viceversa, se  $\lambda$  è maggiore di zero, possiamo scrivere:

$$x^T P x = x^T \lambda x = \lambda x^T x$$

ed essendo  $x^T x = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$  perché  $x \neq 0$ , risulta che  $x^T P x > 0$  cioè  $P$  è definita positiva.

Un ulteriore metodo per verificare se una matrice  $P$  è definita positiva è il **criterio di Sylvester**: indicando con  $P_k$  ogni sottomatrice formata dall'intersezione delle prime  $k$  righe e  $k$  colonne, la matrice  $P$  è definita positiva se e solo se  $\det A_k > 0 \forall k = 1, 2, \dots, n$ .

### A.1.7 Polinomi e serie di potenze

Come noto un polinomio nella variabile complessa  $s$  è una funzione del tipo

$$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_r s^r.$$

Dicesi *serie di potenze* un polinomio di grado "infinito"

$$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots + f_h s^h + \dots = \sum_{h=0}^{\infty} f_h s^h.$$

Una funzione di questo tipo è definita in un certo dominio di convergenza di  $f(s)$  del tipo

$$D = \{s : |s| < \rho\}$$

dove  $\rho$ , detto *raggio di convergenza*, dipende dai coefficienti  $\{f_h\}$ . Le funzioni esprimibili tramite serie di potenze sono dette *analitiche* ed hanno proprietà notevoli, che tralasciamo per brevità. Vale il seguente principio.

**Principio di identità delle serie di potenze** Sia  $l$  una curva continua (arbitrariamente piccola) avente un estremo nell'origine e contenente punti diversi da 0. Date due serie di potenze  $f(s) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h s^h$  e  $g(s) = \sum_{h=0}^{\infty} g_h s^h$  abbiamo che  $f(s) = g(s)$  per ogni punto di  $l$  se e solo se  $g_h = f_h$  per ogni  $h \geq 0$ .

Tramite serie di potenze è possibile definire funzioni di matrice. Sia  $f(s)$  una funzione analitica e  $M$  una matrice. Si assuma che l'insieme degli autovalori di  $M$  sia contenuto nel dominio di convergenza di  $f^1$ . Allora si può definire la funzione di matrice corrispondente a  $f$

$$f(M) \doteq \sum_{h=0}^{\infty} f_h M^h.$$

Per semplicità consideriamo il caso di  $M$  diagonalizzabile per cui

$$M^h = T \Sigma^h T^{-1},$$

con  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$  diagonale. Allora

$$f(M) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h T \Sigma^h T^{-1} = T \left[ \sum_{h=0}^{\infty} f_h \Sigma^h \right] T^{-1}$$

dove

$$\left[ \sum_{h=0}^{\infty} f_h \Sigma^h \right] = \text{diag} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} f_h \sigma_1^h, \sum_{h=0}^{\infty} f_h \sigma_2^h, \dots, \sum_{h=0}^{\infty} f_h \sigma_n^h \right\} = \text{diag}\{f(\sigma_1), f(\sigma_2), \dots, f(\sigma_n)\}.$$

Un caso particolare di serie di potenze è quello dei polinomi. Dato un polinomio  $p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_r s^r$  possiamo definire il polinomio di matrice

$$P(M) = p_0 I + p_1 M + p_2 M^2 + \dots + p_r M^r.$$

Vale la seguente proprietà notevole.

**Identità di Cailey-Hamilton** Sia  $A$  matrice quadrata e sia

$$\det(sI - A) = p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n.$$

Allora il corrispondente polinomio di matrice calcolato in  $A$  è la matrice nulla ossia

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + A^n = 0.$$

La dimostrazione di questo fatto è semplice nel caso in cui  $A$  sia diagonalizzabile, ovvero

<sup>1</sup>questa ipotesi si può rimuovere grazie alla tecnica del prolungamento analitico

$A = T\Lambda T^{-1}$  perché, come abbiamo visto,

$$P(A) = T \text{diag}\{p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)\} T^{-1} = 0$$

in quanto  $p(\lambda_i) = 0$ .

L'identità di Cailey-Hamilton ha come conseguenza il seguente fatto:

**Dipendenza delle le potenze di  $A$**  Ogni potenza di  $A$  è combinazione lineare delle prime  $n$  potenze

$$I, A, A^2, \dots, A^{n-1}.$$

Per verificarlo è sufficiente scrivere l'identità di Cailey-Hamilton come

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_2A^2 - a_1A - a_0I.$$

Questo significa che  $A^n$  è combinazione lineare delle prime  $n$  potenze. Procedendo per induzione, supponiamo che questo sia vero per  $k \geq n$

$$A^k = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0I,$$

moltiplichiamo per  $A$  ottenendo

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= -\alpha_{n-1}A^n - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A = \\ &= -\alpha_{n-1}[-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0I] \\ &\quad - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A = \\ &= -\alpha_{n-1}^*A^{n-1} - \dots - \alpha_2^*A^2 - \alpha_1^*A - \alpha_0^*I \end{aligned}$$

(dove gli  $\alpha_j^*$  sono calcolabili facilmente) quindi è vero per  $k + 1$ .

## A.2 La risposta impulsiva

Un concetto di facile intuizione ma di non facile descrizione matematica è la risposta all'impulso unitario. Intuitivamente, un impulso è un fenomeno di altissima intensità e brevissima durata. Per rappresentarlo possiamo fare le seguenti considerazioni. Prendiamo la funzione  $\delta_\epsilon(t)$  come segue

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{se } -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{se } t > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

Per  $\epsilon$  che si riduce, abbiamo che il supporto di questa funzione (l'intervallo dove è non-nulla), precisamente  $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ , diventa sempre più stretto mentre il valore della funzione in tale intervallo,  $1/\epsilon$ , diventa sempre più grande. Da notarsi che l'integrale di questa funzione sull'asse reale è sempre pari a 1. Sia  $t_0$  un punto interno dell'intervallo  $[a, b]$  e sia  $\epsilon$  un valore tale per cui la funzione  $\delta_\epsilon(t)$  assume valori non-nulli solo all'interno di  $[a, b]$  ( $t_0 - \epsilon/2$  e  $t_0 + \epsilon/2$  devono entrambi appartenere ad  $[a, b]$ ).

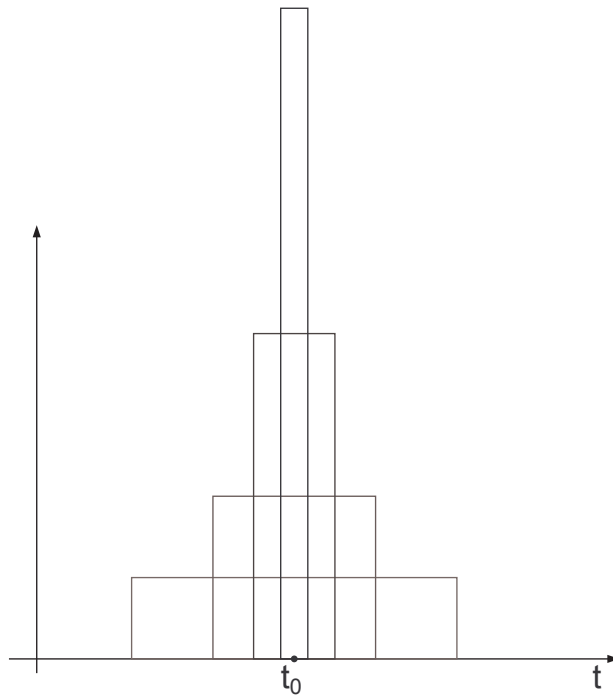


Figura A.4: L'impulso può essere pensato come il limite di una successione di funzioni.

Intuitivamente, la “funzione impulso” in  $t_0$ ,  $\delta(t - t_0)$  è, il “limite” per  $\epsilon$  tendente a 0 della funzione  $\delta_\epsilon(t - t_0)$ . Questo oggetto non è in realtà una funzione ma una distribuzione, e una trattazione formale viene omessa per semplicità. Quella che segue è una spiegazione intuitiva. Consideriamo il seguente integrale

$$\int_a^b f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt,$$

dove  $f$  è una qualunque funzione continua. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt &= \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt = \\ &= \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(t) \frac{1}{\epsilon} dt = \frac{1}{\epsilon} f(\tau) \epsilon = f(\tau) \end{aligned}$$

dove  $\tau$  è un punto interno a  $[t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0 + \frac{\epsilon}{2}]$  che esiste per il teorema del valor medio. Essendo  $f$  continua abbiamo che per  $\epsilon$  tendente a zero

$$\int_a^b f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt \rightarrow f(t_0).$$

Quindi la funzione limite  $\delta(t - t_0)$  viene definita come quella “funzione” avente la proprietà che per

ogni funzione continua  $f$  definita sull'intervallo  $[a, b]$  avente  $t_0$  quale punto interno si ha che

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (\text{A.2})$$

Consideriamo ora il caso di un sistema lineare ad un ingresso ed una uscita la cui risposta forzata è data dalla convoluzione

$$y(t) = \int_0^t W(t - \sigma) u(\sigma) d\sigma.$$

Se prendiamo come ingresso la funzione impulso  $\delta(\sigma - t_0)$  per  $\sigma \geq 0$  abbiamo che

$$y_{imp}(t) = \int_0^t W(t - \sigma) \delta(\sigma - t_0) d\sigma = W(t - t_0),$$

per  $t > t_0$  (mentre  $y_{imp}(t) = 0$  per  $t < t_0$ ). Si noti infine che per considerare l'impulso nell'istante 0 dobbiamo considerare il prodotto di convoluzione

$$y(t) = \int_{0^-}^t W(t - \sigma) u(\sigma) d\sigma.$$

### A.3 Trasformate di Laplace

La trasformata di Laplace è uno strumento di grande utilità per lo studio dei sistemi lineari e invarianti. Se ne riportano qui le proprietà fondamentali.

#### A.3.1 Definizione e proprietà fondamentali

Data una funzione  $f(t)$  a supporto positivo (cioè definita per ogni  $t$  e nulla per  $t < 0$ ) diciasi *trasformata di Laplace* la funzione (se esiste)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (\text{A.3})$$

dove  $s$  è una variabile complessa. Se tale funzione esiste la funzione  $f$  è detta Laplace-trasformabile. Con un certo abuso di notazione (ma con gran comodità di rappresentazione) si usa rappresentare la funzione e la sua trasformata con la medesima lettera

$$f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

L'espressione (A.3) è definita in un opportuno dominio di  $s$ , precisamente in un dominio del tipo

$$Dom_f = \{s : \Re(s) > c\}.$$

Il più piccolo valore  $c_f$  di  $c$  per cui la convergenza è garantita è detta ascissa di convergenza (relativamente a  $f$ ).

La trasformata di Laplace gode di una serie di proprietà che ora illustriamo. Siano  $f$  e  $g$  funzioni continue e derivabili per  $t > 0$ . Sia  $Dom = Dom_f \cap Dom_g$  il dominio comune



di convergenza. Allora abbiamo le seguenti proprietà fondamentali. Siano  $f(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  e  $g(s) = \mathcal{L}[g(t)]$

#### Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha f(s) + \beta g(s).$$

#### Trasformata della derivata

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sf(s) - f(0).$$

**Teorema del limite finale** Ammesso che i limiti scritti di seguito *esistano e siano entrambi finiti* abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s).$$

**Teorema del limite iniziale** Ammesso che i limiti scritti di seguito *esistano e siano entrambi finiti* abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s).$$

#### Teorema della convoluzione

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma\right] = f(s)g(s).$$

#### Teorema della traslazione

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}f(s).$$

#### Teorema della moltiplicazione per $t$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}f(s).$$

### A.3.2 Trasformate principali

In questa sottosezione ci occupiamo di calcolare le trasformate delle funzioni del tipo  $t^k e^{\xi t} \cos(\omega t)$  e  $t^k e^{\xi t} \sin(\omega t)$  e tutti i casi particolari ( $\xi = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $k = 0$ ). Cominciamo appunto dal caso più semplice

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \frac{1}{s-\lambda}.$$

La proprietà sopra vale nel caso di  $\lambda$  reale o complesso come è facilissimo verificare. Consideriamo ora il problema della determinazione della trasformata  $\mathcal{L}[\cos(\omega t)]$ . Il modo più semplice per il calcolo è considerare la funzione  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ . Calcolandome la trasformata, parte reale e immaginaria ci forniranno, per linearità, le trasformate delle funzioni  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$ . Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{j\omega t}] &= \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s+j\omega}{s+j\omega} \frac{1}{s-j\omega} = \\ &= \frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{\underbrace{s^2+\omega^2}_{\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}} + j \frac{\omega}{\underbrace{s^2+\omega^2}_{\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Usando lo stesso “trucco” e ponendo  $\lambda = \xi + j\omega$ , trasformando la relazione

$$e^{\lambda t} = e^{(\xi + j\omega)t} = e^{\xi t}(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

otteniamo le trasformate

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\xi t} \cos(\omega t)] &= \frac{s - \xi}{(s - \xi)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{\xi t} \sin(\omega t)] &= \frac{\omega}{(s - \xi)^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Consideriamo ora la trasformata della funzione  $te^{\lambda t}$ . Questa si ottiene considerando il teorema della moltiplicazione per  $t$ :

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s - \lambda} = \frac{1}{(s - \lambda)^2}.$$

Dal fatto banale che  $t^k e^{\lambda t} = t(t^{k-1} e^{\lambda t})$  è possibile dimostrare ricorsivamente che

$$\mathcal{L}[t^k e^{\lambda t}] = \frac{k!}{(s - \lambda)^{k+1}}.$$

Una trasformata importante è quella dell'impulso  $\delta(t - \tau)$ . Abbiamo che

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau}$$

in particolare per  $\tau = 0$  questa relazione ci dice che la funzione impulso nell'origine ha come trasformata

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

La trasformata dell'ingresso a gradino in  $\tau$

$$gr(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq \tau \\ 1 & \text{per } t > \tau \end{cases}$$

è ottenibile con una sostituzione di variabile  $\sigma = t - \tau$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[gr(t - \tau)] &= \int_{t=0}^{t=\infty} gr(t - \tau) e^{-st} dt = \int_{\sigma=-\tau}^{\sigma=\infty} gr(\sigma) e^{-s(\sigma+\tau)} d\sigma = \\ &= e^{-s\tau} \int_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} e^{-s\sigma} d\sigma = \frac{e^{-s\tau}}{s}.\end{aligned}$$

In particolare, la trasformata del gradino in 0 è

$$\mathcal{L}[gr(t)] = \frac{1}{s}.$$

### A.3.3 Antitrasformate di funzioni razionali proprie

Abbiamo visto nella sezione precedente alcune delle trasformate principali. In questa sezione ci occupiamo del problema inverso, cioè dell'antitrasformazione. In particolare ci occupiamo di antitrasformate di funzioni razionali proprie, del tipo

$$f(s) = \frac{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots + n_v s^v}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^v}.$$

Si noti che abbiamo posto il coefficiente di  $s^v$  al denominatore  $d_v = 1$  il che non è restrittivo perché, qualora sia  $d_v \neq 1$ , è sempre possibile ricondursi a questa situazione dividendo numeratore e denominatore per  $d_v$ . Una funzione del tipo  $f(s)$  può essere sempre trasformata nella somma di una costante e di una funzione strettamente propria<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots + n_v s^v}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^v} = \frac{n_v(d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^v)}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^v} + \\ &+ \frac{(n_0 - n_v d_0) + (n_1 - n_v d_1)s + \dots + (n_{v-1} - n_v d_{v-1})s^{v-1}}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^v} \\ &= n_v + \frac{\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 s + \tilde{n}_2 s^2 + \dots + \tilde{n}_{v-1} s^{v-1}}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^v} = n_v + \tilde{f}(s) \end{aligned}$$

dove  $\tilde{f}(s)$  è strettamente propria. Fatta questa operazione, abbiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = n_v \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(s)],$$

quindi il problema è quello di determinare l'antitrasformata della funzione razionale strettamente propria  $\tilde{f}$ .

Allora consideriamo una funzione strettamente propria  $f(s)$ . Una funzione strettamente propria avente poli (radici del denominatore) distinti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$  può essere sempre scritta nella forma

$$f(s) = \sum_{i=1}^v \frac{r_i}{s - \lambda_i} \quad (\text{A.4})$$

dove i coefficienti  $r_i$  sono detti *residui*. I residui sono calcolabili come limite

$$r_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) f(s),$$

come è facile dedurre dall'espressione (A.4). Se fattorizziamo il denominatore scrivendo  $f$  come

$$f(s) = \frac{n(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_v)}$$

vediamo che la formula si riduce al calcolo

$$r_i = \left. \frac{n(s)}{\prod_{j \neq i} (s - \lambda_j)} \right|_{s=\lambda_i}.$$

<sup>2</sup>dicesi strettamente propria una funzione razionale in cui il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore

In modo alternativo possiamo procedere con un sistema di equazioni lineari. Consideriamo l'espressione (A.4) e portiamo gli addendi a denominatore comune, ottenendo

$$f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} r_i \prod_{j \neq i} (s - \lambda_j)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_\nu)} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} r_i \Psi_i(s)}{d(s)}$$

questa espressione ci dice che deve valere l'identità

$$n(s) = \sum_{i=1}^{\nu} r_i \Psi_i(s),$$

dove entrambi i membri sono polinomi di grado  $\nu$  in  $s$ . Applicando il principio di identità dei polinomi abbiamo che i coefficienti  $r_i$  sono determinabili tramite un sistema lineare (si tratta di uguagliare i coefficienti dei termini grado uguale).

**Esempio** Consideriamo la funzione

$$f(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2} + \frac{r_3}{s+3}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} r_1 &= \left. \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = \frac{3}{2} \\ r_2 &= \left. \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = -2 \\ r_3 &= \left. \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se vogliamo procedere con il metodo del sistema lineare abbiamo che

$$\begin{aligned} (s+4) &= r_1(s+2)(s+3) + r_2(s+1)(s+3) + r_3(s+1)(s+2) \\ &= r_1(s^2 + 5s + 6) + r_2(s^2 + 4s + 3) + r_3(s^2 + 3s + 2) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3)s^2 + (5r_1 + 4r_2 + 3r_3)s + 6r_1 + 3r_2 + 2r_3 \end{aligned}$$

da cui il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= 0 \\ 5r_1 + 4r_2 + 3r_3 &= 1 \\ 6r_1 + 3r_2 + 2r_3 &= 4 \end{aligned}$$

che fornisce gli stessi valori per  $r_1, r_2, r_3$ .

Questo modo di procedere può creare dei problemi se alcuni poli  $\lambda_i$  sono complessi. Se così è

si può decidere di lavorare in termini reali. Fattorizziamo il denominatore come segue

$$\begin{aligned} d(s) &= \prod_{i=1}^m (s - \lambda_i) \prod_{i=1}^q (s^2 - 2\xi_i s + \xi_i^2 + \omega_i^2) \\ &= \prod_{i=1}^m (s - \lambda_i) \prod_{i=1}^q ((s - \xi_i)^2 + \omega_i^2) \end{aligned}$$

dove i fattori  $(s - \lambda_i)$  sono associati alle  $m$  radici reali mentre i fattori  $((s - \xi_i)^2 + \omega_i^2)$  sono associati alle  $q$  coppie di radici complesse coniugate  $\xi_i + j\omega_i$  (chiaramente  $m + 2q = \nu$ ). Allora abbiamo che

$$f(s) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{(s - \lambda_i)} + \sum_{i=1}^q \frac{a_i s + b_i}{(s - \xi_i)^2 + \omega_i^2}.$$

I coefficienti  $r_i$  sono determinabili con la formula del limite. Per calcolare tutti i coefficienti  $r_i$ ,  $a_i$  e  $b_i$  possiamo procedere scrivendo l'espressione con il denominatore comune e calcolando tramite un sistema lineare i coefficienti.

**Esempio** Consideriamo la funzione razionale

$$f(s) = \frac{2s^3 + 1}{(s + 1)(s + 2)((s + 1)^2 + 4)}.$$

Tale funzione può essere scritta come

$$f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{r_1}{s + 1} + \frac{r_2}{s + 2} + \frac{a_1 s + b_1}{(s^2 + 2s + 5)}.$$

Allora, dopo aver posto l'espressione sotto denominatore comune, uguagliando i numeratori abbiamo

$$2s^3 + 1 = r_1(s + 2)(s^2 + 2s + 5) + r_2(s + 1)(s^2 + 2s + 5) + (a_1 s + b_1)(s + 1)(s + 2)$$

Tramite il principio di identità dei polinomi possiamo ricavare i coefficienti  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $a_1$  e  $b_1$ . Uguagliando i coefficienti dei termini di ciascun grado si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + a_1 &= 2 \\ 4r_1 + 3r_2 + 3a_1 + b_1 &= 0 \\ 9r_1 + 7r_2 + 2a_1 + 3b_1 &= 0 \\ 10r_1 + 5r_2 + 2b_1 &= 1 \end{aligned}$$

risolvendo il quale si ha

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{4} \\ r_2 &= 3 \\ a_1 &= -\frac{3}{4} \\ b_1 &= -\frac{23}{4}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora brevemente il caso di funzioni razionali con poli multipli. La forma più generale di decomposizione è

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{g_i} \frac{r_{ij}}{(s - \lambda_i)^j}$$

dove  $g_i$  è la molteplicità del polo  $\lambda_i$ . I valori  $r_{ij}$  sono ottenibili tramite sistema, come possiamo vedere nel seguente esempio.

### Esempio

$$f(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s + 2)^3} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{r_{11}}{s + 1} + \frac{r_{12}}{(s + 1)^2} + \frac{r_{21}}{s + 2} + \frac{r_{22}}{(s + 2)^2} + \frac{r_{23}}{(s + 2)^3} \quad (\text{A.6})$$

Con la solita tecnica del denominatore comune, uguagliando i denominatori otteniamo che

$$\begin{aligned} s^2 + s + 1 &= r_{11}(s + 1)(s + 2)^3 + r_{12}(s + 2)^3 + r_{21}(s + 1)^2(s + 2)^2 + \\ &+ r_{22}(s + 1)^2(s + 2) + r_{23}(s + 1)^2 \end{aligned}$$

da cui è possibile ricavare i coefficienti  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  e  $r_{23}$ . Uguagliando i coefficienti dei termini di ciascun grado si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} r_{11} + r_{21} &= 0 \\ 7r_{11} + r_{12} + 6r_{21} + r_{22} &= 0 \\ 18r_{11} + 6r_{12} + 13r_{21} + 4r_{22} + r_{23} &= 1 \\ 20r_{11} + 12r_{12} + 12r_{21} + 5r_{22} + 2r_{23} &= 1 \\ 8r_{11} + 8r_{12} + 4r_{21} + 2r_{22} + r_{23} &= 1 \end{aligned}$$

risolvendo il quale si ha

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= -4 \\
 r_{12} &= 1 \\
 r_{21} &= 4 \\
 r_{22} &= 3 \\
 r_{23} &= 3.
 \end{aligned}$$

Una volta calcolata la decomposizione, il problema dell'antitrasformazione è facilmente solubile. Infatti, essendo la trasformata e, dunque, l'antitrasformata operatori lineari, basta antitrasformare termine a termine. Abbiamo che per gli addendi il cui denominatore è di primo grado

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r}{s - \lambda} \right] = r e^{\lambda t},$$

mentre per quelli di secondo grado scriviamo

$$\frac{as + b}{(s - \xi)^2 + \omega^2} = \frac{a(s - \xi)}{(s - \xi)^2 + \omega^2} + \frac{(b + a\xi)}{(s - \xi)^2 + \omega^2}$$

per cui

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{as + b}{(s - \xi)^2 + \omega^2} \right] = a e^{\xi t} \cos(\omega t) + \frac{b + a\xi}{\omega} e^{\xi t} \sin(\omega t).$$

Nel caso di autovalori multipli abbiamo che il generico termine di grado  $k + 1$  è trasformabile come segue

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r}{(s - \lambda)^{k+1}} \right] = \frac{r}{k!} t^k e^{\lambda t}$$

dove  $\lambda$  è reale o complesso.

## A.4 Trasformata Zeta

La trasformata Zeta è lo strumento analogo alla trasformata di Laplace per l'analisi dei sistemi a tempo discreto. Vista la stretta analogia se ne darà solo un breve cenno. Data la successione o funzione a tempo discreto  $f(k)$ , definita per  $k \geq 0$ , la trasformata di  $f$  è la funzione di variabile complessa  $z$  definita come segue

$$Z[f] \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \frac{1}{z^k} = f(z)$$

Tale funzione ha come dominio di convergenza un insieme del tipo

$$\mathcal{D} = \{z : |z| > \rho_f\}$$

(il complemento del disco di raggio  $\rho_f \geq 0$ ) dove il raggio  $\rho_f$  dipende dalla funzione considerata.

La trasformata Zeta ha proprietà del tutto analoghe alla trasformata di Laplace. Ricordiamo solamente le principali.

**Linearità** :  $Z[\alpha f + \beta g] = \alpha Z[f] + \beta Z[g]$ .

**Trasformata di  $f$  anticipata** :  $Z[f(k + 1)] = zZ[f] - zf(0)$ .

**Trasformata della convoluzione** :

$$Z\left[\sum_{h=0}^{k-1} f(k-h)g(k)\right] = Z[f]Z[g].$$

Le altre proprietà quali il limite finale iniziale vengono omesse. L'utilità della trasformata Zeta nello studio dei sistemi a tempo discreto è del tutto paragonabile a quella della trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo.