

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 16 Giugno 2008 - Gestionali ¹

1. **Osservatore?** Sia dato il sistema lineare (A, B, C, D)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

e il regolatore lineare $\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Bv(t)$, $u = Hz(t) + v(t)$ con $v(t)$ segnale esterno e con

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = [0 \quad -1] \quad K = 0$$

Per quali valori dei parametri α β γ e δ abbiamo che lo stato del regolatore $z(t)$ converge a quello del sistema $x(t)$ per qualsiasi $v(t)$?

2. **A zero in tempo finito** Dato il sistema a tempo discreto

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si progetti un regolatore $u(k) = Kx(k)$ in modo tale che la condizione $x(T) = 0$ si verifichi in tempo finito $T < \infty$, per qualsiasi stato iniziale $x(0) \in \mathcal{R}^2$.

3. **Osservatore** Dato il servoposizionatore

$$\ddot{\theta}(t) = -\sin\theta(t) + u(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

e un generico angolo di riferimento θ_r si costruisca un osservatore asintotico dello stato assegnando gli autovalori in -4 e -3 indipendentemente da θ_r .

4. **Dominio di attrazione** Dato un sistema $\dot{x} = f(x)$ e una funzione di Lyapunov $V(x)$ l'insieme

$$\mathcal{D}_\kappa = \{x : V(x) < \kappa\}$$

è un dominio di attrazione (DDA) se $\dot{V}(x) < 0$, per ogni $x \in \mathcal{D}_\kappa$, $x \neq 0$. Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{aligned}$$

e la funzione $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ si determini un DDA \mathcal{D}_κ massimizzando κ .

5. **www.bastardidentro.com** Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Er$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

si progetti un regolatore $u(t) = Kx(t)$ tale che a) il sistema sia stabile asintoticamente; b) per ogni valore costante del segnale r , la risposta a regime deve essere nulla ($y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$). Nota: non ci sono specifiche sugli autovalori (basta la stabilità as.) e la funzione di trasferimento F da r a y (tale che $y(s) = F(s)r(s)$) deve valere zero per

6. **Filtro ottimo** Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + v(t), \quad y(t) = x(t) + w(t)$$

con v e w disturbi non misurabili. Si progetti il filtro

$$\dot{z}(t) = [-0.5 - l]z(t) + ly(t).$$

ottimo secondo Kalman.

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 16 Giugno 2008 - Elettronici²

1. **Osservatore?** Sia dato il sistema lineare (A, B, C, D)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

e il regolatore lineare $\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Bv(t)$, $u = Hz(t) + v(t)$ con $v(t)$ segnale esterno e con

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = [0 \quad -1] \quad K = 0$$

Per quali valori dei parametri α β γ e δ abbiamo che lo stato del regolatore $z(t)$ converge a quello del sistema $x(t)$ per qualsiasi $v(t)$?

2. **A zero in tempo finito** Dato il sistema discreto

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si progetti un regolatore $u(k) = Kx(k)$ in modo tale che la condizione $x(T) = 0$ si verifichi in tempo finito $T < \infty$ per qualsiasi per qualsiasi stato iniziale $x(0) \in \mathcal{R}^2$.

3. **Osservatore** Dato il servoposizionatore

$$\ddot{\theta}(t) = -\sin\theta(t) + u(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

e un generico angolo di riferimento θ_r si costruisca un osservatore asintotico dello stato assegnando gli autovalori in -2 e -3 indipendentemente da θ_r .

4. **Instabilità** Si consideri il sistema

$$\ddot{\theta}(t) = -\sin\theta(t) + 1,$$

si scriva la rappresentazione di stato e si analizzi la stabilità nella posizione di equilibrio corrispondente a $\theta = \pi/2$ (attenzione: il criterio della linearizzazione dice ...).

5. **www.bastardidentro.com** Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Er$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

si progetti un regolatore $u(t) = Kx(t)$ tale che a) il sistema sia stabile asintoticamente; b) per ogni valore costante del segnale r , la risposta a regime deve essere nulla ($y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$). Nota: non ci sono specifiche sugli autovalori (basta la stabilità as.) e la funzione di trasferimento F da r a y (tale che $y(s) = F(s)r(s)$) deve valere zero per

6. **Filtro ottimo** Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad y(t) = x(t) + w(t)$$

con v e w disturbi non misurabili. Si progetti il filtro

$$\dot{z}(t) = -lz(t) + ly(t).$$

ottimo secondo Kalman.