Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 16 Maggio 2008 - Gestionali [1]

1. **La torre** In assenza di videogiochi, un bambino costruisce ripetutamente una torre avendo a disposizione 4 pezzi cubici. Il primo pezzo é ovviamente stabile. Aggiungendo il secondo la torre rimane in piedi probabilità 1/2, aggungento il terzo con probabilità 1/4, aggiungendo il quarto con probabilità 1/8. Se la torre cade, per convezione la sua altezza è 1. Se la torre é completa (altezza 4) si conteggia tale altezza come $h = 4$, al passo il passo successivo si ricomincia da altezza 1. Si scriva la catena di Markov e si determini la distribuzione asintotica delle probabilità. L'altezza media della torre .... troppo difficile?

2. **La nonna** Una nonna regala al nipote (svogliato) una somma di cui potrà disporre solo dopo la laurea. Gli propone due alternative.

   a) Una somma S_1, che gli procura un interesse mensile (disponibile dopo la laurea) pari a i;

   b) una somma $S_2 > S_1$, che non gli procura interessi.

   Quale è la scelta conveniente sulla base del tempo necessario T (in maesi) per terminare gli studi?

3. **Sistema a ritroso** Se in un sistema Σ $\dot{x}(t) = Ax(t)$ si inverte il tempo $\tau = -t$ si ottiene un sistema Σ^- che evolve a ritroso. Quali affermazioni sono vere? (spiegare).

   a1) la stabilitá asintotica di Σ implica l'instabilità di Σ^-;

   a2) l'instabilitá di Σ implica la stabilità asintotica di Σ^-;

   a3) la stabilità asintotica di Σ implica la stabilità asintotica di Σ^-.

4. **Attuatori** Si consideri il sistema a due vasche la cui matrice di stato è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Si puó scegliere una di queste matrici di ingresso.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   che corrispondono, rispettivamente, a collocare la pompa sulla prima vasca, sulla seconda, simmetricamente sulle due vasche e da una vasca verso l'altra. Quali di queste scelte vanno bene se si ammette la presenza di un sottosistema non–raggiungibilie purchè sia asintoticamente stabile?

5. **Ricostruibilità–osservabilità a tempo discreto**. Un sistema discreto è ricostruibile in un tempo T se dalla conoscenza di $u(k)$ e $y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, T$ é possibile deteminare *univocamente* $x(T)$. Determinare un esempio di sistema discreto non osservabile (ovvero per il quale non si può determinare lo stato iniziale) ma che è ricostruibile in T passi.

6. **Osservabilità sotto campionamento**. Si dica quali di queste affremazioni è vera e si dica perchè.

   - L'osservabilità del sistema a tempo campionato implica la osservabilità (A, C).

   - L'osservabilità di (A, C) implica la osservabilità del sistema a tempo campionato per ogni passo di campionamento $T > 0$.

   Sugg. per la seconda si consideri un sistema avente come matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{AT} = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{bmatrix} \tag{3}$$

[1] Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 16 Maggio 2008 - Elettronici[2]

1. **Massa aggiuntiva** Un sistema oscillante ha come matrici di massa e rigidezza

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\Delta \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

rispettivamente, dove Δ é una massa aggiuntiva. Per quali valori di Δ il sistema ha una frequenza propria (ovvero di risonanza) in $\omega = 1$?

2. **Sensori** Si consideri il sistema a due vasche la cui matrice di stato è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Si puó scegliere una di queste matrici di uscita.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

che corrispondono, rispettivamente, a collocare il sensore sulla prima vasca, sulla seconda, un sensore di volume totale e sensore di differenza dei volumi. Quali di queste scelte vanno bene se si ammette un sottosistema non–osservabile purchè sia asintoticamente stabile?

3. **La torre** In assenza di videogiochi, un bambino costruisce ripetutamente una torre avendo a disposizione 4 pezzi cubici. Il primo pezzo é ovviamente stabile. Aggiungendo il secondo la torre rimane in piedi probabilità 1/2, aggungento il terzo con probabilità 1/4, aggiungendo il quarto con probabilità 1/8. Se la torre cade, per convezione la sua altezza è 1. Se la torre é completa (altezza 4) si conteggia tale altezza come $h = 4$, al passo il passo successivo si ricomincia da altezza 1. Si scriva la catena di Markov e si determini la distribuzione asintotica delle probabilità. L'altezza media della torre .... troppo difficile?

4. **Ricostruibilità–osservabilità a tempo discreto**. Un sistema discreto è ricostruibile in un tempo T se dalla conoscenza di $u(k)$ e $y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, T$ é possibile deteminare *univocamente* $x(T)$. Determinare un esempio di sistema discreto non osservabile (per il quale non si può determinare lo stato iniziale) ma che è ricostruibile in T passi.

5. **Forma canonca di osservabilità** Si consideri il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Si detemini una trasformazione T tale che il sistema si trovi nella forma

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Si determinino i valori degli a_i.

6. **Raggiungibilità sotto campionamento**. Si dica quali di queste affremazioni è vera e si dica perchè.

- La raggiungibilità del sistema a tempo campionato implica la raggiungibilità (A, B).

- La raggiungibilità di (A, B) implica la raggiungibilità del sistema a tempo campionato per ogni passo di campionamento $T > 0$.

Sugg. per la seconda si consideri un sistema avente matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{AT} = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{bmatrix} \tag{9}$$

[2]Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.