Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 22 Giugno 2007 - Elettronici [1]

1. **Determinare il parametro.** Il sistema oscillante

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1(t) &= -3pq_1(t) + pq_2(t)\\ \ddot{q}_2(t) &= +pq_1(t) - 3pq_2(t)\end{aligned}$$

   ammette la frequenza propria $\omega = \sqrt{2}$ (ovvero fra i suoi modi ci sono $\cos(\sqrt{2}t$ e $\sin(\sqrt{2}t)$). Determinare i possibili valori del parametro $p > 0$.

2. **Stabilità robusta.** Tramite la funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ si dica quale è il massimo valore di $\Delta > 0$ per cui il sistema $\dot{x} = Ax(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1+\delta & -2 \end{bmatrix}$$

   è robustamente stabile con $|\delta| \le \Delta$.

3. **Tutti i regolatori.** Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t)\end{aligned}$$

   si determini l'insieme di tutti i regoltori $u(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ per cui il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile.

4. **Retroazione statica dell'uscita.** Tramite retroazione statica dell'uscita, non é possibile assegnare arbitrariamente i valori ad un sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$. Si consideri il sistema raggiungibile e osservabile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   e si faccia vedere che non è possibile assegnare arbitrariamente i due autovalori tramite il regolatore $u(t) = ky(t)$.

5. **Controllo ottimo.** Si consideri il sistema scalare $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$. Si determini il controllo $u(t) = kx(t)$ ottimo rispetto la cifra di merito

$$\int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t))dt$$

6. **Osservatore.** Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= w(t)x_2(t)\\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

   dove $y(t)$ è l'uscita misurate e dove $\omega(t)$ è un segnale misurato (dunque $y(t)$ e $\omega(t)$ sono noti per ogni t), si determini un osservatore asintotico.

[1] Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 14 Giugno 2006 - Gestionali [2]

1. **Sistema statico.** Si determini un regolatore a retroazione dell'uscita per il sistema statico
$$y(t) = au(t)$$
in modo tale che il sistema ad anello chiuso abbia un unico autovalore in -1.

2. **Realizzazione diagonale.** Si determini una realizzazione **minima** in forma diagonale per la funzione di trasferimento
$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

3. **Stabilità robusta.** Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1+\delta & -3 & -3 \end{bmatrix}$$
si determini im massimo valore di Δ per cui il sistema è robustamente stabile per $|\delta| \leq \Delta$. (non fare domande, non far conti e pensa).

4. **Se non fai questo ....** Tramite retroazione dello stato, assegnare gli autovalori in $\{-3, -4\}$ al sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ dove
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. **Analisi della stabilità.** Si consideri il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 2(x_2^2 + 1)x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= \sin(x_1) + x_2x_4 + x_4 \end{aligned}$$
e se ne analizzi la stabilità nell'origine.

6. **Linearizzazione a tempo discreto.** Un sistema lineare discreto $x(k+1) = Ax(k)$ è stabile asintoticamente se e solo se per qualsiasi Q definita positiva, la soluzione P dell'equazione
$$A^T PA - P = -Q$$
è simmetrica e definitita positiva. In tal caso $x^T Px$ è una funzione di Lyapunov per il sistema discreto, infatti
$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = x(k)^T [A^T PA - P]x(k) = -x(k)^T Qx(k) < 0, \quad x(k) \neq 0.$$
Dimostrare che un sistema non lineare
$$x(k+1) = Ax(k) + R(x(k))$$
dove $R(0) = 0$ e R é un infinitesimo di ordine superiore ($R(x)/\|x\| \to 0$ per $\|x\| \to 0$), è asintoticamente stabile nel punto di equilibrio se il sistema $x(k+1) = Ax(k)$ è asintoticamente stabile.

[2] Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.