Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 24 Maggio 2007 - Gestionali[1]

1. **La moneta.** Una moneta viene lanciata infinite volte. Si vince una somma μ ogni volta che appaiono due teste T consecutivamente. Scrivere una catena di Markov a tre stati che descrive il fenomeno e determinare la distribuzione asintotica.

2. **Vincita media.** Nell'esercizio precedente dire quanto vale la vincita (istantanea, ovvero ad ogni giocata) media nel lungo periodo.

3. **Stabilità della discretizzazione.**

   D_1: $\dot{x} = Ax$ asintoticamente stabile implica $x(k+1) = e^{AT}x(k)$ asintoticamente stabile per ogni $T > 0$?

   D_2: $\dot{x} = Ax$ asintoticamente stabile implica $x(k+1) = [I + TA]x(k)$ asintoticamente stabile per ogni $T > 0$?

4. **Cancellazioni vietate** Una cancellazione è vietata se viene eliminata una coppia polo–zero non asintoticamente stabile. Dire per quali valori di μ vi sono cancellazioni vietate nella funzione di trasferimento
$$\frac{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + \mu}{(s+3)(s+2)(s+1)(s^2+1)}$$

5. **Non fare domande e pensa.** Si consideri il sistema
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & \alpha & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \beta & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Dire per quali valori dei parametri il sistema è raggiungibile.

6. **Realizzazione diagonale** Deteminare una realizzazione con A in forma diagonale per la funzione di trasferimento
$$\frac{3(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

7. **La costante.** Dato il sistema avente funzione di trasferimento
$$\frac{s+1}{s^2+1}$$

   assunto $|u(t)| \leq 2$ si determini una costante β tale che per $x(0) = 0$ si abbia che: per ogni $t \geq 0$ $|y(t)| \leq \beta$.

[1] Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 24 Maggio 2007 - Elettronici[2]

1. **Parallelo di serie.** Si consideri il parallelo di due impedenze: Z_1 costituita dalla serie di una capacità C e una resistenza R_C; Z_2 costituita dalla serie di una induttanza L e una resistenza R_L. Assunto come ingresso la tensione applicata a tale parallelo, si dica per quali valori dei parametri il sistema è raggiungibile. Assunta come uscita la tensione ai capi di R_L, si dica per quali valori dei parametri è osservabile.

2. **Non fare domande e pensa.** Si consideri il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \beta & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dire per quali valori dei parametri il sistema è raggiungibile.

3. **Realizzazione bidiagonale.** Deteminare una realizzazione con A in forma bidiagonale ovvero del tipo

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mu & \nu & \rho \end{bmatrix} \tag{3}$$

per la funzione di trasferimento

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

4. **Legame.** Si consideri il sistema (A, B, C) raggiungibile e osservabile. La sua funzione di trasferimento è

$$\frac{q_{n-1}s^{n-1} + \ldots + q_1 s + q_0}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_1 s + p_0}$$

Si consideri il sistema di equazioni algebriche

$$[B \ AB \ A^2B \ \ldots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -A^n B$$

Dire quale è il legame (se esiste) tra le soluxioni x_i e i parametri della funzione di trasferimento.

5. **Coseno di una matrice ?** Data una funzione analitica $f(s)$, s complessa, e una matrice diagonalizzable, M, la funzione $f(M)$ è definita come $Tf(\Lambda)S$, dove T è la matrice degli autovettori, S la sua inversa e $f(\Lambda) = diag[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)]$. Si dimostri che se M è una matrice simmetrica definita positiva, allora

$$\frac{d^2}{dt^2} cos(Mt) = -M^2 cos(Mt)$$

6. **Applicazione ai sistemi oscillanti.** Che implicazioni ha l'esercizio precedente sulla soluzione del sistema

$$\ddot{q}(t) = -M^2 q(t)?$$

dove $q(t) \in R^m$, con condizioni iniziali $q(0) = q_0$ e $q'(0) = 0$.

7. **Stabilità della discretizzazione.**

D_1: Dimostrare che $\dot{x} = Ax$ asintoticamente stabile implica $x(k+1) = e^{AT}x(k)$ asintoticamente stabile per ogni $T > 0$.

D_2: Dimostrare che $\dot{x} = Ax$ asintoticamente stabile implica $x(k+1) = [I + TA]x(k)$ asintoticamente stabile per ogni $T > 0$.

[2] Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.