Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 14 Giugno 2006 - Gestionali[1]

1. **Creare una catena di Markov**. Sia data una matrice A $n \times n$ a coefficienti non negativi. Sia $B = [0\ 0\ \ldots 0\ \beta]^T$ una matrice di ingresso con una sola componente non nulla $\beta > 0$. Sotto quali condizioni esiste un vettore di retroazione K tale che $A + BK$ è una matrice di Markov? Determinare le componenti di K.

2. **Osservatore**. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} w & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con w parametro costante $1 \leq w \leq 2$, e u ingresso noto. Si determini un osservatore dello stato (avente matrici funzioni di w) tale che l'errore di stima $e(t)$ converga a zero (per qualsiasi w) con modi a parte reale inferore a -1.

3. **Analisi della stabilità**. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_1x_2 - 2x_1^2 - x_4 \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 + x_2 - 5x_1^5 - 7x_4 \\ \dot{x}_4 &= 6x_1^2 + 2x_1 - x_3 - x_4 \end{aligned}$$

e se ne analizzi la stabilità nell'origine.

4. **Equazione di Lyapunov duale**. Come noto $\dot{x} = Ax$ è stabile asintoticamente se e solo se per qualunque Q simmetrica definita positiva, la soluzione P di $A^TP + PA = -Q$ è simmetrica definita positiva. Si faccia vedere che vale lo stesso per l'equazione duale, ovvero fissata R simmetrica definita positiva, la soluzione S di

$$AS + SA^T = -R$$

è simmetrica definita positiva se e solo se A è stabile.

5. **Realizzazione diagonale**. Determinare una realizzazione minima (A, B, C) della funzione di trasferimento

$$\frac{s+1}{(s+3)(s^2+3s+2)}$$

avente matrice di stato A in forma diagonale.

6. **Stabilità robusta**. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2sin(x_1) + px_1 - q(x_2 + x_1) \end{aligned}$$

avente $(0, 0)$ quale punto di equilibrio, dove p e q sono parametri incerti costanti tali che $|p| \leq 1/2$ e $|q| \leq 1/2$. Si verifichi la stabilità robusta nell'origine di tale sistema.

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 14 Giugno 2006 - Elettronici [2]

1. **PID digitale**. Si indichi come è possibile implementare tramite una opportuna equazione alle differenze il seguente PID digitale

$$F(z) = C_I \frac{z}{z-1} + C_P + C_D \frac{z-1}{z}$$

2. **Trasformazione rette-cerchi**. Dimostrare che il polinomio $P(z)$ ha radici a modulo inferiore a 1, $|\lambda_i| < 1$, se e solo se la funzione razionale ottenuta con la trasformazione $z = (s+1)/(s-1)$

$$P\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$$

ha radici a parte reale negativa.

3. **Sistema non linearizzabile**. Sia dato il sistema scalare

$$\dot{x} = f(x) = -k(x)x$$

$x \in R$, dove $k(x) = 2$ per $x > 0$, $k(x) = 4$ per $x < 0$, $k(0) = 3$ (nota: f è continua). Esaminare la stabilità del sistema.

4. **Impatto**. Un corpo si muove con la seguente legge $\dot{x} = A_i x$ dove A_1 rappresenta il moto libero e A_2 l'impatto

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } x_1 \geq 0, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } x_1 < 0$$

La posizione iniziale è $x_1(0) = 1$ la velocità iniziale è $x_1(0) = -1$. Dire come evolve il moto. Dire in che istante e con che velocità il corpo torna nella posizione iniziale. Nota:

$$e^{A_1 t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

5. **Osservatore**. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} w & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con w parametro costante $1 \leq w \leq 2$, e u ingresso noto. Si determini un osservatore dello stato (avente matrici funzioni di w) tale che l'errore di stima $e(t)$ converga a zero per qualsiasi w. Si determini l'insieme di tutte le matrici L per cui tale condizione è garantita.

6. **Realizzazione diagonale**. Determinare una realizzazione minima (A, B, C) della funzione di trasferimento

$$\frac{s+2}{(s+3)(s^2+3s+2)}$$

avente matrice di stato A in forma diagonale.