

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 16 Maggio 2006 - Gestionali¹

1. **Catene simmetriche.** Si dimostri che se in una catena di Markov avente autovettore unitario semplice (di molteplicità 1) in cui per ogni coppia di stati i, j la probabilità di transizione da i a j è uguale alla probabilità di transizione da j a i ($A_{ij} = A_{ji}$), la probabilità asintotica è uguale in tutti gli stati $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$.

2. **La maggiorazione.** Dato il sistema a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

se ne analizzi la stabilità. Per tale sistema vale maggiorazione del tipo

$$\|x(k)\| \leq C\alpha^k \|x(0)\|$$

per $\alpha \geq 0$ opportuno. Si determini un possibile α (si ricordi che $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$).

3. **La più piccola maggiorazione** Nel punto precedente, dica quale è il più piccolo valore di $\alpha \geq 0$ e si determini C .

4. **Sistema con ritardo.** L'ordine di una equazione alle differenze è la massima differenza tra i tempi che compaiono nelle variabili. Si consideri l'equazione alle differenze di ordine 3 $y(k+3) = u(k)$ e si scriva un sistema equivalente di 3 equazioni alle differenze del primo ordine. Si analizzi la stabilità di tale sistema.

5. **La risposta impulsiva.** Si consideri il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad C = [\beta \quad 1 \quad 0] \quad D = 0. \quad (2)$$

Si dica per quali valori di α e β la risposta impulsiva vale $6e^{-t}$.

6. Si trovino esempi di:

I due sistemi raggiungibili che se connessi in parallelo diano origine ad un sistema non raggiungibile;

II due sistemi osservabili che se connessi in parallelo diano origine ad un sistema non osservabile;

III due sistemi uno non raggiungibile e uno osservabile che se connessi in serie, diano origine ad un sistema raggiungibile e osservabile;

IV due sistemi uno raggiungibile e uno non osservabile che se connessi in serie diano origine ad un sistema raggiungibile e osservabile;

7. **Realizzazione minima.** Sia dato il sistema a tempo continuo

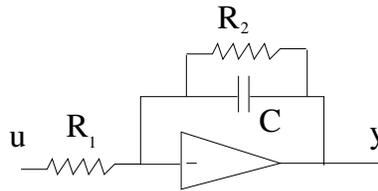
$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3)$$

Si calcoli una realizzazione minima della sua matrice delle funzioni di trasferimento.

¹Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 16 Maggio 2006 - Elettronici ²

- Determinare il parametro.** Dato il sistema $\ddot{\Theta}(t) = -\omega^2\Theta(t)$, sapendo che $\Theta(0) = 0$, $\dot{\Theta}(1) = 2$, $\Theta(2) = 0$, $\Theta(3) = -2$, determinare un possibile valore di $\omega > 0$ e una possibile valore di $\dot{\Theta}(0)$.
- Unicità** I valori determinati nell'esercizio precedente sono unici? (spiegare).
- Controllo ad anello aperto.** Dato il sistema $J\ddot{\Theta}(t) = u(t)$, determinare una funzione di ingresso tale che, assunto $\Theta(0) = \dot{\Theta}(0) = 0$, si abbia che $\Theta(T) = \bar{\Theta}$ e $\dot{\Theta}(T) = 0$, con $\bar{\Theta}$ e $T > 0$ assegnati.
- Circuito.** Determinare i valori dei componenti del dispositivo in figura affinché: per $u(t) \equiv \bar{u}$



si abbia, a regime, $y_\infty = -\bar{u}$; l'amplificazione della risposta a regime al segnale $\cos(2t)$ sia $A = 1/2$.

- Raggiungibilità sotto campionamento.** Si consideri il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sapendo che

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

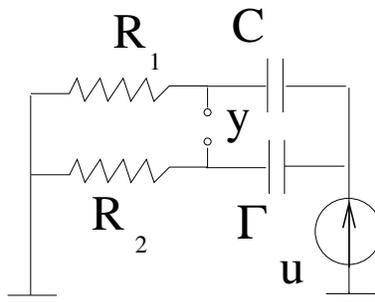
si dica se il sistema a tempo campionato è raggiungibile per tutti i valori del passo $T > 0$.

- La risposta impulsiva.** Si consideri il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad \beta] \quad D = 0. \quad (4)$$

Si dica per quali valori di α e β la risposta impulsiva vale $6e^{-t}$.

- Trovare i valori.** Per quali condizioni iniziali e per quali valori della capacità Γ si ha che la tensione y ai morsetti del circuito in figura è nulla qualsiasi sia $u(t)$?



²Alcuni dei quesiti proposti potrebbero essere non solubili. In tal caso spiegare perchè.