**Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 12 Maggio 2005 - A1 Gestionali**

1. Dato un sistema lineare asintoticamente stabile $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e $R$, matrice simmetrica definita positiva, l'energia del transitorio con condizioni iniziali $x_0$ é definita dalla la quantità

$$E(x_0) = \int_0^{\infty} x(t)^T R x(t)\ dt$$

Si ha che $E(x_0) = x_0^T P x_0$ dove $P$ è calcolabile tramite una opportuna equazione di Lyapunov. Scrivere tale equazione e giustificare la risposta.

2. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= q_0 - \alpha s(t)\sqrt{h(t)} \\ \dot{s}(t) &= -k(h(t) - \bar{h}) \end{aligned}$$

dove $\bar{h} > 0$ è un riferimento e dove $\alpha$ e $q_0$ sono costanti assegnate. Si determini il punto di equilibrio e si dica per quali valori di $k$ il sistema linearizzato ha risposta libera priva di oscillazioni (anche se smorzate).

3. Si consideri il sistema la cui descrizione ingresso–uscita è

$$y(s) = \frac{s}{s^2 - ps + q} u(s)$$

in cui i parametri costanti e incogniti $p$ e $q$ sono vincolati come segue $0 < p^- \leq p \leq p^+$ e $0 < q^- \leq q \leq q^+$ dove $p^-$, $p^+$, $q^-$ e $q^+$ sono valori assegnati. Si consideri il regolatore

$$u(s) = -k(y(s) - \bar{y}(s))$$

dove $\bar{y}(s)$ è il riferimento. Si dica per quali valori di $k$ il sistema è robustamente stabile.

4. La velocità di convergenza di un sistema lineare invariante $\dot{x} = Ax$ è un parametro $\beta > 0$ per cui ogni modo del sistema $e^{\lambda t}$ è tale che $Re(\lambda) \leq -\beta$. Dato il sistema lineare

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

determinare la massima velocità di convergenza ottenibile tramite retroazione dello stato.

5. Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^3 \end{aligned}$$

si dimostri l'instabilità nell'origine (si usi la funzione di Cetaev $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$).

6. Data la funzione di trasferimento

$$w(s) = \frac{1}{Ms^2 + s + K}$$

si terminino i parametri (positivi) incogniti $M$ e $K$ sapendo che: a) la risposta a regime al gradino è $y_\infty = 1$, b) la risposta a regime all'ingresso $\cos(t)$ è $y(t) = \cos(t - \pi/2)$

**Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 12 Maggio 2005 - A2 Elettronici**

1. Si consideri il sistema termico

$$\begin{aligned}\dot{T}_1(t) &= -\alpha(T_1(t) - T_2(t)) + q(t)\\ \dot{T}_2(t) &= +\beta(T_1(t) - T_2(t)) - \gamma(T_2(t) - T_3(t))\end{aligned}$$

dove $\alpha$ $\beta$ e $\gamma$ sono parametri, $q(t)$, $T_3(t)$ sono grandezze note e $T_2(t)$ è l'uscita misurata. Si scrivano le equazioni di un osservatore per la stima di $T_1(t)$.

2. La velocità di convergenza di un sistema lineare invariante $\dot{x} = Ax$ è un parametro $\beta > 0$ per cui ogni modo del sistema $e^{\lambda t}$ è tale che $Re(\lambda) \leq -\beta$. Dato il sistema lineare

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

determinare la massima velocità di convergenza ottenibile tramite retroazione dello stato.

3. Data la funzione di trasferimento

$$w(s) = \frac{1}{Ms^2 + s + K}$$

si terminino i parametri (positivi) $M$ e $K$ sapendo che: a) la risposta a regime al gradino è $y_\infty = 1/4$, b) la risposta a regime all'ingresso $\cos(2t)$ è $y(t) = (1/2)\cos(2t - \pi/2)$

4. Si consideri l'equazione di un manipolatore

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + H(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + K(q(t)) = \tau(t)$$

dove $q(t) \in \mathcal{R}^m$ e dove $M(q)$, $H(q, \dot{q})$ e $K(q)$ sono funzioni note, $\tau$ è il vettore delle forze e $M(q)$ è una matrice quadrata e invertibile per ogni $q$. Assunti misurabili i vettori $q$ e $\dot{q}$, una tecnica per la progettazione del controllo consiste nel considerare la legge

$$\tau(t) = H(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + K(q(t)) + M(q(t))u(t)$$

dove il nuovo ingresso $u(t)$ si ottiene tramite una seconda retroazione. Indicare come.

5. Un sistema lineare invariante ha il seguente polinomio caratteristico

$$p(s) = s^3 + s^2 + bs + c$$

dove $b$ e $c$ sono parametri costanti e incerti tali che $b^- \leq b \leq b^+$ $c^- \leq c \leq c^+$. Determinare sotto quali condizioni su $b^-$, $b^+$, $c^-$ e $c^+$ tale sistema è robustamente stabile.

6. Dato il sistema $\dot{x}(t) = u(t)$ si determini il regolatore ottimo secondo la cifra di merito

$$\int_0^\infty [x(t)^2 + ru(t)^2]dt.$$