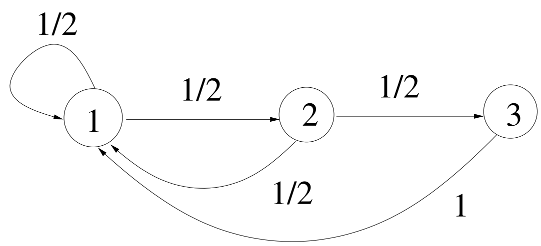
Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 12 Maggio 2005 - A1

1. Si consideri la catena di Markov le cui probabilitá di transizione sono quelle riportate nella figura. Determinare la distribuzione asintotica delle probabilita nei tre stati.



2. Sia dato il sistema discreto (A, B, C) ad un ingresso ed una uscita, raggiungibile, osservabile e asintoticamente stabile. Si assuma $x(0) = 0$ e $|u(k)| \leq M$. Si determini un valore μ tale che, per ogni $k > 0$

$$|y(k)| \leq \mu M$$

3. Si consideri l'automa a sei stati con insieme degli ingressi $U = \{1, 2, 3\}$ la cui matrice di transizione è

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(F_{ij} rappresenta lo stato successivo a allo stato j ise l'ingresso è i). Dire quale è il numero minimo di passi per transitare dallo stato 1 allo stato 5.

4. Si trovi una realizzazione minima del sistema avente rappresentazione di stato

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 1. \tag{2}$$

5. Sia dato il sistema a tempo continuo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Assunto $x(0) = 0$ e fissato $T > 0$, si determini un ingresso $u(t)$ in modo tale da raggiungere uno stato non nullo che produca l'uscita nulla $y(T) = 0$.

6. Dato il sistema "conto corrente" con interesse i

$$x(k+1) = (1+i)x(k) + r(k)$$

e dato il debito iniziale $-C$, si determini una regola per la determinazione delle rate affinchè i) ogni rata sia proporzionale al debito ($r(k) = -\mu x(k)$); ii) in T passi, dove $T > 0$ è un intero assegnato, il debito sia dimezzato (determinare μ).

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 12 Maggio 2005 - A2

1. Si realizzi la funzione di trasferimento
$$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_1)}$$
tramite un dispositivo digitale fissato il passo di campionamento $T > 0$.

2. Realizzare il filtro precedente tramite un dispositivo analogico.

3. Sia dato il sistema a tempo continuo con lo stato iniziale indicato
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$
Si dimostri che l'insieme di tutti gli stati raggiungibili a partire da tale stato iniziale è la triscia
$$\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) : \quad 0 < x_2 < 1, \quad x_1 \ \text{ arbitrario}\}$$

4. Sia dato il sistema a tempo continuo
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{5}$$
Si determini l'insieme di tutti i valori α e β per cui la risposta libera dell'uscita non presenta oscillazioni permanenti, qualunque sia lo stato iniziale.

5. Il parallelo di due sistemi si ottiene fornendo a ciascuno lo stesso ingresso e sommandone le uscite. Si consideri il sistema del primo ordine Σ_1 avente la funzione di trasferimento
$$\frac{1}{s+1}$$
e il sistema Σ_2
$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$
Si determino i parametri α, β e γ in modo tale che il parallelo abbia funzione di trasferimento nulla.

6. Dato un sistema ad un ingresso ed una uscita si consideri la matrice $n \times n$ definita come
$$A = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^nB \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots & CA^{n+1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & CA^{n+1}B & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}.$$
Dimostrare che tale matrice ha rango pieno (ovvero risulta invertibile) se e solo se il sistema (A, B, C) é raggiungibile e osservabile.