Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 09 Giugno 2004 - A1

1. Scrivere le equazioni per l'implementazione digitale del regolatore del primo ordine avente funzione di trasferimento
$$F(s) = k\frac{s+b}{s+a}$$
dato il generico passo di campionamento T.

2. Si consideri il sistema
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\Phi(x_1(t)) + u(t)\end{aligned}$$
dove $\Phi(x_1)$ è una funzione continua nota. Si determini un regolatore a retroazione dello stato che stabilizzi il sistema nel generico stato di equilibrio
$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
qualunque sia la condizione iniziale $x(0)$.

3. Dato il sistema
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\Phi(x_1(t)),\end{aligned}$$
si assuma che $\Phi(x_1)$ sia una funzione dispari ($\Phi(-x_1) = -\Phi(x_1)$) continua e strettamente crescente. Si dimostri la stabilità del sistema nell'origine usando la funzione di Lyapunov candidata
$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \Phi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}x_2^2$$
La stabilità può essere di tipo asintotico?

4. Dato il sistema
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t)x_1(t) - x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= (4+\mu)x_1(t) + x_1(t)^3 - 2x_2(t)\end{aligned}$$
dove μ è un parametro non noto **ma costante nel tempo**. Determinare il margine di stabilità robusta ovvero l'estremo superiore dei valori di M per cui il sistema è stabile nell'origine per tutti i valori di μ tali che
$$|\mu| \le M$$

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 09 Giugno 2004 - A2

1. Un sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$ è asintoticamente stabile se e solo se ammette una funzione di Lyapunov quadratica del tipo $V(x) = x^T Px$ (la cui derivata $\dot{V}(x)$ è definita negativa) con P simmetrica definita positiva. Si dimostri che se A é matrice simmetrica, allora il sistema è asintoticamente stabile se e solo se ammette la funzione di Lyapunov
$$V(x) = x^T x.$$

2. Si consideri il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \Phi(x_1(t)) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$
dove Φ è una funzione nota. Determinate un osservatore dello stato il cui errore di stima converga a 0 *qualunque siano le sue condizioni iniziali e quelle del sistema*.

3. Dato il sistema
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + 3x_2(t)^3 + x_1(t)x_2(t)^2 + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -2x_3(t) + x_1(t)^3 + u_1(t) \end{aligned}$$
si determini una retroazione dello stato che stabilizzi il sistema nell'origine.

4. Dato Il sistema
$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) + E\bar{d}$$
con $x(k) \in \Re^n$ e con B ed E matrici assegnate. Il termine $\bar{d}$ é da considerarsi quale ingresso esterno costante. Si dica sotto quali condizioni il sistema è raggiungibile rispetto all'ingresso di controllo u. Assunta la raggiungibilità e assunto noto il valore costante di $\bar{d}$, si determini un'azione di controllo che porti il sistema ad uno stato generico assegnato $x(T) = \bar{x}$, per qualche valore di T finito, e mantega lo stato in tale punto, $x(k) = \bar{x}$, per $k > T$.