Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 11 Maggio 2004 - A1

1. Si consideri il sistema
$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - u_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u_2(t).$$
Data la condizione iniziale generica $x_1(0)$, $x_2(0)$ si determini l'ingresso che, nel tempo assegnato T, porta il sistema nello stato generico $x_1(T) = x_{1fin}$, $x_2(T) = x_{2fin}$ (sugg. cercare un ingresso costante).

2. Si consideri il sistema
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$
Per quali valori di α e β il sistema è controllabile? Che legame c'è fra i valori di α e β che rendono il sistema non controllabile e gli autovettori di A? Per quali valori di α e β il sistema è osservabile?

3. Determinare un automa che, date in ingresso due sequenze binarie rappresentanti due numeri interi n_1 e n_2, ordinate nel senso del bit meno significativo (ovvero tale bit arriva per primo, per esempio, se la tringa è $8 = [001]$ arriva per primo lo 0), produca come uscita finale 1, 2 o 0 a seconda che $n_1 > n_2$, $n_2 > n_1$, o $n_1 = n_2$, rispettivamente.

4. Si consideri il sistema
$$x(k+1) = Ax(k)$$
dove la matrice quadrata A ha termini non negativi $A_{ij} \geq 0$. Questo implica che se $x(0)$ ha componenti non–negative allora, per ogni $k > 0$, $x(k)$ ha componenti non negative. Tale sistema viene detto catena di Markov se vale anche la seguente proprietà: detto
$$u^T = [\, 1\ 1\ \ldots\ 1\,]$$
"il vettore di uni" allora
$$u^T x(k) = 1 \quad \text{implica} \quad u^T x(k+1) = 1$$
(si noti che imporre $u^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ e $x_i \geq 0$ equivale a dire che il generico vettore $x(k)$ può essere interpretato come distribuzioni di probabilità). Si dica quale condizione sulla matrice A garantisce che il sistema è una catena di Markov.

5. Sia dato il sistema lineare a tempo continuo
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$
Si considerino tutti i possibili ingressi $u(t)$ soggetti al vincolo $|u(t)| \leq 1$. Si determini l'estremo superiore di $|y(t)|$, per $t \geq 0$, a partire da condizioni iniziali nulle.

6. Una norma di matrice indotta dalla norma vettoriale $\|x\|$ è una funzione $\|A\|_*$ definita come
$$\|A\|_* \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$
Una norma di matrice ha dunque la proprietà
$$\|Ax\| \leq \|A\|_* \, \|x\|.$$
Si dimostri che se $\|A\|_* < 1$ allora, necessariamente, gli autovalori di A hanno modulo inferiore a 1 (sugg. si consideri il sistema a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k) \ldots$).

Esercitazione scritta di Teoria dei Sistemi 11 Maggio 2004 - A2

1. Data l'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

scrivere una rappresentazione di stato equivalente. Assunto che $y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + 1$, e $u(t) \equiv 1$, determinare le condizioni iniziali (rispetto alla rappresentazione scelta).

2. Sia A una matrice quadrata avente autovalori distinti. Si dimostri che una base del sottospazio non osservabile del sistema a tempo continuo (A, B, C) è data da tutti gli autovettori associati agli autovalori non osservabili.

3. Si realizzi la funzione di trasferimento

$$f(s) = -\frac{as}{1 + \tau s}$$

con un amplificatore operazionale, un condensatore e due resistenze, indicando i loro valori in funzione di a e τ.

4. Si consideri il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Per quali valori il sistema è raggiungibile? Per quali valori il sistema è BIBO stabile?

5. Un insieme $P \subseteq \Re^n$ è convesso se per ogni coppia di punti $x_1 \in P$ e $x_2 \in P$ allora anche il segmento che li congiungeè interamente contenuto in P

$$sgm = \{x = x_1\alpha + (1 - \alpha)x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset P$$

Si dimostri che se in un sistema lineare invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avente un solo ingresso ($m = 1$) limitato come $|u(t)| \leq u_{max}$, l'insieme di raggiungibilitaà nell'intervallo $[0, T]$, $T > 0$ è convesso.

6. Ad una impedenza R–C serie, con capacità C e resistenza R, inserita in una rete elettrica, viene collegato in parallelo un altro cicuito R–C serie con capacità fissata C_{ext} e resistenza R_{ext} da determinarsi. Si determini R_{ext} in modo tale che, se inizialmente le tensioni dei condenastori sono nulle, si abbia ad ogni istante che la tensione ai capi del condensatore C_{ext} è pari a quella del condensatore C. Che legame c'è con la raggiungibilità?