Prima Provetta di Teoria dei Sistemi, a.a. 2001/02

1. Sia dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y = Cx(t)$,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con condizioni ininiziali $x(0) = 0$ e ingrsso $u(t) = 1$, $t \geq 0$, determinare $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

2. Dato lo stesso sistema dell'esercizio precedente, con $u(t) = 0$, $t \geq 0$, e nota l'uscita $y(t) = e^{-2t}$, determinare le condizioni iniziali $x(0)$. (Una possibile soluzione è quella di considerare i valori di $y(0)$ e di $\dot{y}(0) = C\dot{x}(0) \ldots$)

3. Si dimostri che se la matrice quadrata reale A ha tutti i coefficienti non–negativi allora il sistema $\dot{x} = Ax$ non è asintoticamente stabile (lo si puo' dedurre facilmente considerando condizioni iniziali opportune ...)

4. Si dimostri che se un sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ con A matrice reale 2×2, B matrice reale 2×1, con $B \neq 0$, ha due autovalori complessi coniugati, allora il sistema è necessariamente raggiungibile.

5. Si consideri un sistema del secondo ordine la cui funzione di trasferimento é $W(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$, l'ingresso $u = e^{-t}$ e l'uscita $y(t) = 0$. Si determinino le condizioni iniziali $x_1(0)$ e $x_2(0)$.

6. Dato il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, uno dei metodi per calcolare i coefficienti del polinomio caratteristico $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ è quello di risolvere il sistema lineare ad n equazioni ed n incognite

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = -A^nB$$

Si giustifichi tale algoritmo e di dica sotto quali condizioni sul sistema (A, B) il metodo funziona.

7. Dato il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si dica per quali valori del parametro α tale sistema è esternamente (BIBO) stabile.

8. Determinare, per $k > 0$ l'espressione di

$$\begin{bmatrix} \mu & -\mu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix}^k$$

Nota. Alcuni degli esercizi proposti potrebbero essere *non* solubili. In questo si chiede di spiegare il perchè..