Seconda Provetta di Teoria dei Sistemi, a.a. 2000/01

1. (Controllo attivo di vibrazioni). Si consideri il sistema rappresentato dall'equazione

$$y^{(4)}(t) + y^{(2)}(t) = u(t).$$

Si scriva una rappresentazione di stato per tale sistema in modo che le variabili di stato siano $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = x_1'(t)$, $x_3(t) = x_2'(t)$ e $x_4(t) = x_3'(t)$. Determinare un controllo a retroazione dello stato

$$u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + k_4 x_4(t)$$

in modo tale che il sistema sia asintoticamente stabile e abbia radici coincidenti.

2. (Il punto di equilibrio) Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - (x_1(t) - 1)^3 - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - \alpha\sqrt{x_2(t)} \end{aligned}$$

Si determini il parametro α in modo che il sistema ammetta un punto di equilibrio avente prima componente $\bar{x}_1 = 1$. Si studi la stabilita' di tale punto di equilibrio.

3. (Classico) Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_1(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

Si costruisca un regolatore basato sulla retroazione dello stato stimato allocando gli autovalori dell'osservatore in $-10, -8$ e gli autovalori del regolatore in $-2, -4$.

4. (Saturazione del controllo). Si dice che il controllo satura quando raggiuge dei valori limite, oltre i quali non puo' arrivare. Certi sistemi controllati, a causa della saturazione del controllo possono diventare instabili. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t) \\ u(t) &= -sat(x_2(t)) \end{aligned}$$

dove $sat(x) = 2atan(\mu x)/\pi$ é una funzione di saturazione e dove $\mu > 0$ é un parametro. Si dimostri, tramite la fuzione di Lyapunov

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

che questo sistema e' globalmente stabile cioe' che lo stato converge a zero a partire da qualunque condizione iniziale.

5. (Matrice definita positiva) Si dimostri che se R e' una matrice quadrata invertibile, allora $R^T R$ é simmetrica e definita positiva.

6. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + v) \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con (A, B) raggiungibile, dove v é un ingresso esterno e si consideri il regolatore (a reazione dello stato stimato)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC + BK)\hat{x} + Bv + Ly \\ u &= K\hat{x} \end{aligned}$$

Si dimostri che se (A-LC) é stabile, $\hat{x}(t) - x(t) \to 0$ e che la funzione di trasferimento da v a y é la stessa che si otterrebbe applicando la reazione dello stato reale $u = Kx$.