Prima Provetta di Teoria dei Sistemi, a.a. 2000/01

1. (Troppo facile) Calcolare esattamente e^{At} con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (usare lo sviluppo in serie).

2. (Vado dove mi pare quando mi pare) Dimostrare che se un sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ è completamente raggiungibile (da zero), allora ogni stato x_2 è raggiungibile da ogni stato x_1 in un itervallo $[0, \tau]$ arbitrario (ovvero $x(0) = x_1$, $x(\tau) = x_2$ e non ci sono limiti su $u(t)$).

3. (Una triste storia universitaria) Un docente concede esami con cadenza regolare e decide che ad ogni appello la percentuale di bocciati sarà esattamente λ (con $0 < \lambda < 1$ fissato). Ogni studente si presenta ad ogni appello (fino al superamento dell'esame). Assunto che all'appello k–esimo si presentano $u(k) = u_0 = cost.$ studenti che non hanno mai sostenuto l'esame, e assunto che il numero iniziale di studenti è 0, come evolve nel tempo il numero di studenti in attesa? (si ipotizzi che ci siano molti studenti, così da poter assumere che il numero degli studenti sia un numero reale anzichè intero).

4. (Sull'inversa) Dimostrare che se una matrice A è invertibile allora gli autovalori dell'inversa coincidono con gli inversi degli autovalori (è concesso assumere che A e' diagonalizzabile, si ricordi che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

5. (Deteminare il sistema) determinare una terna di matrici A, B, C di un sistema la cui matrice di osservabilità è
$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$
e la cui funzione di trasferimento è $\frac{s}{(s+1)(s+2)}$.

6. (Sui compressori) Un impianto costituito da un compressore–condotto–serbatoio è descritto, per piccole variazioni rispetto al punto di equilibrio, dalle equazioni
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= B(\dot{\Psi} x_1(t) - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{B}(x_1(t) - \dot{\Gamma} x_2(t)) \end{aligned}$$
dove $\dot{\Psi}$ e $\dot{\Gamma}$ sono parametri che rappresentano le pendenze delle caratteristiche del compressore e della valvola di uscita del serbatoio. Considerazioni fisiche assicurano che $\dot{\Psi}\dot{\Gamma} < 1$ e $\dot{\Gamma} > 0$. La stabilità dipende dal punto di lavoro (che è funzione della chiusura della valvola) in quanto i parametri $\dot{\Psi}$ e $\dot{\Gamma}$ variano in funzione di tale punto. Dire sotto quali condizioni su $\dot{\Psi}$ e $\dot{\Gamma}$ il sistema è asintoticamente stabile (localmente).

7. (Implementazione digitale) La rete anticipatrice $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+4)}$ è associata al sistema lineare invariante
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -4x(t) + u(t) \\ y(t) &= -3x(t) + u(t) \end{aligned}$$
Scrivere il sistema a tempo campionato per l'implementazione digitale con passo di campionamento $T > 0$.

8. (Da dove è partito?) Dato il sistema
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
si assuma che $y(t) = -e^{-t}$. Determinare le condizioni iniziali del sistema.

9. (Sulla raggiungibilità) Esiste il seguente teorema: (A, B) è raggiungibile se e solo se per qualsiasi autovalore di A, $\lambda \in \sigma(A)$ la matrice $[\lambda I - A|B]$ ha rango pieno (I è la matrice identità). Dimostrare la necessità della condizione. (Sugg. per assurdo, se $rank[\lambda I - A|B] < n$ esiste un vettore x tale che $x^T[\lambda I - A|B] = 0$, che è un autovettore sinistro di A associato a λ ... (ora ho detto troppo!)).

10. (Carognissimo!) Dimostrare la sufficienza della condizione del teorema usando la forma di Kalman di raggiungibilità.

11. (Il sistema duale) Il duale di un sistema $\Sigma = (A, B, C)$ si ottiene trasponendo le matrici e scambiando B e C: $\Sigma^* = (A^T, C^T, B^T) = (A^*, B^*, C^*)$. Lo spazio degli stati rimane di dimensione n mentre il numero di ingressi diventa il numero delle uscite e viceversa. Dimostrare che se $\Sigma = (A, B, C)$ è completamente raggiungibile allora $\Sigma^* = (A^T, C^T, B^T)$ è completamente osservabile e viceversa.

12. (Quando tutto é finito) Quanto vale la risposta a regime relativa all'ingresso $u(t) = 1$, $\forall t$, del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(i conti richiesti sono pochi se si trova la strada giusta).

13. (I tre ingegneri) Tre ingegneri progettano ciascuno un pilota automatico per un inbarcazione il cui compito è quello di mantenere una rotta (supponiamo $\theta = 0$). Una volta applicati tali controlli, $\theta(t)$ evolve secondo l'equazione

$$\theta''(t) + \xi_i \theta'(t) + \kappa_i \theta(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

dove $(\xi_1, \kappa_1) = (0.001, 1)$, $(\xi_2, \kappa_2) = (2, 1)$, $(\xi_3, \kappa_3) = (1, 0.002)$, sono i coefficienti calcolati rispettivamente dai tre personaggi. Quale controllo scegliereste (nell'ipotesi che con quel natante ci dovete navigare a lungo)? Motivare la risposta.

14. (Calcolo semplice). Dimostrare che se A non ha autovalori nulli allora

$$\int_0^T e^{A\sigma} \, d\sigma = A^{-1}[e^{AT} - I].$$

(Si assuma che A abbia autovalori distinti).

15. (Convergenza a 0) Dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $1 + j$, $1 - j$, -3, dire per quali condizioni iniziali la soluzione è tale che $x(t) \to 0$.

Nota. Alcuni degli esercizi proposti sono *non* solubili.