Provetta di Controlli Automatici 1 a.a. 2003/04—A

1. Calcolare la trasformata Zeta della sucessione $\cos(\omega k)$.

2. Determinare una funzione di traferimento $F(s)$ asintoticamente stabile a coefficienti reali (non necessariamente strettamente propria) che determini asintoticamente il valor medio incognito del segnale
$$u(t) = C + C\cos(\omega t)$$
ovvero la cui uscita con ingresso $u(t)$ valga asintoticamente $y(t) = C$ ($F(s)$ deve essere almeno del secondo ordine).

3. La banda passante di un filtro passa basso (per cui $F(j\infty) = 0$) è la massima frequenza alla quale il guadagno vale $|F(0)|/\sqrt{2}$ Determinare la banda passante del filtro ottenuto dalla connessione in serie di m filtri del tipo
$$F(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

4. Si consideri il sistema non lineare
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^2 + 12 - x_1(t)^4 - x_2(t) + u(t) \end{cases}$$
Si assuma $\bar{x}_1 = \alpha$ quale parametro. Determinare le condizioni di equilibrio (cioè determinare $\bar{x}_2$ e $\bar{u}$) al variare di α con $0 \leq \alpha \leq 2$. Dire per quali valori di α il sistema linearizzato è stabile asintoticamente.

5. Si consideri il sistema di equazioni
$$\ddot{q}(t) = u(t) + d(t),$$
dove d è un ingresso esterno, u è il controllo e $y = q$ è l'uscita, in retroazione con il sistema la cui descrizione ingresso uscita è
$$u(s) = -k\frac{s+1}{s+10}y(s)$$
e se ne disegni lo schema a blocchi. Si determinino i valori di k per cui il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

6. Si consideri il sistema descritto dall'equazione
$$\ddot{q}(t) = \cos(q(t))\dot{q}(t) + q(t)^3 + \arctan(q(t)) + u(t) + d(t)$$
avente come uscite $y_1(t) = q(t)$ $y_2(t) = \dot{q}(t)$. Determinare una legge di controllo tale che, assunto $d = 0$, porti il sistema nella condizione di equilibrio $q = \dot{q} = 0$ per ogni condizione iniziale $q(0)$, $\dot{q}(0)$ (è consigliabile risolvere prima l'esercizio precedente).

Provetta di Controlli Automatici 1 a.a. 2003/04 — B

1. Dimostrare che se il sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ è asintoticamente stabile, allora anche il sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = [(I - \tau A)^{-1}(I + \tau A)]x(k)$$

è asintoticamente stabile per ogni $\tau > 0$ (dimostrare che la matrice $[(I - \tau A)^{-1}(I + \tau A)]$ ha gli stessi autovettori di A e, se λ è autovalore di A, allora i suoi autovalori sono ...).

2. Si consideri il sistema

$$y(s) = F(s)u(s) = \frac{1}{s^2 - 6}u(s)$$

connesso in retroazione con il sistema

$$u(s) = -k\frac{s+\alpha}{s+10}(y(s) - \bar{y}(s)).$$

dove $\bar{y}$ è il riferimento. Dire per quali valori dei parametri k e α il sistema risulta stabile asintoticamente.

3. Determinare la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine la cui risposta al gradino con condizioni iniziali nulle è

$$y(t) = 3e^{-2t} + e^{-5t} - e^{-4t} + 1$$

4. Per quali valori reali del parametro k il polinomio

$$s^3 + 11s^2 + 10s + k$$

ammette radici immaginarie pure? (lo zero è da considerarsi numero immaginario puro).

5. Si consideri il sistema lineare discreto $x(k+1) = Ax(k)$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

Si dica quali sono le condizioni iniziali per cui $x(k) \to 0$ per $k \to \infty$.

6. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -3\sin(x_1(t)) + x_2(t) - x_2(t)^3 \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 4x_2(t) + 6x_2(t)^3 + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_1(t)^3 \end{cases}$$

e lo si linearizzi nel punto di equilibrio $x = 0$. Si analizzi la stabilità dell'approssimante lineare.