Spazi metrici e spazi topologici

D. Dikranjan

L'origine della topologia é dovuta a H. Poincaré, M. Fréchet e F. Hausdorff circa un secolo fa. Adesso questa disciplina collega tra loro molte altre come la logica, l'algebra, l'analisi, la geometria e l'informatica. Per esempio, il grande topologo russo L. Pontryagin é noto anche per la sua attività nel campo dell'algebra, della geometria, delle equazioni differeneziali, del controllo ottimale ecc. Mentre le applicazioni della topologia nelle discipline "classiche" della matematica risalgono alle origini della topologia, negli ultimi anni la topologia trova applicazioni sorprendenti anche all'informatica. Il legame con la matematica discreta e con l'informatica si realizza tramite la ricca scelta di topologie che si definiscono in modo naturale sugli insiemi ordinati. Una di queste topologie (la topologia di Scott) va usata per esempio nella così detta Domain Theory che fa parte dell'informatica teorica. Inoltre, gli spazi topologici finiti sono stati utili nell'identificazione delle immagini.

Lo scopo di questi appunti è di coprire gli argomenti trattati nel corso di Topologia 1. Vengono inizialmente studiati gli spazi metrici e poi introdotti i concetti fondamentali della topologia: *insiemi chiusi e insiemi aperti, basi, assiomi di separazione, prodotti e quozienti di spazi topologici*. Viene inoltre introdotta la convergenza di filtri e la convergenza di Moore e Smith che forniscono un modo equivalente di descrivere la topologia di uno spazio generalizzando l'idea intuitiva delle successioni convergenti negli spazi metrici. Dopo vengono introdotti altri concetti fondamentali della topologia: compattezza, completezza, connessione e dimensione.

Nel capitolo 1 sono definite le metriche, le pseudometriche e le ultrametriche. Si vede come esse derivino in modo del tutto naturale da funzioni o da norme (si definiscono la valutazione e la norma su un dominio ad ideali principali e quindi sul suo campo di quozienti; nel caso particolare di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ si trovano le metriche p-adiche). Il capitolo 2 è dedicato alla convergenza delle successioni in uno spazio metrico ed ai concetti che per primi derivano dalla convergenza: quelli di *insiemi chiusi* e di *insiemi aperti*. Nel §2.4 vengono trattate le funzioni e le applicazioni continue (ed uniformemente continue) e nel §2.7 le varie metriche sui prodotti.

Il capitolo 3 descrive inizialmente un primo modo per introdurre una topologia su un insieme: tramite insiemi aperti o insiemi chiusi; in seguito vengono dati modi equivalenti: tramite intorni, operatori di chiusura o con il concetto di interno. Nel capitolo 4 è definita la base di uno spazio topologico; viene dato particolare rilievo agli spazi a base numerabile, dato che su di essi è stata sviluppata gran parte della topologia classica. Le applicazioni continue ed i prodotti di spazi topologici sono trattati nel capitolo 5. Quozienti e somme sono definite nel paragrafo §5.2.

Gli assiomi di separazione sono definiti nel capitolo 6. In questo capitolo si vede anche che gli spazi T_0 sono sostanzialmente sottospazi di potenze dello spazio di Sierpiǹski $\{0,1\}$, mentre gli spazi di Tichonov di potenze dell'intervallo $[0,1]$ (teorema di Tichonov). Da questo si deduce il teorema di metrizzazione di Urysohn: ogni spazio T_3 a base numerabile è metrizzabile (in effetti è sottospazio del cubo di Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$). In altre parole, si vede che gli spazi topologici che godono di alcune proprietà naturali sono sostanzialmente spazi "familiari. Nel capitolo 7 si studiano alcune topologie indotte su un insieme X da una relazione di ordine parziale ivi definita, in particolare quella di Alexandrov-Tucker. Viceversa, una topologia su uno spazio X induce una relazione di ordine parziale. Questa connessione tra ordine e topologia ha molte applicazioni in informatica.

Il §9 tratta il concetto più importante nell'ambito dei spazi metrici – la completezza. Nel §9.1 si discute l'esistenza e l'unicità del completamento di uno spazio metrico. Si costruisce sia il completamento alla Cantor che quello tramite lo spazio delle funzioni continue. Il §9.2 tratta tre teoremi fondamentali con molte applicazioni nell'analisi ed altre parti della matematica – il teorema di Banach del punto fisso, il teorema di Cantor ed il teorema di Baire delle categorie. Il §9.3 tratta gli spazi polacchi, ossia spazi metrici separabili che ammettono una metrica equivalente completa.

Una classe particolare di spazi metrici completi, quelli compatti, si studiano nel capitolo successivo. Ho preferito dare come definizione della compattezza nel §4 una delle tante prorietà equivalenti (ogni successione ha una sottosuccesione convergente) che si trova il più vicino alla completezza. (Nel §12.3 vedremo che anche il teorema di Weierstass caratterizza la compattezza per spazi metrici.) Nel §10.1 si stabilisce la relazione precisa tra compattezza e completezza. Nel §10.3 si vede come si può misurare la compattezza tramite la continuità uniforme delle funzioni a valori reali. Il §10.4 tratta un argomento speciale – l'insieme di Cantor e il teorema di Peano.

Il capitolo successivo – §§11 – affronta uno dei due concetti fondamentali della topologia: la compattezza. Il §11 parte con le proprietà generali dei spazi topologici compatti. Nel §11.1 si vede come la compattezza "migliora le proprietà dello spazio per quanto riguarda gli assiomi di separazione. Poi, nel §11.2, si discutono i prodotti di spazi topologici compatti, in particolare il famoso teorema di Tichonov del prodotto 11.16. C'è anche il teorema di Kuratowski della proiezione chiusa che premette di dare una caratterizzazione degli spazi topologici compatti. Il §11.3 è dedicato alle compattificazioni con particolare emfasi alla compattificazione di Stone-Čech e alla compattificazione di Alexandrov.

Nel §12 si propone di studiare diversi livelli di generalizzazione della compattezza: compattezza numerabile, pseudocompattezza, paracompattezza e H-chiusura. La pseudocompattezza (introdotta da E. Hewitt nel 1947) è motivata dal teorema di Weierstrass (uno spazio X è pseudocompatto se ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata), mentre la compattezza numerabile (introdotta da M. Fréchet un secolo fa) è motivata dal teorema di Heine-Borel per spazi metrici. Questo paragrafo si conclude con un'altra generalizzazione della compattezza dovuta a J. Dieudonné. Si tratta degli spazi paracompatti che sono precisamente gli spazi che ammettono partizioni dell'unità.

Le questioni relativi alla metrizzazione sono stati affrontati nel capitolo 13. Qui si dimostra il teorema di Stone di paracompattezza degli spazi metrici e si dimostrano i teoremi di Nagata-Smirnov e di Bing che danno condizioni necessarie e sufficienti affinché uno spazio topologico sia metrizzabile.

Il §14 affronta il secondo concetto fondamentale della topologia: la connessione. Qui si possono trovare gli spazi connessi e gli spazi totalmente connessi. Si vede con esempi (14.14) come la connessione può essere sfruttata per risolvere facilmente (nei casi considerati) uno dei maggiori problemi in topologia: decidere se due spazi topologici sono omeomorfi o no.

Il capitolo 15 discute lo spazio delle componenti connesse ed altri quozienti associati in un modo funtoriale ad uno spazio topologico.

Nel capitolo 16 si discute la possibilità di introdurre una funzione di dimensione in uno spazio topologico. Nel §16.1 sono definiti gli spazi zero-dimensionali e nei §§16.2-16.4 si espone brevemente la teoria della dimensione degli spazi topologici.

Il §17 tratta la topologia di Zariski di un anello commutativo e la dulaità di Stone. Il §18 è dedicato all'anello delle funzioni continue.

La notazione è standard, in particolare si usa $\mathbb{N}$ per indicare i numeri naturali, $\mathbb{Q}$ per i numeri razionali, $\mathbb{R}$ per i numeri reali, ω o $\aleph_0$ per il primo cardinale infinito, $\mathbf{c}$ per la cardinalià del continuo, $P(X)$ per l'insieme delle parti di un insieme X, il simbolo $\clubsuit$ per la fine di una dimostrazione.

Desidero ringraziare Elena Boschi, Chiara Milan, Ulderico Dardano, Alberto Fedrigotti e Katia Coletto per suggerimenti utili e per l'aiuto che hanno prestato nella preparazione di questi appunti.

Dikran Dikranjan

Indice

1 Come nasce la distanza: Valutazioni, norme e pseudonorme

Gli spazi metrici sono insiemi dotati di una distanza definita in un modo “astratto. Tuttavia, essi sono nati a partire da esempi in cui il concetto di distanza è del tutto naturale. Lo scopo di questo paragrafo è di ricordare questi esempi.

1.1 Norme e pseudonorme in spazi lineari

Per definire delle distanze potrebbe essere utile una struttura di tipo algebrico. Per esempio, sia V uno spazio lineare su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare (x, y). Allora V ammette una *norma* definita con $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, che ha le seguenti proprietà per ogni $x, y \in V$:

1) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$,
2) $\|rx\| = |r| \cdot \|x\|$ per $r \in \mathbb{R}$,
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

È di grande importanza nell'analisi matematica il seguente spazio detto *spazio di Hilbert* e denotato con ℓ_2: elementi di ℓ_2 sono tutte le successioni $x = \{x_n\}$ di numeri reali per i quali la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty} x_n^2$ è convergente. In modo ovvio ℓ_2 è uno spazio lineare su $\mathbb{R}$ (con addizione $x + y = \{x_n + y_n\}$ e moltiplicazione con scalare $rx = \{rx_n\}$ per $r \in \mathbb{R}$). Per $x, y \in \ell_2$ si vede facilmente che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n$ è assolutamente convergente e che, posto $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n$, si ottiene un prodotto scalare su ℓ_2. Adesso, come prima, possiamo definire una metrica generata dalla norma che questo prodotto scalare induce: $d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$.

Esercizio 1.1. *Sia X un insieme e $C^*(X)$ l'insieme di tutte le funzioni limitate $f : X \to \mathbb{R}$. Verificare che $C^*(X)$ risulta uno spazio lineare su $\mathbb{R}$ (con la struttura ereditata da $\mathbb{R}^X$) e che $\|f\|_u := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ definisce una norma su $C^*(X)$.*

1.2 Norme e pseudonorme in gruppi

Più in generale, per un gruppo G con elemento neutro 1 diremo che la funzione $p : G \to \mathbb{R}_+$ è una *pseudonorma* se per ogni $x, y \in G$

1) $p(1) = 0$;
2) $p(x^{-1}) = p(x)$;
3) $p(xy) \leq p(x) + p(y)$.

Se invece di 1) si ha la proprietà più forte:

1*) $p(x) = 0$ se e solo se $x = 1$

diremo che p è una *norma*. Se p soddisfa anche la proprietà $p(a^{-1}xa) = p(x)$ per ogni $a, x \in G$ diremo che p è una (pseudo)norma *invariante*.

Se invece di 3) si ha la proprietà più forte:

3*) $p(xy) \leq \max\{p(x), p(y)\}$

la (pseudo)norma si dice *non Archimedea*.

1.3 Valutazioni e norme in gruppi

Le norme non Archimedee provengono da valutazioni che adesso definiremo.

Valutazione di un gruppo.

Sia G un gruppo; una funzione $v : G \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ si dice valutazione *del gruppo G se :*
(v_1) $v(x) = \infty$ se e solo se $x = 1$
(v_2) $v(x^{-1}) = v(x)$.
(v_2) $v(x \cdot y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Più in generale, invece di $\mathbb{R}$ si può prendere un gruppo abeliano linearmente ordinato.

La valutazione p-adica.

Sia p un numero primo. Per un numero naturale $n > 0$ poniamo $v_p(n) = k$ se p^k divide n ma p^{k+1} non divide n. Per un numero razionale $r = \frac{a}{b} \neq 0$ poniamo $v_p(r) := v_p(a) - v_p(b)$.

Esercizio 1.2. *Verificare che:*

(a) $v_p(r)$ non dipende dalla rappresentazione $r = \frac{a}{b} \neq 0$, ma solo da r;

(b) $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$;

(c) $v_p(r + s) \geq min\{v_p(r), v_p(s)\}$.

Ora vediamo che valutazione si può definire in un campo arbitrario.

Valutazione discreta di un campo. *Sia K un campo. Una funzione $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ si dice* valutazione discreta del campo K se:

(v_1) $v(x) = \infty$ se e solo se $x = 0$;

(v_2) $v : (K^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$ è un omomorfismo di gruppi, cioè, $v(xy) = v(x) + v(y)$;

(v_3) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Esercizio 1.3. *Sia K un campo e v una valutazione discreta di K. Se $x \in K$ è una radice dell' unità (cioè $x^n = 1$ per qualche $n \in \mathbb{N}^*$) allora $v(x) = 0$. In particolare, se K è un campo finito, allora v è la costante 0 su K^*.*

Dimostrazione. Se K è un campo finito con $n + 1$ elementi, allora $x^n = 1$ per ogni $x \in K^*$. □

Esercizio 1.4. *Sia K un campo e v una valutazione discreta di K. Allora:*

(i) l' insieme $O_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ è un anello;

(ii) l' insieme $\mathfrak{p}_v = \{x \in K : v(x) > 0\}$ è un ideale massimale dell' anello O_v;

(iii) l' anello O_v è un dominio ad ideali principali;

(iv) $\mathfrak{p}_v^n, n \in \mathbb{N}$, sono gli unici ideali propri dell' anello O_v;

(v) $\mathfrak{p}_v$ è l' unico ideale primo non nullo di O_v, quindi O_v ha un unico elemento primo (a meno di un fattore invertibile).

Un anello A avente le proporietà di O_v si dice *anello di valutazione discreta* (i.e., A è un dominio ad ideali principali con un unico elemento primo p).

Esercizio 1.5. *Sia A un dominio ad ideali principali con campo delle frazioni K e sia p un elemento primo di A. Per un elemento $a \neq 0$ di A poniamo $v_p(a) = k$ se p^k divide a ma p^{k+1} non divide a. Per un elemento $r = \frac{a}{b} \neq 0$ di K poniamo $v_p(r) := v_p(a) - v_p(b)$; poniamo $v - p(0) = \infty$. Dimostrare che:*

(i) v_p è una valutazione discreta di K;

(ii) ogni valutazione v di K con $v(K^*) = \mathbb{Z}$ è di questo tipo, cioè esiste un dominio ad ideali principali $A \subseteq K$ con campo delle frazioni K e un elemento primo p di A tale che $v = v_p$.

Dimostrazione. (ii) Prendiamo $A = O_v$ ed un generatore p dell'ideale primo $\mathfrak{p}_v$. □

1.4 La norma indotta da una valutazione

Sia $a > 1$ un numero reale fisso e sia $v : G \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una valutazione. Allora $n_v(x) := a^{-v(x)}$(con la convenzione $a^{-\infty} = 0$) definisce una norma non Archimedea sul gruppo G. Nel caso della valutazione p-adica si prende di solito $a = p$ per motivi di "globalizzazione(vedi esercizio 1.6).

Definiamo *la norma p-adica* $|\ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ con $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ se $a \neq 0$ (con la convenzione $p^{-\infty} = 0$) . Notiamo che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(n$_1$) $|a|_p = 0$ se e solo se $a = 0$;
(n$_2$) $|ab|_p = |a|_p |b|_p$;
(n$_3$) $|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$;
Per $a \in \mathbb{Q}$ poniamo $|a|_\infty = |a|$(il valore assoluto usuale in $\mathbb{R}$).

Esercizio 1.6. *Dimostrare che per ogni numero razionale non nullo a risulta $\prod_p |a|_p = 1$, dove $|\ |_p$ percorre tutte le norme p-adiche su $\mathbb{Q}$ o $|\ |_\infty$.*

2 Spazi metrici

2.1 Metriche, pseudometriche, ultrametriche e quasimetriche

Sia $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei numeri reali ≥ 0. Il seguente concetto di spazio metrico fu introdotto da Fréchet.

Definizione 2.1. Si dice *spazio metrico* un insieme X munito di una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ (*metrica*[1]) che verifica $\forall x, y, z \in X$ le seguenti proprietà:
(M1) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*simmetria*);
(M3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Una funzione d con $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e con le proprietà(M2) e(M3) si chiama *pseudometrica* (in altre parole, $d(x, y) = 0$ può accadere per una pseudometrica anche con $x \neq y$). Se invece d verifica le condizioni (M1) e(M3) ma non la condizione di simmetria (M2) d si dice *quasimetrica*.

Il vantaggio delle pseudometriche è che si trovano in abbondanza:

Esercizio 2.2. *Ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definisce una pseudometrica con $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$; d_f è una metrica se e solo se f è iniettiva.*

Questo esercizio fornisce molti esempi di metriche su $\mathbb{R}$: ogni funzione iniettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisce una metrica d_f. Ovviamente, qui $\mathbb{R}$ può essere rimpiazzato da qualsiasi spazio metrico (Y, d).

Esercizio 2.3. *Siano d_1 e d_2 due pseudometriche sull'insieme X. Allora la somma $d = d_1 + d_2$ definita con $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ è una pseudometrica. Se una delle pseudometriche d_1 e d_2 è una metrica, allora anche d è una metrica.*

Esercizio 2.4. (la retta di Sorgenfrey) *Per $x, y \in \mathbb{R}$ si definisca:*

$$d(x, y) = |x - y| \text{ se } x \leq y, \quad d(x, y) = max\{1, |x - y|\} \text{ se } x > y.$$

d è una quasi metrica su $\mathbb{R}$ e $(\mathbb{R}, d)$ si dice retta di Sorgenfrey.

Definiamo *disco di raggio $\varepsilon > 0$ e centro x* l'insieme $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$.

Esercizio 2.5. *Determinare $B_{\frac{1}{2}}(x)$, $B_1(x)$ e $B_{\frac{3}{2}}(x)$ per la quasi metrica della retta di Sorgenfrey definita sopra e un punto qualsiasi $x \in \mathbb{R}$.*

Se per un insieme non vuoto $A \subseteq X$ i valori $d(x, y)$ rimangono superiormente limitati per $x, y \in A$, definiamo il *diametro* di A tramite $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. In uno spazio metrico (X, d) un sottoinsieme non vuoto A ha diam $A = 0$ se e solo se $|A| \leq 1$, cioè A ha al più un punto.

Invece di(M3) si può considerare la condizione più forte:

(UM3) $\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z)$.

Una funzione d con le proprietà(M1),(M2) e(UM3) si chiama *ultrametrica* e lo spazio (X, d) *ultrametrico.*

Esercizio 2.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Dimostare che $diam(B_\varepsilon(x)) \leq 2\varepsilon$. Se d è un' ultrametrica, allora $diam(B_\varepsilon(x)) \leq \varepsilon$. È possibile avere $diam(B_\varepsilon(x)) < \varepsilon$.*

2.1.1 Modificare la metrica

Sia $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione. Si potrebbe modificare la (pseudo)metrica di uno spazio (X, d) sostituendo d con la composizione $d_1 = h \circ d$.

Esercizio 2.7. *Dimostrare che se h, definita come sopra, è crescente,$h(0) = 0$ e $h(u + v) \leq h(u) + h(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ allora d_1 risulta una pseudometrica. In più, se d è una metrica e $h(u) > 0$ per $u > 0$, allora anche d_1 è una metrica.*

Per ogni sottoinsieme Y di uno spazio metrico (X, d) la restrizione di d su Y definisce una metrica su Y che denoteremo sempre con d; chiameremo lo spazio metrico (Y, d) *sottospazio* di (X, d).

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Poniamo $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Dimostreremo più tardi che questa funzione si comporta come una "distanza tra il punto x e l'insieme A.

[1] o distanza

2.2 Pseudometriche indotte da pseudonorme su un gruppo

Ad ogni pseudonorma p in un gruppo corrisponde una pseudometrica d_p definita con $d_p(x,y) = p(xy^{-1})$. Questa pseudometrica è *invariante a destra* nel senso che $d_p(xa, ya) = d_p(x,y)$ per ogni $x, y, a \in G$. Analogamente, si potrebbe definire la pseudometrica $d_p(x,y) = p(x^{-1}y)$ che in questo caso sarà *invariante a sinistra*, cioè $d_p(ax, ay) = d_p(x,y)$ per ogni $x, y, a \in G$.

D'altra parte, abbiamo

Esercizio 2.8. *Ogni pseudometrica invariante a destra d su un gruppo G definisce una pseudonorma su G con $p(x) = d(1,x)$. In più, $d_p = d$ e d è metrica se e solo se p è norma.*

Esercizio 2.9. *Dimostrare che per uno spazio lineare V su $\mathbb{R}$ che ammette un prodotto scalare con norma $\|.\|$ la funzione $d(x,y) = \|x-y\|$ definisce una metrica.*

Nel caso $V = \mathbb{R}^n$ si ricava così la metrica usuale $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Si può dimostrare (come nell'esercizio precedente) che per uno spazio lineare V su $\mathbb{R}$ che ammette una norma $\|.\|$ la funzione $d(x,y) = \|x-y\|$ definisce una metrica. Il prodotto scalare non è rilevante per la verifica.

2.3 Distanze a scatto

Definiamo in un insieme la seguente distanza: $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x,x) = 0$. Questa è una(ultra)metrica.

Esercizio 2.10. *Sia X un insieme e siano $0 < a < b$ numeri reali. Trovare condizioni sufficienti affinchè una distanza definita in modo tale che $d(x,y) \in [a,b]$ per $x \neq y$ sia una metrica su X.*

Uno spazio metrico X si dice *discreto* se per ogni punto $x \in X$ la funzione $\mathbf{d}(x) = d(x, X \setminus \{x\})$ ha valore positivo. In altre parole, il disco aperto di centro x e raggio $\mathbf{d}(x)$ non contiene altri punti dello spazio. Lo spazio si dice *uniformemente discreto* se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathbf{d}(x) \geq \varepsilon$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 2.11. *Dare un esempio di uno spazio discreto che non è uniformemente discreto.*

2.4 Convergenza, insiemi chiusi e insiemi aperti in uno spazio metrico

Sia (X,d) uno spazio metrico. Per una successione $\{x_n\}$ in X e un punto $x \in X$, diremo che $\{x_n\}$ *converge* verso x se la successione $d(x_n, x)$ di numeri reali converge verso 0 e scriveremo $\lim_n x_n = x$.

Adesso introduciamo due concetti, quelli di insieme chiuso e di insieme aperto, basati pesantemente sul concetto di convergenza.

Un insieme $A \subseteq X$ è *chiuso* se per ogni successione convergente $\{x_n\}$ di elementi di A anche $\lim_n x_n \in A$. Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subseteq X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ il disco $B_\varepsilon(x)$ contiene infiniti punti dell'insieme A. Bisogna distinguere questo concetto dal concetto di *punto di accumulazione* x di una successione $\{x_n\}$ definito come segue: per ogni $\varepsilon > 0$ il disco $B_\varepsilon(x)$ contiene elementi x_n della successione per infiniti indici $n \in \mathbb{N}$ (ma questi x_n possono non essere tutti distinti tra loro, per esempio, la successione $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ ha 1 come punto di accumulazione, ma 1 non è punto di accumulazione dell'*insieme* $A = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\} = \{1, -1\}$).

Esercizio 2.12. *x è un punto di accumulazione della successione $\{x_n\}$ se e solo se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a x. La successione $\{x_n\}$ è convergente a x se e solo se x è punto di accumulazione di ogni sua sottosuccessione.*

Un insieme $U \subseteq X$ è *aperto* se per ogni $x \in U$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. È facile vedere che un insieme U è aperto se e solo se $X \setminus U$ è chiuso.

Esercizio 2.13. *Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che:*

(a_1) L' unione di una qualunque famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
(a_2) L' intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto;
(a_3) X e $\emptyset$ sono insiemi aperti;
(c_1) L' unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso;
(c_2) L'ntersezione di una qualunque famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso;
(c_3) X e $\emptyset$ sono insiemi chiusi.

È facile vedere che ogni disco è un insieme aperto. Per questo motivo i dischi $B_\varepsilon(x)$ saranno chiamati anche *dischi aperti*.

Due metriche d e d' su uno stesso insieme X si dicono *equivalenti* se determinano la stessa famiglia di aperti. Una metrica d su X si dice *limitata* se diam X è limitato.

Esercizio 2.14. *Ogni metrica è equivalente ad una metrica limitata.*

Suggerimento. Si consideri la distanza d' definita così: $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1$. Poiché la funzione $h(t) = \frac{t}{1+t}$ soddisfa l'ipotesi dell'Eser. 2.7 d' è un metrica. ♣

Un sottoinsieme U di X si dice *intorno* di un punto $x \in X$ se esiste un $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Chiaramente, ogni insieme aperto è intorno di ogni suo punto. Denotiamo con $\mathcal{V}(x)$ la famiglia degli intorni del punto x. Allora:

(i_1) per ogni $U \in \mathcal{V}(x)$ e $W \supseteq U$ si ha $W \in \mathcal{V}(x)$;
(i_2) se $U \in \mathcal{V}(x)$ e $U' \in \mathcal{V}(x)$, allora anche $U \cap U' \in \mathcal{V}(x)$;
(i_3) per ogni $U \in \mathcal{V}(x)$ esiste un $V \in \mathcal{V}(x)$ con $V \subseteq U$ e $V \in \mathcal{V}(y)$ per ogni $y \in V$.

Definizione 2.15. La *chiusura* $\overline{A}$ di un insieme A in uno spazio metrico (X, d) consiste di tutti i punti $x \in X$ tali che $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Vedremo in seguito come $\overline{A}$ si lascia descrivere tramite la distanza d (cf. 2.22).

2.4.1 Perché il "disco aperto è aperto

Qui vogliamo discutere brevemente l'importanza della disuguaglianza del "triangolo nella definizione di metrica. Sia $X = \mathbb{R}^2$ e si definisca la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ ponendo per $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2) \in X$: $d(x,y) = 1$ se $x_1 \neq y_1$ e $x_2 \neq y_2$, $d(x,y) = \min\{1, |x_2 - y_2|, \}$ se $x_1 = y_1$, e $d(x,y) = \min\{1, |x_1 - y_1|\}$ se $x_2 = y_2$. È facile vedere che d verifica le proprietà 1 e 2 della definizione di metrica. Con questa "distanza il disco aperto $B_1((0,0))$ risulta la "croce di centro $(0,0)$ e lati di lunghezza 1. Si vede subito che questo disco non è aperto. Si capisce dunque che la "disuguaglianza del triangolo serve per garantire la transitività della relazione tra punti: "essere vicini. Tuttavia, funzioni "distanza d soddisfacenti solamente 1. e 2. si considerano in topologia, gli spazi che così si ottengono sono noti con il nome di "simmetrici o "simmetrizzabili. La quasimetrica invece è caratterizzata dalla mancanza della simmetria $d(x,y) = d(y,x)$ quando è verificata invece la "disuguaglianza del triangolo (cf. 2.4).

2.5 Applicazioni continue

Un' applicazione $f : (X, d) \to (Y, d')$ tra spazi metrici è :

- *continua*, se per ogni $x \in X$ e per ogni per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ si ha $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$;
- *uniformemente continua*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ ed ogni $y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ si ha $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$;
- *contraente* , se per ogni $x \in X$ ed ogni $y \in X$ si ha $d'(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$;
- *Lipschiziana* se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ si ha $d'(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x,y)$;
- *isometrica*, se per ogni $x \in X$ ed ogni $y \in X$ si ha $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

Una biezione $f : (X, d) \to (Y, d')$ è:

- *omeomorfismo* se f e f^{-1} sono continue;
- *omeomorfismo uniforme* se f e f^{-1} sono uniformemente continue;
- *isometria* se f è isometrica.

Chiaramente, per rendere le definizioni uniformi, si poteva anche definire f isometria se f e f^{-1} sono contraenti. Due spazi metrici X e Y che ammettono un isometria $X \to Y$ sono praticamente indistinguibili dal punto di vista della teoria degli spazi metrici. Si noti che se d e d' sono due metriche equivalenti su X allora l'identità $(X, d) \to (Y, d')$ è un omeomorfismo, ma in generale può non essere un omeomorfismo uniforme (cf. Es. 2.19). D'altra parte, notiamo che per uno spazio metrico (X, d), se d' è la metrica limitata definita come nell'Esercizio 2.14, gli spazi (X, d) e (X, d') sono uniformemente omeomorfi.

Esercizio 2.16. *Sia $f : (X, d) \to (Y, d')$ un' applicazione tra spazi metrici. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) f è continua;

(b) per ogni successione convergente $x_n \to x$ in X si ha $f(x_n) \to f(x)$ in Y;

(c) per ogni $x \in X$ e per ogni intorno U di $f(x)$ in Y esiste un intorno V di x in X tale che $f(V) \subseteq U$;

(d) *per ogni aperto U in Y l'insieme $f^{-1}(U)$ è aperto in X.*

La proprietà (d) è molto utile in quanto permette di definire la continuità anche per spazi topologici dove, in assenza di metrica, la proprietà (b) perde la sua forza. D'atra parte, noteremo solo brevemente che non è possibile caratterizzare la continuità tramite *immagini.* In altre parole, non esistono delle famiglie $\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subseteq P(\mathbb{R})$, tali che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se $f(A) \in \mathcal{B}$ per ogni membro $A \in \mathcal{A}$ (cf. Daniel Veleman [V], per il caso generale vedi anche [CDW]).

Il seguente concetto è utile per caratterizzare la continuità uniforme:

Definizione 2.17. Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (X, d) si dice C *succesione* se $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \to 0$.

Definizione 2.18. Due metriche d e d' su un insieme X si dicono uniformemente equivalenti se l'identità $(X, d) \to (X, d')$ è un omeomorfismo uniforme.

Esercizio 2.19. *Sia X un insieme con due metriche d e d'. Dimostrare che d e d' sono uniformemente equivalenti se e solo se hanno le stesse C-successioni. Dimostrare che la metrica di $\mathbb{R}$ definita con $\alpha(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ non è uniformemente equivalente alla metrica usuale anche se le due metriche sono equivalenti.*

Esercizio 2.20. *Sia $f : (X, d) \to (Y, d')$ un' applicazione tra spazi metrici. Dimostrare che f è uniformemente continua se e solo se per ogni C-successione x_n in X la successione $f(x_n)$ risulta una C-successione in Y.*

Esercizio 2.21. *Dimostrare che per un applicazione valgono sempre le seguenti implicazioni:*

$$\textit{isometria} \implies \textit{contraente} \implies \textit{Lipschiziana} \implies \textit{uniformemente continua} \implies \textit{continua.}$$

In generale esistono delle funzioni continue che non sono uniformemente continue (come per esempio la funzione $f(x) = x^2$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$). Vedremo in seguito che queste proprietà possono coincidere per alcuni spazi(cf. Parte II).

Esercizio 2.22. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Dimostrare che :*

1) *per $x, y \in X$ si ha $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$;*

2) *concludere che la funzione $f_A(x) = d(x, A)$ è uniformemente continua;*

3) *$d(x, A) = 0$ se e solo se $x \in \overline{A}$;*

4) *$x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione di elementi di A tale che $x_n \to x$.*

Un altro modo per costruire funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$, che vedremo in seguito (cf. Teorema 6.30), è basato sull'idea di *estendere* funzioni $g : A \to \mathbb{R}$ definite su qualche insieme chiuso A.

Esercizio 2.23. *Sia (X, d) uno spazio metrico, $\varepsilon > 0$ e $x \in X$. Dimostrare che :*

1) *l'insieme $A = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ è chiuso;*

2) *si ha $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq A$;*

3) *dare esempi in cui l'inclusione del punto 2) è propria.*

L' insieme A del punto 1) si chiama *disco chiuso di raggio ε (e centro x).*

Esercizio 2.24. *Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A e B due sottoinsiemi di X. Dimostrare che :*

1) *$\inf\{d(b, A) : b \in B\} = \inf\{d(a, B) : a \in A\}$;*

2) *la distanza $d(A, B) = \inf\{d(b, A) : b \in B\} = \inf\{d(a, B) : a \in A\}$ non è in generale una psedometrica di $P(X)$;*

3) *$d(A, B) = 0$ può accadere per due insiemi chiusi e disgiunti A e B di X (fornire un esempio).*

2.5.1 Lo spazio delle funzioni continue

Sia f_n una successione di funzioni $f_n : (X,d) \to (Y,d')$. Diremo che f_n *converge uniformemente* alla funzione $f : X \to Y$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $x \in X$ si ha $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Esercizio 2.25. *Con le notazioni precedenti, dimostrare che se ogni f_n è continua e $\{f_n\}$ converge uniformemente a f allora anche f è continua.*

Sia (X,d) uno spazio metrico. Sullo spazio lineare di tutte le funzioni continue limitate $f : X \to \mathbb{R}$ consideriamo la norma $\| \ \|_u$ definita nell' es. 1.1; con un abuso di notazione denoteremo questo spazio sempre con $C^*(X)$. Sia d_u la metrica indotta da questa norma, cioè $d_u(f,g) = \|f - g\|_u$.

Esercizio 2.26. *Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $p \in X$ un punto fissato. Per $a \in X$ si consideri la funzione f_a definita da $f_a(x) := d(x,a) - d(x,p)$ per $x \in X$. Dimostrare che:*

1. *$f_a \in C^*(X)$ per ogni $a \in X$;*
2. *l'applicazione $h : (X,d) \to (C^*(X), d_u)$ definita da $h(a) = f_a$ è un' isometria.*

2.6 Prodotto di spazi metrici

Sul prodotto $X \times Y$ di due spazi metrici (X,d_1) e (Y,d_2) si hanno diverse metriche equivalenti ; per ora ne menzioneremo solo tre:

- $d'((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$;
- $d''((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$;
- $d'''((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2}$.

Esercizio 2.27. *Si dimostri che d', d'' e d''' sono metriche e si disegni il disco aperto $B_1((0,0))$ per d', d'' e d''' nel caso $X = Y = \mathbb{R}$ con $d_1 = d_2$ la metrica usuale su $\mathbb{R}$.*

Esercizio 2.28. *Siano X e Y spazi metrici e sia $\{(x_n,y_n)\}$ una successione nel prodotto $X \times Y$ munito di una delle tre metriche sopra menzionate. Dimostare che $\{(x_n,y_n)\}$ converge verso un punto (x,y) se e solo se $x_n \to x$ e $y_n \to y$.*

Ovviamente, queste definizioni e la tesi dell'esercizio 2.28 si estendono anche al caso di tutti i prodotti finiti e quindi, quando parleremo di prodotti finiti di spazi metrici e tratteremo proprietà del prodotto che riguardano solo la convergenza delle successioni (insiemi chiusi, insiemi aperti ecc.), non sarà necessario precisare quale delle tre metriche equivalenti avremo preso in considerazione.

Ora ci occupiamo dei prodotti infiniti di spazi metrici. Sia $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di spazi metrici. Per l'Esercizio 2.14 non è restrittivo assumere che tutte le metriche d_n siano limitate e si può assumere addirittura che diam $X_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ripetendo quanto visto nel caso di prodotti finiti, possiamo definire una metrica ponendo $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x,y)$, che chiameremo *metrica prodotto delle d_n*.

Lemma 2.29. *Sia $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di spazi metrici con diam $X_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ dotato della metrica del prodotto d. Dimostrare che:*

(a) *(X,d) è uno spazio metrico;*

(b) *le proiezioni p_n sono uniformemente continue;*

(c) *una successione $\{x_k\}$ in X è convergente se e solo se sono convergenti tutte le successioni $\{p_n(x_k)\}$, $n \in N$;*

(d) *se (Y,ρ) è un altro spazio metrico, un'applicazione $f : (Y,\rho) \to (X,d)$ è continua se e solo se sono continue tutte le composizioni $p_n \circ f : (Y,\rho) \to (X_n,d_n)$;*

(e) *per ogni spazio metrico (Y,ρ) ed ogni famiglia di applicazioni continue $f_i : (Y,\rho) \to (X_i,d_i)$ esiste un'unica applicazione continua $f : (Y,\rho) \to (X,d)$ tale che $f_i = p_i \circ f$ per ogni $i \in I$;*

La proprietà (e) determina la metrica del prodotto d a meno di equivalenze. In seguito i prodotti numerabili di spazi metrici saranno sempre dotati dalla metrica prodotto d.

2.7 La metrica di Hausdorff

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $F(X)$ la famiglia di tutti i chiusi di X. La metrica d_H di Hausdorff in $F(X)$ si definisce con $d_H(A, B) := \inf\{\varepsilon : A \subseteq O_\varepsilon(B), B \subseteq O_\varepsilon(A)\}$, dove $O_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$. Per non avere valori infiniti conviene lavorare con una metrica limitata d.

Lemma 2.30. *Se $A, B \subseteq X$ allora $d_H(A, B) = 0$ se e sole se $A \subseteq \overline{B}$ e $B \subseteq \overline{A}$.*

Esercizio 2.31. *(1) Dimostrare che d_H è una metrica in $F(X)$;*

(2) Si consideri lo spazio delle funzioni continue $C(X)$ come sottospazio di $P(X \times \mathbb{R})$ tramite l'identificazione di ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con il suo grafico $G_f \subseteq X \times \mathbb{R}$ e si munisca il prodotto $X \times \mathbb{R}$ con la sup-*metrica* $d((x, r), (y, s)) = \max\{d(x, y), |r - s|\}$. *Dimostrare che la metrica d_1 indotta dalla metrica di Hausdorff d_H su $C^*(X)$ è meno fine della metrica d_u della norma uniforme $\|f\|_u$ di $C^*(X)$ definita con $\|f\|_u := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ cioè ogni aperto rispetto a d_1 è aperto anche rispetto a d_u. Di conseguenza, la topologia della convergenza uniforme su $C(X)$ è più fine della* topologia di Hausdorff *indotta dalla metrica d_H.*

Esercizio 2.32. *Dimostrare, con un esempio, che la topologia della convergenza uniforme su $C(\mathbb{R})$ è strettamente più fine della topologia di Hausdorff.*

Suggerimento. Si consideri la funzione $f(x) = x^2$.

Esercizio 2.33. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ è u.c., allora gli intorni di f nella topologia della convergenza uniforme su $C(X)$ e nella topologia di Hausdorff coincidono.*

Esercizio 2.34. *Dimostrare che esiste una funzione limitata $f \in C(\mathbb{R})$ tale che gli intorni di f nella topologia della convergenza uniforme su $C(\mathbb{R})$ non coincidono con quelli dati dalla topologia di Hausdorff.*

Suggerimento. Si consideri una funzione continua costruita a partire dalla funzione $f(x) = \sin x^2$.

3 Spazi topologici

3.1 Filtri e ultrafiltri

Sia X un insieme, una famiglia $\mathcal{F}$ di parti di X soddisfacente le seguenti condizioni si chiama un *filtro*:
(f_1) per ogni $U \in \mathcal{F}$ e $W \supseteq U$ si ha $W \in \mathcal{F}$;
(f_2) se $U \in \mathcal{F}$ e $U' \in \mathcal{F}$, allora anche $U \cap U' \in \mathcal{F}$;
(f_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Chiaramente, per ogni spazio metrico (X, d) ed ogni $x \in X$ la famiglia $\mathcal{V}(x)$ è un filtro detto *filtro degli intorni di x*.

Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *principale* se $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ appartiene a $\mathcal{F}$. In tal caso, $\mathcal{F}$ consiste ovviamente di tutti i sottoinsiemi di X che contengono $A = \bigcap \mathcal{F}$; chiameremo un filtro di questo tipo *filtro generato da A* e lo denoteremo con $[A]$. Nel caso quando $A = \{a\}$ è un singoletto, scriveremo anche $\dot{a}$.

Un esempio di un filtro non fisso è il filtro di Fréchet definito come la famiglia di tutti i sottoinsiemi co-finiti di un insieme infinito X ($A \subseteq X$ si dice *cofinito* se il complemento $X \setminus A$ è finito). Più in generale, se α è un numero cardinale minore di $|X|$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi $A \subseteq X$ con $|X \setminus A| \leq \alpha$ forma un filtro.

Sia X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di parti non-vuote di X. Si dice che $\mathcal{B}$ é una *base di filtro*, se per ogni $B, B' \in \mathcal{B}$ esiste $B'' \in \mathcal{B}$ tale che $B'' \subseteq B \cap B'$. Questa definizione é motivata dal seguente lemma:

Lemma 3.1. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{B}$ una famiglia di parti non-vuote di X. Allora la famiglia di tutte le parti di X che contengono qualche membro di $\mathcal{B}$ é un filtro se e solo se $\mathcal{B}$ é una base di filtro.*

Un filtro può avere diversi basi che lo generano nei sensi del Lemma 3.1. Sono di notevole interesse i filtri che possiedono una base numerabile $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$. Chiaramente, non é restrittivo suporre, che in tal caso $B_1 \supseteq B_1 \supseteq \ldots B_n \supseteq \ldots$.

Se $f : X \to Y$ e $f(\mathcal{F}) = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$, allora $f(\mathcal{F})$ è un filtro su Y.

Per due filtri $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ consideriamo l'ordine definito dall'inclusione $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ (questo significa che ogni $F \in \mathcal{F}$ appartiene anche a $\mathcal{G}$). In questo modo la famiglia $\mathbf{Fil}_X$ di tutti i filtri su X diventa un insieme parzialmente ordinato. Si può vedere che $(\mathbf{Fil}_X, \subseteq)$ è induttivo (cioè, ogni catena è superiormente limitata, vedi il Teorema 3.6).

Definizione 3.2. Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *ultrafiltro* se $\mathcal{F}$ è un elemento massimale di $\mathbf{Fil}_X$.

È facile vedere che un filtro fisso $[A]$ è un ultrafiltro se e solo se A ha un punto solo; di conseguenza X ha precisamente $|X|$ ultrafiltri fissi.

Il seguente criterio è utile per caratterizzare gli ultrafiltri.

Lemma 3.3. *Sia X un insieme infinito e sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(1) $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro;

(2) se $B \subseteq X$ soddisfa $B \cap F \neq \emptyset$ per ogni $F \in \mathcal{F}$ allora $B \in \mathcal{F}$;

(3) se per B_1, B_2 sottoinsiemi di X si ha $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$ allora $B_1 \in \mathcal{F}$ o $B_2 \in \mathcal{F}$;

(4) per ogni $B \subseteq X$ si ha $B \in \mathcal{F}$ oppure $X \setminus B \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) Ovviamente $\{B\} \cup \mathcal{F}$ é una base di filtro $\mathcal{G}$ che contiene $\mathcal{F}$. Quindi, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ e pertanto $B \in \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supponiamo che $B_1 \notin \mathcal{F}$ o $B_2 \notin \mathcal{F}$. Allora esistono $F_1 \in \mathcal{F}$ e $F_2 \in \mathcal{F}$ tali che $F_1 \cap B_1 = F_2 \cap B_2 = \emptyset$. Quindi $F = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ e $F \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$ – assurdo, perché $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$ per ipotesi.

(3) $\Rightarrow$ (4) Ovvio, perché $X \in \mathcal{F}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Supponiamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ per qualche filtro $\mathcal{G}$. Allora per ogni $G \in \mathcal{G}$ abbiamo $G \in \mathcal{F}$, perché altrimenti $X \setminus G \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ – assurdo. □

Corollario 3.4. *Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X:*

(1) se per $F_1, \ldots, F_n$ sottoinsiemi di X si ha $F_1 \cup \ldots \cup F_n \in \mathcal{F}$ allora esiste i con $F_i \in \mathcal{F}$;

(2) se $F \in \mathcal{F}$ allora $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{F} : G \subseteq F\}$ è un ultrafiltro su F;

(3) Se $f : X \to Y$, allora il filtro $f(\mathcal{F})$ è un ultrafiltro su Y.

Esercizio 3.5. *Un ultrafiltro non fisso non può avere base numerabile.*

Il fatto che esistano ultrafiltri non fissi non è affatto banale. Esso dipende dall' Assioma della Scelta (abbreviato AC).

Teorema 3.6. *Sotto l'assunzione dell'assioma della scelta, ogni insieme infinito X ammette un ultrafiltro non fisso. Più precisamente, ogni filtro su X è contenuto in un ultrafiltro di X.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. Allora la famiglia $\mathbf{S} := \{\mathcal{G} \in \mathbf{Fil}_X : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$, è induttiva e quindi si può applicare il lemma di Zorn per ricavare un elemento massimale $\mathcal{U}$ in $\mathbf{S}$ che sarà necessariamente un ultrafiltro. □

Si può dimostrare che X ammette $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltri non fissi. Questo è ovviamente il numero più grande possibile poiché la cardinalità di $\mathbf{Fil}_X$ non può superare $2^{2^{|X|}}$ essendo ogni filtro un sottoinsieme di $P(X)$ e quindi elemento dell'insieme $P(P(X))$ di cardinalità $2^{2^{|X|}}$.

Un ultrafiltro non fisso $\mathcal{U}$ su un insieme (necessariamente infinito) X si può vedere anche come misura finitamente additiva sulle parti di X ponendo $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 1$ per $A \subseteq X$ se e solo se $A \in \mathcal{U}$. Ovviamente $\mu_{\mathcal{U}}$ assume due soli valori, 0 e 1. In più, ogni parte A di X risulta misurabile (vedi (1) del Corollario 3.4). In generale questa misura potrebbe non essere σ-additiva, che vuol dire in questo caso:

$$\text{se } A_n \in \mathcal{U} \text{ per } n = 1, 2, \ldots \text{ allora anche } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}. \qquad (*)$$

Ovviamente, l'esistenza o meno di un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con questa proprietà su X dipende solamente dalla cardinalità di X. I cardinali α per i quali esistono ultrafiltri con $(*)$ su qualche insieme di cardinalità αsi chiamano *misurabili.* Se α è misurabile e $\alpha \leq \beta$ anche β risulta misurabile (sfruttare la proprietà (3) nel Corollario 3.4 rispetto ad una inclusione f di un insieme X con $|X| = \alpha$ in un insieme Y con $|Y| = \beta$). Denotiamo con $\mathbf{m}$ il più piccolo cardinale misurabile. Allora $\mathbf{m}$ è fortemente inaccessibile (cioè è regolare e per ogni $\gamma < \mathbf{m}$ anche $2^\gamma < \mathbf{m}$). L'esistenza di cardinali misurabili non è dimostrabile all'interno dell'assiomatica ZFC (Zermelo Fraenkel + Assioma della scelta). Infatti, la consistenza di ZFC implica la consistenza del fatto che non esistono cardinali misurabili.

3.2 Come si introduce una topologia

Definizione 3.7. Dicesi *spazio topologico* un insieme X munito di una famiglia τ di sottoinsiemi, detti *aperti*, con le proprietà (a_1), (a_2) e (a_3) dell'Es. 2.13.

Denoteremo con (X, τ) lo spazio topologico così definito. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico (X, τ) è *chiuso* se $X \setminus A$ è aperto.

Esercizio 3.8. *Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che la famiglia dei sottoinsiemi chiusi di X soddisfa le condizioni (c_1), (c_2) e (c_3) dell'Es. 2.13.*

Una topologia si può introdurre anche tramite la famiglia $\mathcal{F}$ dei suoi sottoinisemi chiusi. In tal caso si chiede che $\mathcal{F}$ soddisfi (c_1), (c_2) e (c_3). Adesso si possono introdurre gli insiemi aperti come quelli che hanno complemento chiuso. Si verifica facilmente che la famiglia τ degli aperti soddisfa le condizioni (a_1), (a_2) e (a_3). Allora i chiusi dello spazio topologico (X, τ) sono precisamente i membri di $\mathcal{F}$.

Un punto $x \in X$ si dice *isolato* se l'insieme $\{x\}$ è aperto. In ogni spazio topologico X gli insiemi $\emptyset$ e X sono sempre simultaneamente chiusi ed aperti, ma in generale (come in $X = \mathbb{R}$) potrebbero non esserci altri $A \subsetneq X$ con questa proprietà.

Per uno spazio topologico (X, τ) ed un sottoinsieme Y si vede facilmente che la famiglia $\{Y \cap U : U \in \tau\}$ di sottoinsiemi di Y soddisfa la condizioni (a_1)-(a_3) e quindi definisce una topologia su Y che chiameremo *topologia indotta* da X, mentre Y munito di questa topologia sarà chiamato *sottospazio* di (X, τ).

Esempio 3.9. Sia X un insieme.

- *La topologia discreta* su X ha come aperti tutti i sottoinsiemi di X.
- *La topologia indiscreta* su X ha come aperti X e $\emptyset$.
- *La topologia co-finita* su X ha come aperti $\emptyset$ e tutti sottoinsiemi co-finiti di X (cioé, aventi complemento finito).
- L'insieme $\{0, 1\}$ munito della topologia che ha come aperti $\emptyset$, $\{0\}$ e $\{0, 1\}$ è noto come *spazio di Sierpiǹski.*

La topologia indotta da una metrica. Sia (X, d) uno spazio metrico. Come abbiamo visto nell' esercizio 2.13, gli aperti di X formano una topologia. Notare che diverse metriche possono indurre la stessa topologia (Esercizio 2.14). Uno spazio topologico (X, τ) si dice *metrizzabile* se X ammette una metrica per la quale τ risulta la topologia indotta.

Esercizio 3.10. *(*La topologia co-numerabile*) Sia X lo spazio topologico definito sui numeri reali avente come insiemi chiusi tutti gli insiemi al più numerabili e l'insieme X. Verificare che :*

(a) *se una successione $\{x_n\}$ converge verso x, allora quasi tutti gli x_n coincidono con x;*

(b) *dedurre che la topologia così definita non è indotta da una metrica.*

Trovare delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè uno spazio topologico sia metrizzabile è stato uno dei maggiori problemi della topologia. Noi daremo delle condizioni sufficienti in 6.34, 6.26.

3.3 Intorni, chiusura, interno, frontiera

Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. *Intorno* del punto x è un sottoinsieme M di X tale che esiste un aperto U con $x \in U$ e $U \subseteq M$. Si dimostra come nel caso degli spazi metrici che la famiglia $\mathcal{V}(x)$ di tutti gli intorni di x ha le proprietà (i_1)-(i_3) del §2.4. Viceversa, se su un insieme X abbiamo assegnato ad ogni $x \in X$ un filtro $\mathcal{V}(x)$ di insiemi $V \subseteq X$ contenenti x che soddisfano anche (i_1)-(i_3), si può definire su X una topologia τ avente come aperti tutti i $V \subseteq X$ tali che $V \in \mathcal{V}(x)$ per ogni $x \in V$ (i.e., V è "intorno di ogni suo punto). I filtri di intorni per questa topologia sono precisamente i filtri di partenza $\mathcal{V}(x)$.

Definizione 3.11. Per un sottoinsieme A di uno spazio topologico X la *chiusura* $\overline{A}$ consiste di tutti i punti $x \in X$ tale che ogni loro intorno U interseca A.

Esercizio 3.12. *Dimostrare che la chiusura $\overline{A}$ di A coincide con l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi di X contenenti A.*

Raccogliamo le proprietà della chiusura nell'osservazione seguente:

Proposizione 3.13. *Sia X uno spazio topologico. Allora $A \subseteq X$ è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$. In più valgono:*
(K1) $A \subseteq \overline{A}$;
(K2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
(K3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(K4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Kuratowski ha notato che le proprietà (K1)-(K4) caratterizzano la chiusura. In suo onore un operatore (anche arbitrario) $A \mapsto \overline{A}$ definito sulle parti di un insieme X avente le proprietà (K1)-(K4) si dice *operatore di Kuratowski.*

Teorema 3.14. *Sia X un insieme e sia $A \mapsto \overline{A}$ un operatore di Kuratowski su X. Allora esiste un' unica topologia τ su X per la quale gli insiemi chiusi sono definiti con la formula $\overline{A} = A$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le parti di X che soddisfano $A = \overline{A}$. Si verifica facilmente che la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa gli assiomi (c_1), (c_2) e (c_3) e quindi costituisce la famiglia dei chiusi di X rispetto ad una topologia τ. Ovviamente, la chiusura (in τ) di un $A \subseteq X$ è proprio $\overline{A}$. □

Interno Int$A$ di un insieme A in uno spazio topologico X ha come punti tutti gli $x \in X$ per i quali esiste un intorno U contenuto in A. La *frontiera* Fr A di A è definita come $\overline{A} \setminus$ Int A.

Esercizio 3.15. *Dimostrare che l'interno di A coincide con l'unione di tutti gli insiemi aperti di X contenuti in A. Dedurre che* Int $A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ *e* $\overline{A} = X \setminus$ Int $(X \setminus A)$.

Lasciamo al lettore il compito di scrivere le proprietà che caratterizzano l'interno in modo assiomatico, nello spirito delle condizioni (K1)-(K4).

Esercizio 3.16. *Dimostrare che in $\mathbb{R}$ si ha:* $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} =$ Fr $\mathbb{Q} =$ Fr $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, Int $\mathbb{Q} =$ Int $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, *Int*$([a,b]) =$ Int $([a,b)) =$ Int $((a,b]) = (a,b)$, $\overline{(a,b)} = \overline{\mathbb{Q} \cap (a,b)} =$ Fr $\mathbb{Q} \cap (a,b) = [a,b]$, Fr $[a,b] =$ Fr $(a,b) = \{a,b\}$ *se* $a < b$.

Esercizio 3.17. *Sia X uno spazio topologico. Quale delle proprietà (K1)-(K4) possiede l'operatore definito da* $cl_\theta(A) = \{x \in X : (\forall U \in \mathcal{V}(x))\ \overline{U} \cap A \neq \emptyset\}$*? Trovare un esempio di uno spazio X dove cl_θ non é operatore di Kuratowski.*

3.3.1 Densità

Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X si dice *denso* se $\overline{D} = X$.

Esercizio 3.18. *Sia D un sottoinsieme denso in uno spazio topologico X. Allora per ogni aperto U in X si ha* $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.

Dimostrazione. Infatti se $U = \emptyset$ questo è ovvio. Altrimenti, per $x \in \overline{U}$ e $x \in V$ con V aperto si ha $V \cap U \neq \emptyset$ ed è aperto. Allora $V \cap U \cap D \neq \emptyset$ e dunque $x \in \overline{U \cap D}$. □

3.4 Paragonare topologie

Per ogni insieme X la famiglia $\mathcal{T}(X)$ di tutte le topologie su X diventa un insieme parzialmente ordinato se poniamo $\tau_1 \leq \tau_2$ qualora ogni aperto della topologia τ_1 sia aperto anche nella topologia τ_2. In altre parole, vista ogni topologia τ su X come elemento di $P(P(X))$ (questo è possibile visto che $\tau \subseteq P(X)$) si identifica $\mathcal{T}(X)$ con una parte di $P(P(X))$ e si considera l'odine parziale indotto da quello in $P(P(X))$, che è l' inclusione.

Esercizio 3.19. *Sia $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una famiglia di topologie su un insieme X. Dimostrare che*
(a) l'intersezione $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia su X;
(b) $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ è prebase di una topologia su X che si denota con $\sup_{i \in I} \tau_i$.

Esercizio 3.20. *Dimostrare che:*
(a) $\mathcal{T}(X)$ ha un elemento minimo (la topologia indiscreta) e un elemento massimo (la topologia discreta);
(b) $\mathcal{T}(X)$ è un reticolo completo.

Suggerimento. La verifica di (a) è immediata. Per (b) notare che per ogni famiglia di topologie $\{\tau_i\}_{i \in I}$ su X l'estremo inferiore $\bigwedge \tau_i$ coincide con l'intersezione $\bigcap_{i \in I} \tau_i$, mentre l'estremo superiore $\bigvee \tau_i$ coincide con il $\sup_{i \in I} \tau_i$).

Esercizio 3.21. *Sia X in insieme finito non-vuoto. Quanti elementi ha $\mathcal{T}(X)$ quando $|X| \leq 5$?*

Esercizio 3.22. *Sia X in insieme Sia X in insieme infinito.*
(a) Se $a \in X$ e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su $X \setminus \{a\}$ allora la topologia $\tau_{\mathcal{U}}$ su X ottenuta come nel §8 (considerando lo spazio $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ come l'estensione $(X \setminus \{a\})_{\mathcal{U}}$ di $X \setminus \{a\}$ tramite $\mathcal{U}$) ùn elemento massimale dell'insieme ordinato $\mathcal{T}(X) \setminus \{\delta_X\}$, dove δ_X è la topologia discreta di X.
(b) Concludere da (a) che ci sono almeno $|\mathbf{Fil}_X|$ topologie su X. Pertanto $|\mathbf{Fil}_X| \leq \mathcal{T}(X) \leq 2^{2^{|X|}}$.

Vedremo nel seguito che ogni insieme infinito X ha $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltri distinti, quindi X ammette $2^{2^{|X|}}$ topologie distinti $\{\tau_i : i \in I\}$. Visto che X ammette al più $2^{|X|}$ biezioni $X \to X$, concludiamo che esiste una famiglia di $2^{2^{|X|}}$ topologie su X che sono a due a due non-omeomorfe.

3.5 Convergenza di filtri e di reti

Si dice che un filtro $\mathcal{F}$ in uno spazio topologico X converge verso un punto $x \in X$ se $\mathcal{F}$ contiene il filtro $\mathcal{V}(x)$, ossia, per ogni intorno U di x esiste un $F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subseteq U$.

Esercizio 3.23. *Paragonare questa definizione con la definizione di successione convergente considerando il filtro di Fréchet $\mathcal{F}$.*

Esercizio 3.24. *Se un filtro $\mathcal{F}$ converge verso x e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ allora anche $\mathcal{G}$ converge verso x. In particolare il filtro $\mathcal{V}(x)$ converge verso x ed è il più piccolo filtro che converge verso x.*

Punto di aderenza di un filtro $\mathcal{F}$ su X è un punto $x \in X$ tale che $x \in \overline{F}$ per ogni $F \in \mathcal{F}$. Denotiamo con *ad* $\mathcal{F}$ l'insieme dei punti di accumulazione del filtro $\mathcal{F}$, i.e., *ad* $\mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Se $\mathcal{F} \to x$ allora $x \in$ *ad* $\mathcal{F}$, ma in generale queste due proprietà non coincidono. Questo accade se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro. Infatti, in tal caso $x \in$ *ad* $\mathcal{F}$ implica $U \cap F \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathcal{V}(x)$ e per ogni $F \in \mathcal{F}$. Questo implica $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F} \to x$. Punto di aderente e limite si introduce in modo analogo anche per una base di filtro.

3.5.1 Convergenza di Moore e Smith

Come abbiamo visto sopra, la convergenza delle successioni in uno spazio topologico non basta per recuperare la sua topologia (infatti, nel Es. 3.10 le successioni convergenti sono le stesse come nella topologia discreta). Per descrivere la topologia nel caso generale serve un altro tipo di convergenza introdotto da Moore e Smith che copre come caso particolare anche la convergenza delle successioni usuali.

Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Diremo che $(A, \leq)$ è *filtrante a destra* se per ogni $a, b \in A$ esiste $c \in A$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$. Una parte B di A si dice *cofinale* se per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ con $a \leq b$. Sia X un insieme e $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato filtrante a destra. Una *rete* $S = \{x_a : a \in A\}$ in X è una funzione $s : A \to X$ con $s(a) = x_a$. Poichè ogni insieme totalmente ordinato (in particolare, $\mathbb{N}$ con l'ordine usuale) è filtrante a destra, ogni successione $\{x_n\}$ in X è una rete $\mathbb{N} \to X$ definita con $n \mapsto x_n$.

Una *sottorete* S' della rete $\{x_a : a \in A\}$ si definisce così. S' è una rete $s' : B \to X$, con un insieme parzialmente ordinato filtrante a destra B, tale che esiste un applicazione $t : B \to A$ con $s \circ t = s'$ e

$$(\forall a_0 \in A)(\exists b_0 \in B)(\forall b \in B) b \geq b_0 \to t(b) \geq a_0. \tag{4}$$

Chiaramente, una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di una successione $\{x_n\}$ è una sottorete di $\{x_n\}$. Per mantenere questa notazione suggestiva, scriveremo anche in generale la sottorete $S' = \{s'(b) : b \in B\}$ come $\{x_{a_b} : a_b \in B\}$, dove $a_b = t(b)$. Nel caso in cui t è monotona, (4) è equivalente al fatto che $t(B)$ è cofinale in A. In tal caso si può identificare S' con la restrizione della funzione s sulla parte cofinale $t(B)$ di A.

Esercizio 3.25. *Se S'' è una sottorete di S' e S' è una sottorete di S allora S'' è una sottorete di S.*

Sia X uno spazio topologico e sia $\{x_a : a \in A\}$ una rete in X. Diremo che la rete $\{x_a : a \in A\}$ *converge verso il punto* $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste $a_0 \in A$ tale che per ogni $a \geq a_0$ in A si ha $x_a \in U$. In tal caso scriveremo $x = \lim x_a$. Un punto $x \in X$ si dice un *punto di accumulazione* della rete $\{x_a : a \in A\}$ se per ogni intorno U di x l'insieme $B = \{a \in A : x_a \in U\}$ è cofinale in A.

Esercizio 3.26. *Sia X uno spazio topologico e sia $S = \{x_a : a \in A\}$ una rete in X. Il punto $x \in X$ è un punto di accumulazione della rete S se e solo se esiste una sottorete S' di S che converge verso x.*

Esercizio 3.27. *Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Consideriamo l'insieme $\mathcal{A}$ degli intorni di x con l'ordine inverso, cioè $U \leq V$ per $U, V \in \mathcal{A}$ se $U \supseteq V$. Allora:*

1. *$(\mathcal{A}, \leq)$ è filtrante a destra;*
2. *se per ogni $U \in \mathcal{A}$ si sceglie un punto $x_U \in U$, allora la rete $\{x_U : U \in \mathcal{A}\}$ converge verso il punto x.*
3. *Sia F un sottoinsieme di X. Allora $x \in \overline{F}$ se e solo se esiste una rete convergente $\{x_a : a \in A\}$ con $x = \lim x_a$ e $x_a \in F$ per ogni $a \in A$.*
4. *Sia F un sottoinsieme di X. Allora F è chiuso se e solo se per ogni rete convergente $\{x_a : a \in A\}$, con $x_a \in F$ per ogni $a \in A$, risulta $\lim x_a \in F$.*

Esercizio 3.28. *Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$ un punto.*

1. *Sia $S = \{x_a : a \in A\}$ una rete in X. Allora $\mathcal{B} = \{x_b : b \geq a\}_{a \in A}$ é una base di filtro in X. Dimostrare che:*
   (a) $\mathcal{B}$ converge a $x \in X$ se e solo se la rete x_a converge a x.
   (b) x è un punto di accumulazione della rete S se e solo se x è un punto di accumulazione di $\mathcal{B}$.
2. *Sia $\mathcal{F} = \{F_a : a \in A\}$ un filtro in X. Allora per $a, b \in A$ poniamo $a \leq b$ se $F_a \supseteq F_b$. Dimostrare che l'insieme parzialmente ordinato $(A, \leq)$ é filtrante a destra e per ogni scelta di un punto $x_a \in F_a$ la rete $S = \{x_a : a \in A\}$:*
   (a) converge a $x \in X$ se il filtro $\mathcal{F}$ converge a x.
   (b) x è un punto di accumulazione della rete S se x è un punto di accumulazione del filtro $\mathcal{F}$.

   Inoltre, se il filtro $\mathcal{F}$ non converge a x (se x non é punto aderente di $\mathcal{F}$), per ogni $F_a \in \mathcal{F}$ esiste un punto $x_a \in F_a$, tale che la rete $S = \{x_a : a \in A\}$ non converge a x (x non é punto aderente di S).

4 Base e prebase di uno spazio topologico

Lavorare con *tutti* gli aperti di uno spazio topologico X può essere molto macchinoso e inefficiente. Per questo si cerca di individuare solo una parte essenziale di questi. A questo scopo si introduce il seguente concetto fondamentale.

Base di uno spazio topologico è una famiglia di aperti $\mathcal{B}$ con la proprietà che per ogni punto x dello spazio ed ogni aperto U che contiene x esiste un aperto $V \in \mathcal{B}$ tale che $x \in V \subseteq U$. *Prebase* di uno spazio topologico X è una famiglia di aperti $\mathcal{B}'$ tale che gli insiemi del tipo $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, con $B_i \in \mathcal{B}'$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e , formino una base dello spazio.

Teorema 4.1. *Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di un insieme X. Allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ su X se e solo se $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$ e per ogni coppia $B, B' \in \mathcal{B}$ e $x \in X$ con $x \in B \cap B'$ esiste un $B'' \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B'' \subseteq B \cap B'$.*

Dimostrazione. Definiamo τ assumendo come aperti tutte le unioni di insiemi di $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{B}$ è base della topologia τ. □

Teorema 4.2. *Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di insiemi non vuoti di un insieme X. Allora $\mathcal{B}$ è prebase di una topologia τ su X se e solo se $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{B}'$ come la famiglia di tutte le intersezioni finite di membri di $\mathcal{B}$. Allora, per il teorema precedente, $\mathcal{B}'$ è una base di una topologia su X. □

Esercizio 4.3. *Dimostrare che in uno spazio metrico i dischi aperti di raggio razionale formano una base della topologia indotta dalla metrica.*

Si noti come una base di uno spazio topologico non è necessariamente chiusa per intersezioni finite.

4.1 Spazi topologici con base numerabile

Per uno spazio X definiamo il *peso* $w(X)$ come la minima cardinalità di una base di X. Sono di grande importanza gli spazi X di base numerabile.

Esercizio 4.4. *Dimostrare che $\mathbb{R}$ ha una base numerabile.*

Suggerimento: Prendere come base la famiglia degli intervalli aperti (r, s) con $r < s$ numeri razionali.♣

Esercizio 4.5. *Dimostrare che uno spazio ha una base numerabile se e solo se ha una prebase numerabile.*

Esercizio 4.6. *Verificare che:*

(a) $\mathbb{R}$ ha come prebase(numerabile) la famiglia di intervalli $(-\infty, r)$, (r, ∞), dove $r \in \mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{R}^2$ ha come prebase(numerabile) la famiglia dei semipiani $\{x < r\}$, $\{x > r\}$, $\{y > r\}$, $\{y < r\}$, dove $r \in \mathbb{Q}$.

Notare che $\mathbb{R}$ ha precisamente $\mathbf{c}$ aperti (ogni intervallo $(a, +\infty)$ è aperto e d'altra parte, e $\mathbb{R}$ ha al più $\mathbf{c}$ aperti poiché $|P(\mathcal{B})| = \mathbf{c}$ dove $\mathcal{B} = \{(r, s) : r < s,\ \text{razionali}\ \}$ è una base numerabile di $\mathbb{R}$ ed ogni aperto è unione di una sottofamiglia dell' insieme $\mathcal{B}$).

Esercizio 4.7. *Dare un esempio di uno spazio che non ha una base numerabile.*

Suggerimento: Provare che uno spazio discreto ha base numerabile se e solo se è numerabile; basta quindi prendere uno spazio discreto che non sia numerabile. (Per un esempio meno banale vedi esercizio 5.17). ♣

Esercizio 4.8. *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una base di X. Dimostrare che per ogni sottospazio Y di X la famiglia $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ è una base di Y.*

Esercizio 4.9. *Dimostrare che ogni sottospazio di uno spazio a base numerabile ha base numerabile.*

Definizione 4.10. Dato uno spazio topologico X e due famiglie di parti di X $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dice che:

1) $\mathcal{A}$ è ricoprimento di X se $\bigcup \mathcal{A} = X$;

2) $\mathcal{B}$ è sottoricoprimento di $\mathcal{A}$ se è ricoprimento e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$;

3) $\mathcal{B}$ è raffinamento di $\mathcal{A}$ se è ricoprimento e ogni elemento di $\mathcal{B}$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{A}$;

Se $\mathcal{B}$ è raffinamento di $\mathcal{A}$ si pone $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$; $\prec$ risulta un ordine parziale nell'insieme dei ricoprimenti di X.

Definizione 4.11. Uno spazio topologico X si dice di *Lindelöff* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.

Teorema 4.12. *Ogni spazio numerabile ed ogni spazio a base numerabile sono di Lindelöff.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X e sia $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ un ricoprimento aperto di X. Per ogni $x \in X$ si scelga un $i \in I$ con $x \in U_i$. Allora esiste un elemento della base $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq U_i$. La famiglia $\{B_x : x \in X\}$ è numerabile (perché è un contenuta in $\mathcal{B}$), quindi esiste una sottofamiglia numerabile di $\{U_i\}$ che ricopre X. Se X è numerabile si ragiona analogamente, ma senza ricorso alla base, poiché ora i punti x sono in quantità numerabile. □

Proposizione 4.13. *Sottospazi chiusi di spazi di Lindelöff sono spazi di Lindelöff.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Lindelöff e sia Y un sottospazio chiuso di X. Sia $Y = \bigcup_{i\in I} U_i$ un ricoprimento aperto di Y. Per ogni $i \in I$ si scelga un aperto V_i in X tale che $U_i = Y \cap V_i$. Allora $(X \setminus Y) \cup \bigcup_{i\in I} V_i$ é un ricoprimento aperto di X. Se $\{V_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ é una famiglia numerabile che assieme a $X \setminus Y$ copre X, avremo un sottoricoprimento numerabile $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$. □

4.2 Spazi topologici separabili

Esercizio 4.14. *Dimostrare che ogni spazio topologico a base numerabile ha un sottoinsieme denso e numerabile.*

Una spazio topologico avente un sottoinsieme denso e numerabile si dice *separabile*.

Esercizio 4.15. *Dimostrare che uno spazio topologico che ha un sottospazio denso e separabile è anch'esso separabile.*

Teorema 4.16. *Dimostrare che per uno spazio metrico X le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) X è separabile;

(2) X ha base numerabile;

(3) X è di Lindelöff.

Dimostrazione. L'implicazione (2) ⇒ (3) segue dal Teorema 4.12. Supponiamo che valga (3) e dimostriamo che vale (1). Consideriamo per un $n \in \mathbb{N}$ fisso il ricoprimento aperto $X = \bigcup_{x\in X} B_{1/n}(x)$ di X. Allora esiste un sottoricoprimento numerabile, cioè un insieme numerabile $C_n \subseteq X$ tale che

$$X = \bigcup_{x\in C_n} B_{1/n}(x). \tag{1}$$

Ora $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ è numerabile e denso in X. Infatti, se $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, allora esiste $y \in C_n \subseteq C$ tale che $x \in B_{\frac{1}{n}}(y)$, i.e., $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ ossia $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C \neq \emptyset$. Poiché questo è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ concludiamo che $x \in \overline{C}$. Questo dimostra che X è separabile.

Per dimostrare l'implicazione (1) ⇒ (2) fissiamo un insieme denso e numerabile $D = \{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ di X. Allora $\mathcal{B} = \{B_{1/m}(d_n)\}_{m,n=1}^{\infty}$ é una base numerabile di X. □

Come visto sopra, gli spazi a base numerabile sono separabili ma il contrario non è in generale vero se lo spazio non è metrico (cf. 5.20).

Esercizio 4.17. *Sia X uno spazio metrico separabile. Dimostrare che ogni sottospazio di X è separabile.*

Vedremo tra poco che questa proprietà degli spazi metrici separabili non si estende in generale (cf. 5.22).

In generale, per un spazio topologico X si pone $d(X) = \min\{|D| : D \text{ è denso in } X\}$, chiaramente X è separabile quando $d(X)$ é numerabile.

Per un spazio topologico X e $x \in X$ il numero cardinale

$$\chi(X, x) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ è una base del filtro } \mathcal{V}(x) \text{ di intorni di } x \text{ in } X\}$$

si chiama $\chi(X, x)$ *carattere dello spazio X nel punto* x e si pone $\chi(X) = \sup_{x\in X} \chi(X, x)$ – *carattere* di X.

Inoltre, se $\mathcal{V}(x) = \{x\}$ in X, il numero cardinale

$$\psi(X, x) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}(x) \text{ con } \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = \{x\}\}$$

si chiama $\psi(X, x)$ *pseudocarattere dello spazio X nel punto* x. Se vale $\mathcal{V}(x) = \{x\}$ per tutti punti x in X, si pone

$$\psi(X) = \sup_{x\in X} \psi(X, x),$$

e $\psi(X)$ si dice *pseudocarattere* di X.

Si dice che X soddisfa il *primo assioma di numerabilità* se $\chi(X)$ é numerabile, ovvero, se ogni punto di X ha una base numerabile di intorni. Chiaramente, ogni spazio di base numerabile ed ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità. Più in generale, si ha:

Esercizio 4.18. *Dimostrare che* $d(X) \leq w(X)$ *e* $\psi(X) \leq \chi(X) \leq w(X)$.

Esercizio 4.19. *(a) Cacolare* $d(X), w(X), \chi(X)$ *e* $\psi(X)$ *se* X *è uno spazio discreto.*
(b) Cacolare $d(X), w(X), \chi(X)$ *e* $\psi(X)$ *se* X *è uno spazio indiscreto.*

5 Applicazioni continue, prodotti e quozienti

5.1 Applicazioni continue, aperte, chiuse, omeomorfismi

Definizione 5.1. Sia $f : X \to Y$ un' applicazione tra due spazi topologici. Si dice che

(a) f è *continua in* $x \in X$ se per ogni intorno U di $f(x)$ in Y esiste un intorno V di x in X tale che $f(V) \subseteq U$;

(b) f è *continua* se f è continua in ogni punto $x \in X$.

Esercizio 5.2. *Dimostrare che per un' applicazione* $f : X \to Y$ *tra due spazi topologici e* $x \in X$ *le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(a) f *è continua in* x*;*

(b) il filtro $f(\mathcal{V}(x)) \to f(x)$ *in* Y*;*

(c) per ogni filtro convergente $\mathcal{F} \to x$ *in* X *il filtro* $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ *in* Y*;*

(d) per ogni rete convergente $x_a \to x$ *in* X *la rete* $f(x_a) \to f(x)$ *in* Y.

Esercizio 5.3. *Dimostrare che per un' applicazione* $f : X \to Y$ *tra due spazi topologici le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(a) f *è continua;*

(b) l'immagine inversa di ogni aperto di Y *è aperta in* X*;*

(c) l'immagine inversa di ogni chiuso di Y *è chiuso in* X.

Esercizio 5.4. *Dimostrare che composizione di applicazioni continue è un'applicazione continua.*

Un' applicazione $f : X \to Y$ è detta:

- *omeomorfismo*, se f è biettiva e la sua inversa è continua;
- *immersione* se $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo;
- *aperta* se per ogni insieme aperto $U \subseteq X$ anche $f(U)$ è aperto;
- *chiusa* se per ogni insieme chiuso $F \subseteq X$ anche $f(F)$ è chiuso.

Gli spazi X e Y sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $X \to Y$. Se X è un sottospazio dello spazio topologico Y allora l'inclusione insiemistica $f : X \hookrightarrow Y$ è un' immersione.

Esercizio 5.5. *Sia* $f : X \to Y$ *una biezione tra spazi topologici. Dimostrare che* f *è continua se e solo se la sua inversa* f^{-1} *è aperta.*

Esercizio 5.6. *Siano* $f : X \to Y$ *un' applicazione tra spazi topologici,* $\mathcal{B}$ *una base di* X *e* $\mathcal{B}'$ *una prebase di* Y*. Allora:*

(a) f *è continua se e solo se l'immagine inversa tramite* f *di ogni aperto* $V \in \mathcal{B}'$ *è aperta in* X*;*

(b) f *è aperta se e solo se* $f(U)$ *è aperto in* Y *per ogni* $U \in \mathcal{B}$.

Esercizio 5.7. *Sia* X *in insieme non-vuoto e siano* τ_1 *e* τ_2 *due topologie su* X*. Dimostrare che*

(1) l'applicazione $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_1)$ *è continua se e solo se* $\tau_1 \supseteq \tau_2$*,*

(2) per l'applicazione $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_1)$ *le seguente affermazioni sono equivalenti:*

(a) id_X^{-1} *è continua;*
(b) id_X *è aperta;*
(a) id_X *è chiusa;*

(a) $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Esercizio 5.8. *Se X è uno spazio topologico, $M \subseteq X$ e $j : M \hookrightarrow X$ è l'immesione. Allora*
(a) j è aperta se e solo se M è aperto;
(a) j è chiusa se e solo se M è chiuso.

Esercizio 5.9. *(a) Dimostrare, che se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo tra due spazi topologici e $M \subseteq X$, allora anche M e $f(M)$ sono omeomorfi. (In altre parole, la proprietà "omeomorfismo si preserva per restrizione.)*

(b) Dimostrare, che anche le proprietà "aperta, "chiusa e "immersione di un'applicazione iniettiva si preservano per restrizione (in altre parole, se $f : X \to Y$ è iniezione aperta, allora anche $f|_M : M \to f(M)$ risulta aperta, ecc.).

(b) Se un'applicazione $f : X \to Y$ è continua, allora anche $f|_M : M \subseteq X$ risulta continua per ogni $M \subseteq X$.

(c) Dare esempio di un'applicazione aperta $f : X \to Y$ e $M \subseteq X$, tali che $f|_M : M \subseteq X$ non risulta aperta.

Esercizio 5.10. *Dimostrare che $d(X), w(X)$ e $\psi(X)$ sono invarianti cardinali, ovvero se X e Y sono spazi omeomorfi, allora $d(X) = d(Y)$, $\psi(X) = \psi(Y)$, $\chi(X) = \chi(Y)$, $w(X) = w(Y)$.*

5.1.1 Omotopia

Per due applicazioni continue $f, g : X \to Y$ diciamo che f *é omotopa a* g e scriviamo $f \sim g$ se esiste é un'applicazione continua $H : X \times [0, 1] \to Y$, detta *homotopia*, tale che $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = g(x)$ per ogni $x \in X$. Intuitivamente, la famiglia di applicazioni $H_t : X \to Y$ $(t \in [0, 1])$ definiti con $H_t(x) = (x, t)$ per ogni $x \in X$, presenta una specie di deformazione da $f = H_0$ a $g = H_1$.

Esercizio 5.11. *Verificare che $\sim$ é una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le applicazioni continue $X \to Y$. Inoltre vale*

$$g \circ f \sim g_1 \circ f_1, \text{ se } g \sim g_1 \text{ e } f \sim f_1. \tag{1}$$

Denotiamo con $[f]$ la classe di equivalenza di f. La proprietà (1) ci da la possibilità di definire correttamente la composizione $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

Esercizio 5.12. *(a) Siano $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue, dove X é uno spazio topologico. Dimostrare che $f \sim g$.*

(b) Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue, dove X é uno spazio topologico e Y é un sottoinsieme convesso[2] *di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $f \sim g$.*

(c) Siano $f, g : X \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ due applicazioni continue, dove X é uno spazio topologico e $f(X) \subseteq \mathbb{R}_+ = -\{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, $f(X) \subseteq \mathbb{R}_- = \{r \in \mathbb{R} : r < 0\}$. Dimostrare che $f \not\sim g$.

5.2 Prodotti di spazi topologici

Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici, $X = \prod_{i\in I} X_i$ il loro prodotto cartesiano e $\forall i \in I$ $p_i : X \to X_i$ la proiezione canonica. Su X si considera spesso la topologia , detta *topologia prodotto* o *topologia di Tichonov*, definita assumendo come prebase $\mathcal{B}$ la famiglia $\{p_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \text{ aperto in } X_i\}$. In seguito il prodotto di spazi topologici sarà sempre dotato della topologia di Tichonov.

Esercizio 5.13. *Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{i\in I} X_i$ dotato della topologia di Tichonov. Dimostrare che:*

(a) *le proiezioni $p_i : X \to X_i$ sono continue;*

(b) *per ogni spazio topologico Y un' applicazione $f : Y \to X$ è continua se e solo se sono continue tutte le composizioni $p_i \circ f : Y \to X_i$;*

(c) *se $x \in X$ e F è un sottoinsieme chiuso in X, allora esiste un insieme finito $J \subseteq I$ tale che per la proiezione naturale $p_J : X \to \prod_{i\in J} X_i$ si ha $p_J(x) \notin p_J(F)$.*

(d) *una successione $\{x_n\}$ in X è convergente se e solo se sono convergenti tutte le successioni $\{p_i(x_n)\}$, $i \in I$;*

(e) *una rete $\{x_d : d \in D\}$ in X è convergente se e solo se sono convergenti tutte le reti $\{p_i(x_d) : d \in D\}$, $i \in I$;*

(f) *se I è numerabile e tutti gli X_i sono spazi metrici, allora la topologia del prodotto è indotta dalla metrica definita sul prodotto degli X_i.*

Definizione 5.14. Sia $f : X \to Y$ un applicazione tra due insiemi. Il *grafico* di f é il sottoinsieme $Graph(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ di $X \times Y$.

[2] cioé se $y_1, y_2 \in Y$, allora anche il segmento che li connette in $\mathbb{R}^n$ sta in Y.

Esercizio 5.15. *Sia $f : X \to Y$ un applicazione tra due spazi topologici. Allora la biezione $i : X \to Graph(f)$ definita con $x \mapsto (x, f(x))$ é un applicazione aperta. Inoltre, i é un omeomorfismo se e solo se f é continua.*

Esercizio 5.16. *Il prodotto numerabile di spazi a base numerabile è ancora uno spazio a base numerabile.*

Esercizio 5.17. *Dimostrare che l'ipotesi sulla numerabilità del prodotto è essenziale nell'esercizio precedente.*

Suggerimento: Si consideri il prodotto $[0,1]^\alpha$ dove α è un cardinale non numerabile. ♣

Esempio 5.18. (Spazio di Baire) Sia I lo spazio dei numeri irrazionali con la topologia indotta da $\mathbb{R}$. Dimostrare che I è omeomorfo al prodotto $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, dove $\mathbb{N}$ è discreto.

Dimostrazione. Per costruire l'applicazione $f : I \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ presentiamo ogni numero irrazionale α in frazione catenaria calcolando $a_0 := [\alpha]$ (la parte intera di α), poi per $\alpha_1 := \alpha - a_0$ si pone $a_1 := [1/\alpha_1], \ldots, \alpha_n = 1/\alpha_{n-1} - a_{n-1}, a_n := [1/\alpha_n], \alpha_{n+1} = 1/\alpha_n - a_n, \ldots$. Adesso $\alpha \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ definisce una biezione $g : I \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ che risulta essere un omeomorfismo quando $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ si munisce della topologia di Tichonov. Infatti, poiché a_n é un intero positivo per ogni $n > 0$, si vede facilmente, che $|\alpha - \beta| < 1$ se $a_0 = b_0$, $|\alpha - \beta| < 1/2$ se $a_0 = b_0$ e $a_1 = b_1$, $|\alpha - \beta| < 1/6$ se $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, ecc. D'altra parte, se $\alpha \neq \beta$, le frazioni catenarie finite

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}} \quad \text{e} \quad b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots}}$$

ricavate dalle successioni $g(\alpha)$ e $g(\beta)$, approssimano α e β, quindi da una certa posizione in poi a_n e b_n devono distinguersi, che darà un indice n (sufficientemente grande) tale che $a_n \neq b_n$. Poichè $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ sono omeomorfi, possiamo rimpiazzare $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ con $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ per ottenere l'omeomorfismo desiderato $f : I \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$. □

Esercizio 5.19. *Sia I un insieme infinito e D l'insieme $\{0,1\}$ munito con la topologia discreta.*
(a) Dimostrare che $\psi(D^I) = |I|$.
(b) Dimostrare che D^I non ha base numerabile se I non è numerabile.

Dimostrazione. (a) Per $J \subseteq I$ denotiamo con $p_J : D^I \to D^J$ la proiezione naturale e identifichiamo anche D^J con il sottoinsieme di D^I di tutti elementi x con proiezione $p_i(x) = 0$ per ogni $i \in I \setminus J$. Sia $0 \in D^I$ il punto determinato con $p_i(0) = 0$ per ogni $i \in I$. Allora $W_F := D^{I \setminus F}$ è un intorno basico del punto 0. Per $F = \{i\}$ scriviamo anche W_i. Poiché $\bigcap_{i \in I} W_i = \{0\}$, si ha $\psi(D^I, 0) \leq |I|$. D'altra parte, sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}(0)$ con $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{0\}$. Allora ogni $B \in \mathcal{B}$ contiene qualche W_{F_B}, dove l'insieme finito $F_B \subseteq I$ dipende da B. Sia $J = I \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}} F_B$, allora $D^J = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} W_{F_B} \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{0\}$. Quindi, $J = \emptyset$. Pertanto, $I = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} F_B$ e quindi $|I| = |\mathcal{B}|$ poiché gli insiemi F_B sono finiti. Questo dimostra che $\psi(D^I, 0) \geq |I|$. Pertanto, $\psi(D^I, 0) = |I|$. Analogamente si può dimostrare che $\psi(D^I, x) = |I|$ per ogni $x \in D^I$. Quindi, $\psi(D^I) = |I|$.
(b) segue da $\psi(X) \leq \chi(X) \leq w(X)$. □

Esercizio 5.20. * *Dimostrare che $[0,1]^\mathbf{c}$ è separabile ma non ha base numerabile.*

Il fatto (non banale) che $[0,1]^\mathbf{c}$, dove $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$, è separabile è un caso speciale del seguente teorema di Hewitt-Marczewski-Pondiczery (per la dimostrazione vedi §11.3.2). Per vedere che $[0,1]^\mathbf{c}$ non ha base numerabile basta applicare l'Esercizio 5.19 e l'Esercizio 4.9.

Teorema 5.21. *Sia I un insieme di cardinalità $\leq \mathbf{c}$ e siano $\{X_i\}_{i \in I}$ spazi separabili. Allora anche lo spazio $\prod_{i \in I} X_i$ è separabile.*

Adesso vediamo che lo spazio separabile $[0,1]^\mathbf{c}$ ammette un sottospazio non separabile (cf. 4.17).

Esercizio 5.22. *Sia X il prodotto cartesiano di $\mathbf{c}$ copie dell'intervallo $[0,1]$ munito della topologia di Tichonov, cioè $X = [0,1]^I$ con $|I| = \mathbf{c}$, e sia Y il sottoinsieme di X formato dalle funzioni $f : I \to [0,1]$ che assumono valore diverso da 0 per una quantità al più numerabile di "coordinate $i \in I$. Allora:*

(1) Y è un sottospazio proprio e denso di $[0,1]^I$.

(2) ogni sottoinsieme numerabile D di Y è contenuto in un opportuno sottoprodotto numerabile K di Y.

(3) Y non è separabile.

Dimostrazione. Basta notare che Y coincide con l'unione di tutti sottoprodotti $X_A = [0,1]^A$, dove A è un sottoinsieme numerabile di I. Questo implica (2). Poiché il sottoinsieme compatto $K \neq Y$ è chiuso in Y, concludiamo che D non è denso in Y. Questo prova (3). □

La seguente costruzione di *prodotto fibrato* (o *pull back*) si usa spesso in topologia algebrica.

Esercizio 5.23. *Siano $X, Y e Z$ spazi topologici e siano $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni continue. Sia $P = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ e siano $p : P \to X$ e $q : P \to Y$ le restrizioni su P delle proiezioni $p_1 : X \times Y \to X$ e $p_2 : X \times Y \to Y$. Dimostrare che :*

(a) p e q sono continue e soddisfano $f \circ p = g \circ q$;

(b) per ogni coppia di applicazioni continue $u : W \to X$ e $v : W \to Y$ tali che $f \circ u = g \circ v$, esiste unica applicazione continua $t : W \to P$ tale che $p \circ t = u$ e $q \circ t = v$.

(c) se $|Z| = 1$, allora P coincide con il prodotto cartesiano $X \times Y$ e $p = p_1$, $q = p_2$.

Esercizio 5.24. *Sia X un insieme, sia $\{(Y_i, \tau_i) : i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici e sia $f_i : X \to Y_i$ una famiglia di applicazioni. La topologia τ su X avente come prebase la famiglia $\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, i \in I\}$ è detta* topologia iniziale *della famiglia $\{f_i\}_{i \in I}$. Dimostrare che:*

(a) ogni applicazione $f_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ è continua;

(b) τ è la topologia meno fine su X con la proprietà (a);

(c) la topologia del prodotto $X = \prod_{i \in I}(X_i, \tau_i)$ coincide con la topologia iniziale della famiglia delle proiezioni $p_i : X \to X_i$, $i \in I$.

(d) se $I = \{0\}$, e $f_0 : X \hookrightarrow Y_0$ è l'inclusione del sottoinsieme X di Y_0 in Y_0, allora la topologia indotta da τ_0 coincide con la topologia iniziale di f_0.

5.3 Quozienti e somme di spazi topologici

Sia X uno spazio topologico, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X e $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione canonica sull'insieme quoziente. Su $X/\sim$ si definisce la *topologia quoziente* nel seguente modo: un insieme $U \subseteq X/\sim$ è aperto nella topologia quoziente se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in X. Ovviamente, questo definisce una topologia su $X/\sim$. Inoltre, la topologia quoziente è la più fine tra tutte le topologie su $X/\sim$ che rendono π continua. Questo determina la seguente importante proprietà della topologia quoziente:

Lemma 5.25. *Sia $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione canonica e sia $X/\sim$ munito della topologia quoziente. Allora un' applicazione $g : X/\sim \to Z$ è continua se e solo se la composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Somma di una famiglia di spazi topologici $\{X_i\}_{i \in I}$ si definisce nel modo seguente. Si prende come insieme sostegno l'unione disgiunta $\oplus_{i \in I} X_i$. (Un modo standard di rendere questi insiemi due a due disgiunti e prendere la loro unione insiemistica $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e poi identificare ogni insieme con la sua immagine canonica $X_i \times \{i\}$ nel prodotto cartesiano $X \times I$.) La topologia della somma $\oplus_{i \in I} X_i$ si definisce così che ogni X_i risulta aperto in $\oplus_{i \in I} X_i$. Quindi, un sottoinsime arbitrario A di $\oplus_{i \in I} X_i$ è aperto nella topologia somma se e solo se ogni intersezione $A \cap X_i$ è aperta.

Esempio 5.26. Sia X la spazio $\mathbb{N} \times [0, 1]$ munito con la topologia del prodotto, dove $\mathbb{N}$ é discreto e $[0, 1]$ ha la solita topologia euclidea. Questa topologia coincide anche con la topologia della somma di $\mathbb{N}$ copie dell'intervallo $[0, 1]$.

Ora definiamo $(n, x) \sim (m, y)$ se e solo se $n = m$ e $x = y$, oppure $x = y = 0$. Lo spazio quoziento $V = X/\sim$ é noto come *ventaglio.* Dimostrare che le uniche successioni convergenti verso il punto comune 0 del ventaglio V sono quelli che sono contenuti da un certo punto in poi nello stesso intervallo $\{n\} \times [0, 1]$ dove convergono verso il punto 0.

Esercizio 5.27. *Sia X un insieme, sia $\{(Y_i, \tau_i) : i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici e sia $f_i : Y_i \to X$ una famiglia di applicazioni. La topologia τ su X, avente come aperti tutti gli insiemi $U \subseteq X$ tali che $f_i^{-1}(U)$ è aperto in Y_i per ogni $i \in I$, è detta* topologia finale *della famiglia $\{f_i\}_{i \in I}$. Dimostrare che:*

(a) ogni applicazione $f_i : (Y_i, \tau_i) \to (X, \tau)$ è continua;

(b) τ è la topologia più fine su X con la proprietà (a);

(c) la topologia della somma $X = \oplus_{i \in I}(X_i, \tau_i)$ coincide con la topologia finale della famiglia delle inclusioni $\iota_i : X_i \hookrightarrow X$, $i \in I$.

(d) se $I = \{0\}$, e $f_0 : Y_0 \to X$ è un applicazione suriettiva di Y_0 su X, allora la topologia quoziente di X coincide con la topologia finale della famiglia $\{f_0\}$.

La seguenti costruzioni si usano spesso in topologia algebrica. Sia X uno spazio topologico. Allora il prodotto $X \times I$, dove $I = [0, 1]$, è noto come *il cilindro su* X. Nel cilindro $X \times I$ identifichiamo tutti i punti del tipo $(x, 1)$ (cioè definiamo una partizione con unica classe di equivalenza non-singoletta $X \times \{1\}$). Il quoziente $(X \times I)/\sim$, denotato anche con $C(X)$, si dice *cono* su X.

Esercizio 5.28. *(a) Sia X la circonferenza. Dimostrare che $C(X)$ è omeomorfo al cerchio.*

(b) Sia S^n la sfera di dimensione n. Dimostrare che $C(S^n)$ è omeomorfo al disco D^n di dimensione n.

Nel cilindro $X \times I$ definiamo una partizione con unici due classi di equivalenza non singoletti $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$. Il quoziente $(X \times I)/\sim$, denotato anche con $\Sigma(X)$, si dice *sospensione* di X.

Esercizio 5.29. *(a) Sia X la circonferenza. Dimostrare che $\Sigma(X)$ è omeomorfo alla sfera S^2.*
(b) Sia S^n la sfera di dimensione n. Dimostrare che $\Sigma(S^n)$ è omeomorfo alla sfera S^{n+1} di dimensione $n+1$.

Segue adesso la definizione del *pushout* (o *incollamento* di due spazi X e Y lungo un sottospazio "comune Z).

Esercizio 5.30. *Siano X, YeZ spazi topologici e siano $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$ due applicazioni continue. Sia P il quoziente $U/\sim$ dell'unione disgiunta $U = X \times \{1\} \cup Y \times \{2\}$ rispetto alla relazione di equivalenza su U definito con $(x, 1) \sim (y, 2)$ per $x \in X$ e $y \in Y$ se esiste $z \in Z$ tale che $x = f(z)$ e $y = g(x)$, altrimenti, tutte le altre coppie $u, v \in U$ con $u \sim v$ soddisfano $u = v$. In altre parole, P si ottiene "dall'incollamento di X e Y lungo Z. Siano $p : X \to P$ e $q : Y \to P$ le applicazioni ottenute componendo le canoniche inclusioni $\iota_1 : X \hookrightarrow U$ e $\iota_2 : Y \hookrightarrow U$ con la mappa quoziente $U \to P$. Dimostrare che :*
(a) p e q sono continie e soddisfano $p \circ f = q \circ g$;
(b) per ogni coppia di applicazioni continue $u : X \to W$ e $v : Y \to W$ tali che $u \circ f = v \circ g$, esiste unica applicazione continua $t : P \to W$ tale che $t \circ p = u$ e $t \circ p = v$.
(c) se $Z = \emptyset$, allora P coincide con la somma $X \oplus Y$ e $p = \iota_1$, $q = \iota_2$.
(d) se $X = Y = Z$ e $f = g = id_X$, allora P coincide con X,
(e) $X = Y = C(Z)$ e $f = g : Z \hookrightarrow C(Z)$ l'immersione canonica, allora P coincide con la sospensione $\Sigma(Z)$.

6 Assiomi di separazione.

Uno spazio X si dice:

- T_0 se per ogni coppia di punti distinti x e y di X esiste un insieme aperto U di X tale che $x \in U$ e $y \notin U$, oppure $x \notin U$ e $y \in U$;
- T_1 se per ogni coppia di punti distinti x e y di X esistono insiemi aperti U e V di X tale che $x \in U$ e $y \notin U$, $x \notin V$ e $y \in V$;
- T_2 (o *di Hausdorff*) se per ogni coppia di punti distinti x e y di X esistono insiemi aperti disgiunti U e V di X tali che $x \in U$ e $y \in V$;
- *regolare* se per ogni punto $x \in X$ e per ogni insieme chiuso F di X con $x \notin F$ esistono due insiemi aperti disgiunti U e V di X tali che $x \in U$ e $F \subseteq V$;
- *completamente regolare* se per ogni punto $x \in X$ e per ogni insieme chiuso F di X con $x \notin F$ esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$ e $f(F) = 0$;
- *normale* se per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti F e G di X esistono due insiemi aperti disgiunti U e V di X tali che $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$;
- T_3 se è regolare e T_1;
- $T_{3.5}$ (o *di Tychonov*) se è completamente regolare e T_1;
- T_4 se è normale e T_1.

6.1 Tra T_0 e T_2

Esercizio 6.1. *Dimostrare che uno spazio topologico X è*

- *T_0 se e solo se $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$ implicano $x = y$ per ogni coppia di punti $x, y \in X$;*
- *T_1 se e solo se i punti di X sono chiusi;*
- *T_2 se e solo se la diagonale $\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$ munito della topologia prodotto;*
- *regolare se e solo se ogni punto ha una base di intorni chiusi.*

Esercizio 6.2. *Dimostrare che ognuna delle seguenti classi di spazi topologici è chiusa per passaggio a prodotti e per sottospazi:*

(a) spazi T_0;

(b) spazi T_1;

(c) spazi T_2.

(d) *spazi T_3 (regolari).*

Teorema 6.3. *Sia X uno spazio topologico T_0 avente una base $\mathcal{B}$ di cardinalità α. Allora X è omeomorfo ad un sottospazio del prodotto S^α, dove S è lo spazio di Sierpiǹski (cf. §3.1).*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{O}$ l'insieme degli aperti di X. Per un aperto $O \in \mathcal{O}$ denotiamo con $\chi_{X\setminus O}$ la funzione caratteristica $\chi_{X\setminus O} : X \to \{0,1\}$ dell'insieme $X \setminus O$. Allora si vede facilmente dalla definizione della topologia di $S = \{0,1\}$ che $\chi_{X\setminus O}$ è continua. Di conseguenza l'applicazione diagonale $f : X \to S^{\mathcal{O}}$, definita con $f(x)(O) := \chi_{X\setminus O}(x)$, è continua. Poiché X è T_0, si vede che f è anche iniettiva ed è un' immersione topologica. □

Esercizio 6.4. *Sia X uno spazio T_0, allora $|X| \leq 2^{w(X)}$.*

Esercizio 6.5. *Dimostrare che ogni spazio T_0 a base numerabile ha cardinalità al più* **c** *ed ha al più* **c** *aperti.*

Dimostrazione. Applicare il teorema precedente oppure considerare la seguente dimostrazione: fissata una base numerabile $\mathcal{B}$ dello spazio X, basta notare che ogni punto x è completamente determinato da un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ (il sottoinsieme degli $U \in \mathcal{B}$ che contengono x). Poiché $\mathcal{B}$ è numerabile, $P(\mathcal{B})$ è equipotente a $P(\mathbb{N})$. □

Lemma 6.6. *Dimostrare che uno spazio topologico X è T_2:*
(A) se e solo se ogni rete convergente in X ha un unico punto di accumulazone.
(B) se e solo se ogni filtro convergente in X ha un unico punto di accumulazone.

Dimostrazione. Per Es. 3.28 e 3.27, baste dimotrare che (B) é equivalente al fatto che X sia T_2. Sia $\mathcal{F} \to x$ e $y \neq x$. Per provare che y non é un punto aderente di $\mathcal{F}$ scegliamo due intorni disgiunti $U \in \mathcal{V}(x)$ e $V \in \mathcal{V}(y)$. Allora esiste $F \in \mathcal{F}$ con $F \subseteq U$, e quindi $V \cap F = \emptyset$. Pertanto $y \notin \overline{F}$ e quindi y non é un punto aderente di $\mathcal{F}$.

Ora supponiamo che ogni filtro convergente in X ha un unico punto di accumulazone. Siano x, y in X. Se per $U \cap V \neq \emptyset$ ogni $U \in \mathcal{V}(x)$ e $V \in \mathcal{V}(y)$, si trova una base di filtro $\mathcal{B} = \{U \cap V : U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y)\}$ che converge sia a x sia a y. Questo implica $x = y$. Pertanto X risulta T_2. □

Teorema 6.7. (Teorema del grafico chiuso) *Sia Y uno spazio topologico. Allora Y é T_2 se e solo se per ogni applicazione continua $f : X \to Y$ il grafico $Graph(f)$ é chiuso in $X \times Y$.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia T_2. Per provare che $Graph(f)$ é chiuso in $X \times Y$ consideriamo una rete convergente $z_a = (x_a, f(x_a)) \to (x, y)$ in $X \times Y$. Per la proprietà della topologia del prodotto si ha $x_a \to x$ in X e $f(x_a) \to y$. Poiché la continuità di f implica anche $f(x_a) \to f(y)$, possiamo concludere $y = f(x)$ con Es. 6.6. Quindi, $(x, y) \in Graph(f)$. Questo dimostra che $Graph(f)$ sia chiuso in $X \times Y$.

Ora supponiamo che per ogni applicazione continua $f : X \to Y$ il grafico $Graph(f)$ é chiuso in $X \times Y$. Applichiamo l'ipotesi per $X = Y$ e $f = id_Y$. Adesso $Graph(f) = \Delta_Y$, quindi l'ipotesi $Graph(f)$ chiuso in $Y \times Y$ implica Y é T_2 per l'Es. 6.1. □

Esercizio 6.8. *Se $f, g : X \to Y$ sono continue e Y è T_2, allora f e g coincidono qualora coincidano su un sottoinsieme denso di X.*

Teorema 6.9. *Sia X uno spazio T_2, allora $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.*

Dimostrazione. Sia D un sottoinsieme denso di X, basta dimostrare che $|X| \leq 2^{2^D}$. Per ogni punto $x \in X$ consideriamo il filtro aperto $\mathcal{V}(x)$. Per la densità di D, si ha $F_V = D \cap V \neq \emptyset$ per ogni $V \in \mathcal{V}(x)$. Pertanto, la famiglia $\{F_V : V \in \mathcal{V}(x)\}$ é una base di filtro $\mathcal{F}_x$ su D. Poiché X é T_2, l'applicazione $X \to \mathbf{Fil}(D)$ definita da $x \mapsto \mathcal{F}_x$ é iniettiva. Poiché $|\mathbf{Fil}(D)| \leq 2^{2^D}$, il teorema é dimostrato. □

Esercizio 6.10. *Dare un esempio:*

(a) *di uno spazio T_0 che non è T_1;*

(b) *di uno spazio T_1 che non è T_2.*

Suggerimento. Per il (b) vedi Esempio 3.10.

Esercizio 6.11. *Sia* **C** *una classe di spazi T_0 chiusa per prodotti e passaggio a sottospazi. Allora* **C** *coincide con la classe di tutti gli spazi T_0 qualora* **C** *contenga almeno uno spazio che non è T_1.*

Suggerimento. Applicare l'Es. 6.1 e il Teorema 6.3.

6.2 Spazi regolari

Definizione 6.12. Un aperto U di uno spazio topologico X si dice *regolare* se $U = \mathrm{Int}\overline{U}$.

Esercizio 6.13. *Determinare quali sono gli spazi T_1 in cui ogni aperto è regolare.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio T_1 e non discreto. Allora $\exists x \in X$ tale che $\{x\}$ non sia aperto. Per l' aperto $U = X \setminus \{x\}$ si ha $\overline{U} = X$ e quindi U non è regolare. Quindi gli spazi T_1 in cui tutti gli aperti sono regolari sono precisamente gli spazi discreti. □

Esercizio 6.14. *Un aperto denso non è regolare.*

Esercizio 6.15. *Se X è uno spazio T_2, allora $\forall x, y \in X, x \neq y$, esistono due aperti regolari U e V tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dimostrazione. Siano U_0 e V_0 aperti tali che $x \in U_0$, $y \in V_0$ e $U_0 \cap V_0 = \emptyset$; allora si ha anche $\overline{U_0} \cap V_0 = \emptyset$ e quindi, posto $U := Int(\overline{U_0})$, $x \in U$ e $U \cap \overline{V_0} = \emptyset$. Definendo $V := Int(\overline{V_0})$ si ha che U e V sono gli aperti regolari cercati. □

Esercizio 6.16. *In uno spazio regolare X ogni punto ha una base di intorni aperti e regolari.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e $\{U_i : i \in I\}$ una base di intorni chiusi; allora $\{\mathrm{Int}(U_i) : i \in I\}$ è la base cercata. □

Esercizio 6.17. *Sia $X = [0, 1]$; si consideri su X la topologia che ha come chiusi, oltre a quelli della topologia euclidea, l' insieme $F_0 := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, gli insiemi del tipo $F \cup F_o$ e $F \cap F_0$ dove F è un chiuso nella topologia usuale. Verificare che nessun punto irrazionale di X ha una base di intorni aperti regolari.*

Dimostrazione. Se $x \in X$ è irrazionale e U è un intorno basico di x, si può supporre U del tipo $\Delta \setminus \mathbb{Q}$ dove $\Delta = (r, s)$ è un intervallo aperto con $r, s \in \mathbb{Q}$. Poiché i punti razionali hanno gli stessi intorni della topologia usuale, la chiusura di U coincide con quella fatta nella topologia usuale, cioè $[r, s]$.Ora basta osservare che $Int(U)$ coincide con l' interno di Δ nella topologia usuale. □

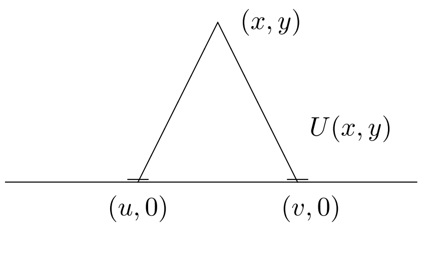
Esercizio 6.18. (Bing) *Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y \geq 0\}$. Definiamo, per $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ l'insieme $\Delta(\varepsilon, x) = \{(z, 0) : z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}\}$. Consideriamo la topologia su X che ha come base di intorni del punto $(x, 0) \in X$ l'insieme $\Delta(\varepsilon, x)(\varepsilon > 0)$, come base di intorni del punto $(x, y) \in X$ con $y > 0$ l'insieme $U_\varepsilon(x, y) = \{(x, y)\} \cup \Delta(\varepsilon, u) \cup \Delta(\varepsilon, v)(\varepsilon > 0)$, con u e v tali che il triangolo $T_{x,y}$ con vertici $(x, y), (u, 0), (v, 0)$ sia equilatero. Allora:*

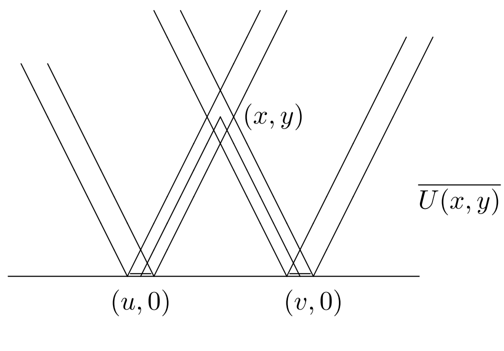
(1) X è T_2;

(2) l'insieme $D = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$ è denso in X;

(3) se $U \neq \emptyset$ è un insieme aperto e V un insieme aperto che contiene la chiusura di U, allora V è denso in X;

(4) X non è regolare.





Dimostrazione. Per (1) e (2) basta notare che sui due lati non orizzontali del triangolo $T_{x,y}$ non ci sono punti di X; quindi ogni punto $(x', y') \neq (x, y)$ di X è "fuori dai piedi ($\Delta(\varepsilon, u)$ e $\Delta(\varepsilon, v)$) di (x, y).

(3) Se $(x, y) \in U$, esiste anche un intorno aperto $U_\varepsilon(x, y) \subseteq U$. Ora anche $\overline{U_\varepsilon(x, y)} \subseteq V$ per la nostra ipotesi su V. Adesso basta notare che per un sottoinsieme denso D' di D si ha $D' \subseteq V$, poichè V è aperto. Questo implica che V è denso in X per il punto (2). (4) segue da (3). □

Esercizio 6.19. *Dare un esempio di uno spazio T_2 che non è regolare.*

Suggerimento. Si consideri l'esempio dell'esercizio precedente e si dimostri che per ogni insieme chiuso F con $Int(X) \neq \emptyset$ e per ogni $x \notin F$ ogni coppia di aperti U e V tali che $U \ni x$ e $V \supseteq F$ si intersecano.

Esercizio 6.20. *Verificare che gli aperti regolari di uno spazio topologico costituiscono una base per una topologia meno fine di quella di partenza.*

Esercizio 6.21. *La proprietà di regolarità non si preserva per raffinamento della topologia, mentre le proprietà di essere* T_0, T_1 *oppure* T_2 *si preservano.*

6.3 Assiomi di separazione più forti

Diamo adesso delle forme equivalenti degli assiomi T_3, $T_{3.5}$ e T_4 con intorni chiusi.

Lemma 6.22. *Dimostrare che uno spazio topologico* X*:*

(1) è regolare se e solo se per ogni punto $x \in X$ *e ogni aperto* U *di* X *che contiene* x *esiste un intorno aperto* V *di* x *tale che* $\overline{V} \subseteq U$*;*

(2) è completamente regolare se e solo se per ogni punto $x \in X$ *e ogni aperto* U *di* X *che contiene* x *esiste una funzione continua* $f : X \to [0,1]$ *tale che* $f(x) = 1$ *e* $f(X \setminus U) = 0$*;*

(3) è normale se e solo se per ogni chiuso $F \subseteq X$ *e ogni aperto* U *di* X *che contiene* F *esiste un aperto* V *di* X *tale che* $F \subseteq V$ *e* $\overline{V} \subseteq U$*.*

Notare che in (1)-(3) basta prendere l'aperto U *di una prebase di* X*.*

Dimostrazione. Per esercizio. □

6.3.1 Spazi di Tichonov

Esercizio 6.23. *Dimostrare che ogni spazio metrico è* $T_{3.5}$*.*

Esercizio 6.24. *Dimostrare che*

(a) prodotti e sottospazi di spazi T_3 *(rispettivamente,* $T_{3.5}$*) sono spazi* T_3*(rispettivamente,* $T_{3.5}$*);*

(b) sottospazi chiusi di spazi normali sono normali.

Teorema 6.25. (Tichonov) *Sia* X *uno spazio topologico* $T_{3,5}$ *avente una base di cardinalità* γ*. Allora* X *è omeomorfo ad un sottospazio del prodotto* $[0,1]^\gamma$*.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di cardinalità γ. Per due aperti $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ diremo che la coppia (U_1, U_2) è *distinta* se esiste una funzione continua $f : X \to I = [0,1]$ tale che

$$f(x) = 0 \text{ per } x \in X \setminus U_2 \ \text{ e } \ f(x) > \frac{1}{2} \text{ per } x \in U_1. \tag{1}$$

Poiché X è completamente regolare, per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno aperto $U_2 \in \mathcal{B}$ di x esiste un intorno aperto $U_1 \in \mathcal{B}$ di x tale che la coppia (U_1, U_2) è distinta. Sia A l'insieme di tutte le coppie distinte (U_1, U_2); per il ragionamento appena fatto la proiezione $(U_1, U_2) \mapsto U_2$ è suriettiva $A \to \mathcal{B}$; inoltre $A \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ e quindi $|A| = \gamma$. Per ogni $\alpha := (U_1, U_2)$ fissiamo una funzione $f_\alpha : X \to I$ soddisfacente (1). Allora l'applicazione diagonale $f : X \to I^A$, definita tramite la famiglia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, è continua in quanto sono continue le funzioni f_α(cf. Es. 5.3). Per provare che $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo si noti che per un punto $x \in X$ ed un intorno aperto U di X esiste un intorno $U_2 \in \mathcal{B}$ di x contenuto in U. Sia $U_1 \in \mathcal{B}$, come sopra, un intorno aperto di x tale che la coppia (U_1, U_2) è distinta. Allora per la funzione f_α con la proprietà (1) che corrisponde a questa coppia, si vede facilmente che $V = f_\alpha^{-1}((0,1]) \subseteq U_2 \subseteq U$. Allora per la proiezione $p_\alpha : I^A \to I$ si ha $f_\alpha = p_\alpha \circ f$ e quindi $f(V) = p_\alpha^{-1}((0,1]) \cap f(X)$ è un aperto in $f(X)$ con $f(x) \in f(V) \subseteq f(U)$. Quindi $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo. □

In onore di Tichonov i prodotti $[0,1]^\alpha$ si chiamano *cubi di Tichonov*, mentre $[0,1]^{\mathbb{N}}$ si dice *cubo di Hilbert*.

Esercizio 6.26. *Dimostrare che il cubo di Hilbert* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *è metrizzabile.*

Dimostrazione. Si deduce dall'es 5.13, (d). □

6.3.2 Spazi normali

Esercizio 6.27. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che X è T_4.*

Dimostrazione. Siano F e G due sottoinsiemi chiusi disgiunti di X. Poniamo $U = \{x \in X : d(x, F) < d(x, G)\}$ e $V = \{x \in X : d(x, G) < d(x, F)\}$. Ovviamente U e V sono aperti disgiunti e dall' Es. 2.22 risulta $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. □

Ora vediamo che l'assioma T_4 implica $T_{3.5}$.

Teorema 6.28. (Lemma di Urysohn della separazione) *Sia X uno spazio normale. Allora per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti F e G di X esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(F) = 1$ e $f(G) = 0$.*

Dimostrazione. L'idea è di costruire una successione V_n di aperti di X tali che se $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ è una numerazione dei numeri razionali in $[0, 1]$ con $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$, allora

$$F \subseteq V_0, \quad G \subseteq X \setminus V_1 \ \text{ e } \ \overline{V}_n \subseteq V_m \ \text{ qualora } r_n < r_m. \tag{2}$$

Per la normalità di X esistono due insiemi aperti disgiunti U e V tali che $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$, quindi $\overline{U} \subseteq X \setminus G$. Poniamo $V_0 := U$ e $V_1 := X \setminus G$. Chiaramente, $\overline{V}_0 \subseteq V_1$. Supponiamo di aver già definito $V_1, \dots, V_k$ tali che la(1) sia verificata per ogni $n, m \leq k$. Per definire V_{k+1} scegliamo tra $r_1, \dots, r_k$ i due numeri razionali r_s e r_d tali che $r_s < r_{k+1} < r_d$ e negli intervalli (r_s, r_{k+1}) e (r_{k+1}, r_d) non vi siano elementi della successione $r_1, \dots, r_k$). Poiché $r_s < r_d$, la condizione(2) ci dà $\overline{V}_s \subseteq V_d$. Per la normalità di X(vedi esercizio 6.22) esiste un insieme aperto V_{k+1} tale che $\overline{V}_s \subseteq V_{k+1} \subseteq \overline{V_{k+1}} \subseteq V_d$. Questo finisce la dimostrazione induttiva dell' esistenza di una succesione verificante la (2). Ora definiamo $f : X \to [0, 1]$ come segue: $f(x) := \inf\{r_n : x \in V_n\}$ e f la costante 1 su G. Allora $f(F) = 0$, Resta da vedere che f è continua. Per questo notiamo che $f(x) < s$ se e solo se esiste $r_n < s$ con $x \in V_n$. Quindi, $f^{-1}([0, s)) = \bigcup_{r_n < s} V_n$ è aperto. D'altra parte, $f(x) > s$ accade se e solo se esiste $r_m > s$ tale che $x \notin V_m$. Scegliamo r_n con $s < r_n < r_m$. Allora (2) ci dà $x \notin \overline{V}_n$. Quindi, l'insieme $f^{-1}((s, 1])) = \bigcup_{r_n > s} X \setminus \overline{V}_n$ è aperto. □

Una dimostrazione alternativa si può dare con i numeri razionali *diadici* in $[0, 1]$. Così l' ordine tra i punti $r < s$ in $[0, 1]$ risulta più intuitivo, ma l' induzione si "allunga per il fatto che ad ogni passo induttivo (assumendo di aver già definito V_r per tutti gli $r \in [0, 1]$ del tipo $r = \frac{a}{2^n}$) bisogna aggiungere altri 2^n aperti V_r (uno per ogni r del tipo $r = \frac{a}{2^{n+1}}$ con a dispari).
Avremo del seguente Lemma di Urysohn che permette di estendere funzioni continue in spazi normale.

Teorema 6.29. (Lemma di Urysohn dell'estensione) *Sia X uno spazio normale. Data una funzione reale continua $f : F \to [-c, c]$ definita su un chiuso $F \subset X$, esiste una funzione reale continua $\overline{f} : X \to [-c, c]$ che estende f.*

Dimostrazione. Non è restrittivo porre $c = 1$. Sia $A \subset X$ ed $f : A \to [-1, 1]$, continua, tale che $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \leq 1$. Possiamo assumere che f approssima -1 ed 1 su A. Altrimenti, se $a = \min_A f(x)$ e $b = \max_A f(x)$, consideriamo la funzione $g(x) = \frac{2}{b-a}(f(x) - \frac{a+b}{2})$. Allora g è continua su A se e solo se f è continua su A, e risulta : $\min_A g(x) = -1$, $\max_A g(x) = 1$.
Sia $r_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n, n \in \mathbb{N}$, $f_1 = f$, $\|f_1\| = \|f\| \leq 1 = 3r_1$.
Definiamo per induzione una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni continue su X, con $g_0 = 0$, tali che per le funzioni f_n definite su A tramite $f_{n+1} = f_n - g_n|_A$ vale $\|f_n\| \leq 3r_n$.
Passo induttivo: Supponiamo di aver già definito g_{n-1} tale che $\|f_n\| \leq 3r_n$.
Sia $A_n = \{x \in A : f_n(x) \leq -r_n\}$, $B_n = \{x \in A : f_n(x) \geq r_n\}$. Poichè A_n e B_n sono due chiusi disgiunti, esiste per il Lemma di Urysohn della separazione una funzione continua $g_n : X \to [-r_n, r_n]$ tale che $g_n(B_n) = \{r_n\}$ e $g_n(A_n) = \{-r_n\}$. Essendo $-3r_n \leq f_n(x) \leq -r_n$ su A_n, $r_n \leq f_n(x) \leq 3r_n$ su B_n, $-r_n \leq f_n(x) \leq r_n$ su $A \backslash (A_n \cup B_n)$ e $\|g_n\| \leq r_n$ su tutto A, per la funzione $f_{n+1} = f_n - g_n|_A$ risulta: $\|f_{n+1}\| \leq 2r_n = 3r_{n+1}$ e quindi il passo induttivo è verificato.
Essendo $\|g_n\| \leq r_n$ e g_n continus per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge totalmente, e la somma $g(x)$ è continua. Inoltre g è limitata:

$$|g(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1,$$

per ogni $x \in X$. Infine, g estende f:

$$(g_1 + g_2 + \ldots + g_n)|_A = f_1 - f_2 + f_2 + \ldots + f_n - f_{n+1} = f_1 - f_{n+1}.$$

Poichè $f_{n+1} \leq 3r_{n+1} \to 0$ su A, risulta che $g|_A(x) = \lim_{n \to \infty}(g_1 + g_2 + \ldots + g_n)|_A(x) = f_1(x)$. □

Il seguente teorema di Tietze si deduce dal lemma di Urysohn (cf. [E]).

Teorema 6.30. *Sia X uno spazio normale e A un sottospazio chiuso di X. Allora ogni funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ si estende ad una funzione continua $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Lemma 6.31. *Uno spazio topologico X è normale se e solo se per ogni sottoinsieme chiuso F di X e per ogni sottoinsieme aperto W di X che contiene F esiste una successione $W_1, \dots, W_n, \dots$ di insiemi aperti di X tali che $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ e $\overline{W_n} \subseteq W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Se X è T_4 esiste un aperto W_1 che contiene F e $\overline{W_1} \subseteq W$. Quindi la successione costante $W_n = W_1$ va bene.

Supponiamo adesso che X soddisfi la condizione nell'ipotesi e siano A e B due chiusi disgiunti di X. Con $F := A$ e $W := X \setminus B$ abbiamo una successione $W_1, \dots, W_n, \dots$ di insiemi aperti di X tali che $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ e $\overline{W_n} \cap B = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scambiando i ruoli di A e B, con $F := B$ e $W := X \setminus A$ abbiamo una successione $V_1, \dots, V_n, \dots$ di insiemi aperti di X tali che $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ e $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano adesso

$$O_i := W_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i} \overline{V}_k \quad \text{e} \quad U_i := V_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i} \overline{W}_k \tag{3}$$

Allora O_i e U_i sono aperti e $A \subseteq O := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ e $B \subseteq U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Dalla (3) segue che U e O sono disgiunti. □

Teorema 6.32. *Ogni spazio topologico di Lindelöff regolare è normale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio regolare di Lindelöff. Per verificare che X è normale applicheremo il lemma precedente. Sia F un sottospazio chiuso di X e sia W un aperto che contiene F. Per ogni $x \in F$ esiste un aperto W_x contenente x tale che $\overline{W_x} \subseteq W$. Per la Proposizione 4.13 F é di Lindelöff. Quindi esiste una sottofamiglia numerabile $W_n = W_{x_n}$ che copre F. Così abbiamo verificato che l'ipotesi del lemma é soddisfatta. □

Applicando il Teorema 4.12 e il teorema precedente si ottiene:

Corollario 6.33. *Uno spazio topologico regolare è normale nei seguenti due casi:*

- *X ha base numerabile;*
- *X è numerabile.*

È vero infatti il seguente teorema più forte:

Teorema 6.34. (Urysohn) *Ogni spazio T_3 a base numerabile è metrizzabile.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema segue facilmente dal lemma precedente, dal Teorema di Tichonov . e dall'Es. 6.26. □

Esercizio 6.35. *Per ogni ordinale α denotiamo con Y_α lo spazio topologico avente come elementi tutti gli ordinali minori di α munito della topologia avente come base di intorni dell' ordinale $\beta < \alpha$ tutti gli intervalli $(\gamma, \beta]$, dove $\gamma < \beta$. Dimostrare che:*

- *ogni ordinale successore è un punto isolato in Y_α;*
- *Y_α è di Tichonov;*
- *se α è numerabile, allora Y_α è normale;*
- *$Y_{\omega_1+1} \times Y_{\omega_0+1} \setminus (\omega_1, \omega_0)$ non è normale.*

Esercizio 6.36. (Il piano di Niemyzcki) *Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Per $(x, y) \in X$ tale che $y \neq 0$ si consideri come filtro di intorni quello dato dalla topologia euclidea indotta su X; per $(x, 0) \in X$ si consideri come filtro di intorni quello con base $B_\varepsilon(x, \varepsilon) \cup \{x\}$ al variare di $\varepsilon > 0$. Con questa topologia lo spazio X risulta $T_{3,5}$ ma non normale.*

Suggerimento. Supponiamo per assurdo che X sia normale. La retta $L = \{(x, y) \in X : y = 0\}$ è chiusa in X e la topologia indotta su di essa è quella discreta, dunque ogni sottoinsieme di L è chiuso in X. Sia $A \subseteq L$; allora A e $L \setminus A$ sono entrambi chiusi in X. Per la normalità di X si può trovare un aperto U_A verificante: $A \subseteq U_A$ e $\overline{U_A} \cap (L \setminus A) = \emptyset$, cioè $\overline{U_A} \cap L = A$. Dunque $\overline{U_A}$ determina A e così l' applicazione $f : A \mapsto \overline{U_A}$ è iniettiva. L' insieme $D = \{(r, s) \in X : r, s \in \mathbb{Q}\}$ è denso in X e $\forall A \subseteq L$ si ha $\overline{U_A} = \overline{U_A \cap D}$(vedi esercizio 3.18). Poiché $U_A \cap D \subseteq D$ e D è numerabile, i possibili $\overline{U_A}$ sono al più $\mathbf{c}$ mentre $|\mathcal{P}(L)| = 2^{\mathbf{c}}$, assurdo perché f è iniettiva.

Esercizio 6.37. *Se X è uno spazio normale e separabile, allora per ogni sottoinsieme chiuso e discreto D di X si ha $2^{|D|}$ =$\mathbf{c}$. Di conseguenza, uno spazio separabile con un sottoinsieme chiuso e discreto di cardinalità $\mathbf{c}$ non può essere normale.*

Suggerimento. Generalizzare il ragionamento fatto nell' esercizio precedente .

Esercizio 6.38. (la retta di Sorgenfrey) *Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di intorni di $x \in \mathbb{R}$ gli intervalli $[x, x+\varepsilon)$ al variare di $\varepsilon > 0$. Dimostrare che τ è indotta dalla quasimetrica dell' esercizio 2.4 e lo spazio $X = (\mathbb{R}, \tau)$ è normale, ma il prodotto $X \times X$ non è normale.*

Esercizio 6.39. *Dimostrare che T_4 non si preserva per passaggio a prodotti e per sottospazi.*

Esercizio 6.40. *Dare un esempio di uno spazio $T_{3.5}$ che non sia normale.*

Esercizio 6.41. *Dimostrare che la retta di Sorgenfrey dell' esercizio 2.4 non è metrizzabile e non ha base numerabile.*

7 Topologia e ordine

Sia X uno spazio topologico. Poniamo $x \leq y$ se $y \in \overline{\{x\}}$. Si verifica facilmente che $\leq$ è un preordine su X (cioè una relazione binaria riflessiva e transitiva), ma in generale non è un ordine parziale (cioè può mancare l' assimmetria).

Esercizio 7.1. *Dimostrare che uno spazio topologico X è T_0 se e solo se la relazione $\leq$ è un ordine parziale.*

Per un insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$ si definisce una topologia τ con base $\{\downarrow x\}_{x \in X}$, dove $\downarrow x := \{y \in X : y \leq x\}$; non è difficile vedere che τ è T_0 (basta vedere che l'ordine parziale associato è proprio $\leq$). τ si dice topologia inferiore *di Alexandrov-Tucker*. Analogamente, si definisce topologia superiore di Alexandrov-Tucker quella con base $\{\uparrow x\}_{x \in X}$, dove $\uparrow x := \{y \in X : y \geq x\}$; l' ordine associato a questa topologia è $\geq$.

Definizione 7.2. Uno spazio topologico si dice di *Alexandrov* se l'intersezione di ogni famiglia di aperti è un aperto.

Esercizio 7.3. *Dimostrare che ogni spazio topologico finito è spazio di Alexandrov.*

Esercizio 7.4. *Dimostrare che se X è uno spazio T_0 le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *X è di Alexandrov;*
- *l'unione di ogni famiglia di chiusi in X è chiusa;*
- *ogni punto di X ha un intorno aperto V_x minimo rispetto all'inclusione;*
- *per ogni famiglia $\{A_i\}$ di sottoinsiemi di X si ha $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$;*
- *esiste un ordine parziale $\leq$ su X tale che la topologia di X coincide con la topologia inferiore di Alexandrov-Tucker associata a $\leq$;*
- *esiste un ordine parziale $\leq$ su X tale che la topologia di X coincide con la topologia superiore di Alexandrov-Tucker associata a $\leq$.*

Esercizio 7.5. *Dimostare che ogni insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$ è isomorfo ad un sottoinsieme di $P(X)$, munito con l'ordine $\supseteq$ per inclusione.*

Suggerimento. Per $x \in X$ si consideri il sottoinsieme $\uparrow \{x\}$ di X e si noti che $x \leq y$ se e sole se $\uparrow \{x\} \supseteq \uparrow \{y\}$.

Esercizio 7.6. *Dimostare che ogni insieme parzialmente ordinato e finito X è isomorfo ad un sottoinsieme di $\{0,1\}^n$, dove $n = |X|$ e $\{0,1\}^n$ è munito dell' ordine del prodotto cartesiano dell' ordine indotto da $0 < 1$.*

Suggerimento. Applicare il Teorema 6.3 trovando una base di cardinalità n di X o ragionare come sopra.

Esercizio 7.7. *Sia $(X, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, munito con la topologia superiore di Alexandrov-Tucker e siano $a, b \in X$. Provare che:*

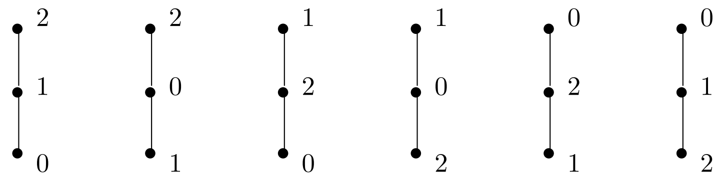
- *esiste l'estremo superiore $a \vee b$ in $(X, \leq)$ se e solo se $V_a \cap V_b \neq \emptyset$ e esiste $c \in X$ tale che $V_c = V_a \cap V_b$.*
- *esiste l'estremo inferiore $a \wedge b$ in $(X, \leq)$ se e solo se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e esiste $c \in X$ tale che $\overline{c} = \overline{a} \cap \overline{b}$. Descrivere quando $(X, \leq)$ é un reticolo.*

Esercizio 7.8. *Sia X un insieme con 3 elementi. Dimostrare che esistono 29 topologie diverse su X, tra le quali 19 sono T_0 e 10 non sono T_0. Descrivere tutte le topologie su un insieme X quando $|X| \leq 4$.*

Suggerimento. Le topologie T_0 corrispondono a ordini parziali su X. Per quelli non-T_0 esistono due punti distinti $x \neq y$ che hanno gli stessi intorni, pertanto si può diminuire il numero degli elementi di X identificando x e y.

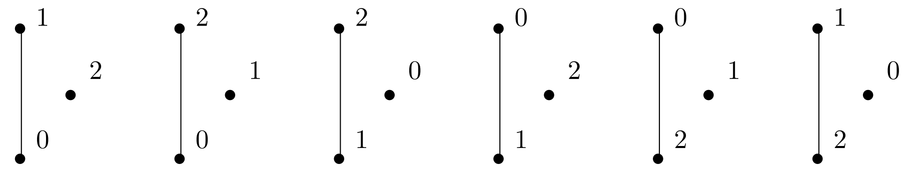
Seguono i diagrammi di Hasse degli ordini e preordini non discreti su $S = \{0, 1, 2\}$:

- Ci sono sei ordini totali,



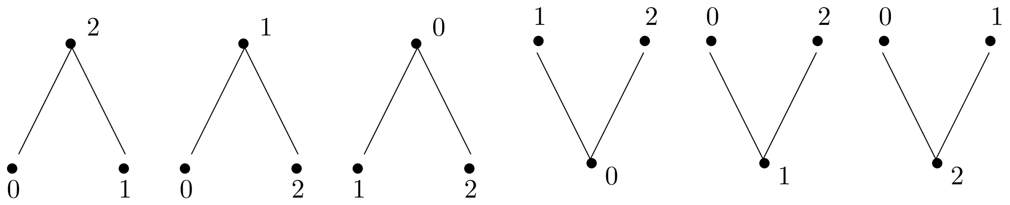
con rispettive topologie (A-T superiori) $\{\{2\},\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{2\},\{0,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},\{0,1\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{0,1\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{0,2\},S,\emptyset\}$.

- dodici ordini parziali non discreti, di cui sei senza massimo e minimo:



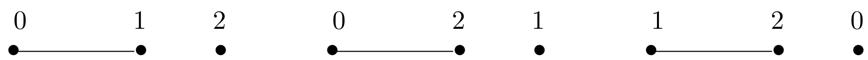
con rispettive topologie $\{\{1\},\{2\},\{0,1\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},\{2\},\{0,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{2\},\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{2\},\{0,1\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{1\},\{0,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{1\},\{1,2\},S,\emptyset\}$;

e sei con massimo o minimo

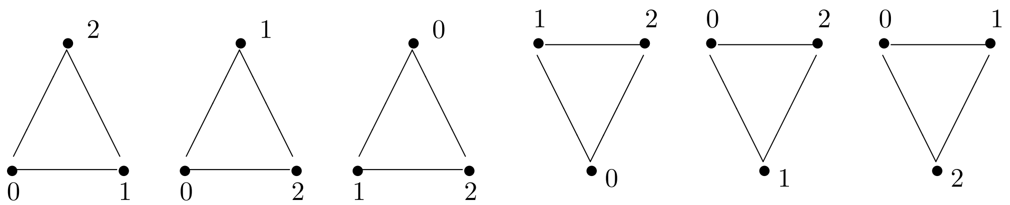


con rispettive topologie $\{\{2\},\{0,2\},\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},\{0,1\},\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{0,1\},\{0,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},\{2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{1\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{2\},S,\emptyset\}$.

- I preordini (oltre il perordine totale $S\times S$) che non sono ordini sono nove:



con rispettive topologie $\{\{2\},\{0,1\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},\{0,2\},S,\emptyset\}$,



con rispettive topologie $\{\{2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0\},S,\emptyset\}$, $\{\{1\},S,\emptyset\}$, $\{\{1,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0,2\},S,\emptyset\}$, $\{\{0,1\},S,\emptyset\}$,

7.1 Altre topologie generate da ordini

Su un insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$ si possono definire altre topologie (oltre a quella di Alexandrov-Tucker):

(a) la $\downarrow$ -topologia debole, avente base data da X e dagli insiemi $(-\infty, a) := \{x \in X : x < a\}$ al variare di $a \in X$;

(b) la $\uparrow$ -topologia debole, avente base data da X e dagli insiemi $(a, +\infty) := \{x \in X : x > a\}$ al variare di $a \in X$;

(b*) la topologia dell' ordine, avente prebase data da X e dagli insiemi $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ al variare di $a \in X$;

(c) la topologia delle frecce superiori, avente prebase data da X e dagli insiemi $(-\infty, a)$, $\uparrow a$ al variare di $a \in X$;

(c*) la topologia delle frecce inferiori, avente prebase data da X e dagli insiemi $(a, +\infty)$, $\downarrow a$ al variare di $a \in X$.

(d) la topologia di Scott, avente come insiemi chiusi gli insiemi $\downarrow$-chiusi che contengono anche i gli estremi superiori di tutti i suoi sottoinsiemi A che sono diretti a destra (cioè se $a, b \in A$, allora esiste $c \in A$ con $a \leq c$ e $b \leq c$).

Si osservi che in (a) è necessario includere X tra gli elementi della base (se X ha un elemento massimale, gli insiemi del tipo $(-\infty, a)$ non ricoprono X). Analogamente negli altri casi.

Esercizio 7.9. *Dimostrare che:*

(a) la minima topologia di Alexandrov contenente la $\downarrow$ -topologia debole è la topologia inferiore di Alexandrov-Tucker;

(b) la minima topologia di Alexandrov contenente la $\uparrow$ -topologia debole è la topologia superiore di Alexandrov-Tucker;

(c) la minima topologia di Alexandrov contenente la topologia dell' ordine è quella discreta.

Si denoti con α^+ (rispettivamente, α^-) la topologia superiore di Alexandrov-Tucker (rispettivamente, la topologia inferiore di Alexandrov-Tucker).

Esercizio 7.10. *Dato un insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$, si confrontino le seguenti proprietà:*

(a) l' ordine $\leq$ è totale;

(b) $\alpha^+ \vee \alpha^-$ è la topologia discreta;

(c) $\alpha^+ \wedge \alpha^-$ è la topologia indiscreta.

Esercizio 7.11. *Riscrivere le proprietà dell' ordine $\leq$ in termini di topologie associate a $\leq$ (per esempio, x è un elemento massimale se e solo se è punto chiuso in α^+).*

Esercizio 7.12. *Dimostrare che ogni insieme numerabile totalmente ordinato senza punti isolati e senza minimo e massimo é isomorfo a $\mathbb{Q}$. Consludere che ogni insieme totalmente ordinato separabile (cioé, con un sottoinsieme denso e numerabile) e senza punti isolati é isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.*

8 Estensioni

Uno spazio topologico Y si dice *estensione* dello spazio topologico X se X risulta sottospazio denso dello spazio Y.

8.1 Estensioni e filtri aperti

In generale le estensioni di uno spazio X si possono studiare tramite filtri dello spazio X. Infatti, per ogni $y \in Y$ la traccia su X del filtro $\mathcal{V}(y)$ degli intorni di y determina un filtro $\mathcal{F}_y$ di X. Ovviamente il filtro $\mathcal{F}_y$ ha una base di aperti (berevemente, $\mathcal{F}$ è *aperto*). Tuttavia, la famiglia $\{\mathcal{F}_y\}_{y \in Y \setminus X}$ dei filtri aperti su X non basta sempre per determinare la topologia dell'estensione Y. Allo scopo di semplificazione, in questo paragrafo studieremo le estensioni X_∞ di uno spazio metrico o topologico X fatte tramite l'aggiunzione di un punto solo ∞ (vedi anche §11.3). La traccia su X del filtro degli intorni di ∞ determina un filtro $\mathcal{F}$ di X. Ovviamente il filtro $\mathcal{F}$ ha una base di aperti (brevemente, $\mathcal{F}$ è *aperto*). Così ogni estensione X_∞ di un punto di X determina un filtro aperto di X. Viceversa, ad ogni filtro aperto $\mathcal{F}$ di X associamo un estensione X_∞ (che sarà denotata anche con $X_\mathcal{F}$ quando vogliamo mettere in evidenza il filtro $\mathcal{F}$) definita come segue: $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, ogni punto di X conserva il suo filtro di intorni aperti in X (cioè, X è aperto in X_∞) e un tipico intorno di ∞ è del tipo $\{\infty\} \cup U$, dove $U \in \mathcal{F}$.

Esercizio 8.1. *Sia $\mathcal{F}$ un filtro aperto dello spazio X. Dimostrare che $X_\mathcal{F}$ è T_1 se e solo se X è T_1 e $\mathcal{F}$ non ha punti fissi in X.*

Esercizio 8.2. *Sia $\mathcal{F}$ un filtro aperto dello spazio X. Dimostrare che $X_{\mathcal{F}}$ è T_2 se e solo se X è T_2 e $\mathcal{F}$ non ha punti di adherenza in X.*

Esercizio 8.3. *Dimostrare che uno spazio T_1 non ammette T_1-estensioni proprie se e solo se X è finito.*

Vedremo nel seguito che molti spazi di Hausdorff infiniti non ammettono estensioni proprie di Hausdorff.

Le estensioni di uno spazio discreto sono spazi topologici con tutti punti, tranne one, isolati. Spazi topologici con questo proprietà si chiamano *primi*. In questo paragrafo abbiamo visto come da uno spazio discreto, aggiundgendo un punto "all'infinito (che corrisponde a qualche filtro $\mathcal{F}$ sull'insieme X), si può arrivare ad uno spazio primo. Un altro modo di ricavare spazi primi e di partire di una spazio topologico (X, τ) del tutto arbitrario e di fissare un punto $x \in X$. Ora definiamo una topologia nuova τ_x su X per la quale tutti gli punti $y \neq x$ di X diventano aperti, mentre il punto x ha nella topologia τ_x gli stessi intrno di prima. In altre parole, $\tau_x = \{U \in \mathcal{P} : U \not\ni x\} \cup \mathcal{V}_\tau(x)$. Non è dificile vedere che (X, τ_x) è omeomorfo all'estensione $Y_{\mathcal{V}_\tau(x)}$, dove Y è lo spazio discreto $X \setminus \{x\}$. D'altra parte, τ coincide con l'estremo inferiore delle topologie τ_x al variare $x \in X$. Si potrebbe dire, che ogni spazio topologico di "decompone in estremo inferiore di topologie prime, come ogni numero naturale (tranne 0 e ± 1) si decompone in prodotto di numeri primi.

8.2 Estensioni di uno spazio discreto

Nel caso di uno spazio discreto X le cose si semplificano perchè il vincolo "aperto sul filtro $\mathcal{F}$ diventa irrilevante.

Esercizio 8.4. *Sia X un insieme discreto e siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due filtri su X. Allora l'applicazione $X_{\mathcal{F}} \to X_{\mathcal{G}}$ definita con $f(x) = x$ per ogni $x \in X$ e $f(\infty) = \infty$ è continua se e solo se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$.*

Esercizio 8.5. *Sia $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ un insieme numerabile in uno spazio topologico X. Se $s_n \to x$ per qualche $x \in X$ allora $s^{(n)} \to 0$ per ogni altra numerazione $S = \{s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)}, \ldots\}$ di S. (In entrambi casi si intendono numerazioni iniettive, cioé $s_n \neq s_m$ e $s^{(n)} \neq s^{(m)}$ se $n \neq m$.)*

Dimostrazione. Infatti, $s_n \to x$ implica che per ogni aperto $U \ni x$ in X la differenza $S \setminus U$ è finita. Questo non dipende dell'enumerazione di S. $\square$

Esercizio 8.6. *Sia $\mathcal{F}_0$ il filtro di Fréchet su $\mathbb{N}$. Allora:*

1. *$n \to \infty$ in $\mathbb{N}_{\mathcal{F}_0}$;*
2. *se per qualche insieme infinito $S \subseteq \mathbb{N}$ si ha $S \to \infty$ in $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}$, allora la traccia di $\mathcal{F}$ su S coincide con il filtro di Fréchet su S;*
3. *se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ allora non esiste alcun insieme infinito $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ di $\mathbb{N}$ tale che $s_n \to \infty$ in $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}$.*

Dimostrazione. 1. e 2. sono facili. Per dimostrare 3. basta notare che ogni insieme infinito $S \in \mathcal{U}$ può essere "spezzato in unione disgiunta di due insiemi infiniti $S = S' \cup S''$. Allora per le proprietà degli ultrafiltri precisamente uno dei due appartiene a $\mathcal{U}$. $\square$

8.3 Estensioni di uno spazio metrico

Per quanto concerne gli spazi metrici, l'esistenza di un estensione propria Y di uno spazio X comporta all'esistenza di una successione x_n in X che converge verso un punto $y \in Y \setminus X$. Ovviamente, essa soddisfa alla seguente condizione:

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n \geq n_0 \text{ ed ogni } m \geq n_0 \text{ si ha } d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (X, d) è *di Cauchy* se soddisfa (1). Le successioni di Cauchy servono per descrivere le estensioni metriche di uno spazio metrico.

Esercizio 8.7. *Le successioni convergenti sono di Cauchy.*

Esercizio 8.8. *Sia p un numero primo e si consideri $\mathbb{Q}$ munito con la metrica d indotta della norma p-adica $|\ |_p$. Sia a_n una successione di numeri interi e $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dimostrare che:*
(a) x_n è una successione di Cauchy;
(b) x_n converge se tutti a_n coincidono;
(c) x_n converge se la successione a_n è periodica, ovvero esistone $t, n_0 \in \mathbb{N}$ tali che $a_{n+t} = a_n$ per ogni $n \geq n_0$.

Esercizio 8.9. *Sia $f : X \to Y$ un applicazione uniformemente continua e sia $\{x_n\}$ una successione è di Cauchy in X. Allora anche la successione $f(\{x_n\})$ è di Cauchy.*

Esercizio 8.10. *Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X.*

- *per ogni punto $a \in X$ la successione $\{d(x_n, a)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$;*
- *per ogni successione di Cauchy $\{y_n\}$ in X la successione $\{d(x_n, y_n)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.*

Suggerimento: Applicare l'esercizio precedente alla funzione $f(x) = d(a, x)$ nel primo caso e alla funzione $g(x, y) = d(x, y)$ nel secondo caso. Notare che la funzione g è contraente (e quindi, uniformemente continua) poichè $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$. ♣

Definiamo una relazione binaria $\sim$ sull'insieme $\tilde{X}$ di tutte le successioni di Cauchy in X ponendo $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ se e solo se $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Si verifica facilmente che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Si vede inoltre, che se $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ allora $\{x_n\}$ è convergente se e solo se $\{y_n\}$ è convergente. Quindi la convergenza dipende solamente della classe della successione di Cauchy. Ad ogni classe non convergente corrisponde un'estensione X_∞ di X dove le distanza di ∞ dai punti $x \in X$ è definita tramite un rappresentate $\{x_n\}$ della classe con $\hat{d}(x, \infty) = \lim(x, x_n)$ (il limite esiste per L'Eser. 8.10).

9 Spazi metrici completi.

Definizione 9.1. Uno spazio metrico si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Teorema 9.2. *Un spazio X è completo se e solo se X non ammette estensione propria che sia spazio metrico.*

Dimostrazione. Se X é completo e X é sottospazio di qualchje spazio metrico Y, allora X é chiuso in Y perché non possono esserci successioni in X convergenti verso un punto esterno in Y (tali successioni sarebbero successioni di Cauchy in X che non sono convergenti in X contrariamente all'ipotesi di complettezza di X). Quindi X non ammette estensioni proprie. L'altra implicazione si dimostra analogamente. □

Teorema 9.3. *Un sottospazio A di uno spazio completo X è completo se e solo se A è chiuso.*

Esercizio 9.4. *Siano X e Y due spazi metrici uniformemente omeomorfi. Allora X è completo se e solo se Y è completo.*

Suggerimento: Si applichi Es. 8.9.

Esercizio 9.5. *$\mathbb{R}$ munito con la metrica $d(x, y) = |x - y|$ è completo.*

Suggerimento: Sfruttare il fatto che qui le successioni di Cauchy sono convergenti. ♣

Esercizio 9.6. *Lo spazio $\mathbb{R}$ munito con la metrica $\alpha(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ non è completo.*

Suggerimento: Dimostare che la successione $x_n = n$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, \alpha)$. ♣

Dedurre da questi due esercizi e dall'Es. 9.4 che per le due metriche equivalenti d e α gli spazi $(\mathbb{R}, d)$ e $(\mathbb{R}, \alpha)$ non sono uniformemente omeomorfi.

Esercizio 9.7. *Se $\{(X, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sono spazi metrici completi, allora anche $X = \prod_n X_n$ è completo.*

Dimostrazione. Se $\{x_m\}$ è una successione di Cauchy in (X, d), allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la proiezione p_n è uniformemente continua per 2.29, quindi la successione $\{p_n(x_m)\}$ è di Cauchy in X_n (cf. 8.9). Allora per la completezza di X_n la successione $\{p_n(x_m)\}$ è convergente per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora per 2.29 anche la successione $\{x_m\}$ è convergente. □

Teorema 9.8. *Lo spazio di Hilbert ℓ_2 è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_m\}_m$ una successione di Cauchy in ℓ_2. Sia $p_n : \ell_2 \to \mathbb{R}$ la proiezione definita dalla n-esima coordinata. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ il 8.9 assicura che la successione $p_n(x_m)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Sia $y_n \in \mathbb{R}$ il limite di questa successione. Allora $y = (y_n) \in \ell_2$ e $x_m \to y$. □

Esempio 9.9. (Il riccio a m aculei) Sia $m \geq \aleph_0$ un cardinale e sia S un insieme di cardinalità m. Consideriamo l'insieme Y costituito da m copie dell'intervallo $I = [0, 1]$: $Y = \bigcup_{s \in S} I_s$, dove $I_s = I \times \{s\}$. Su Y definiamo una relazione di equivalenza R definita da: $(x, s)R(y, t)$ se $x = y$ e $s = t$ oppure se $s = t = 0$. Il quoziente Y/R si dice riccio a m aculei e si denota con $J(m)$. Su $J(m)$ definiamo una metrica d con:

$$d((x, s), (y, t)) = x + y \text{ se } s \neq t, \;\; d((x, s), (y, s)) = |x - y|$$

(cioè d è la distanza che bisogna percorrere per andare da un punto all'altro lungo gli aculei). Allora d è metrica su $J(m)$, che risulta uno spazio metrico di peso m. Infatti l'insieme delle palle del tipo $B((r, s), \frac{1}{n})$ con $r \in \mathbb{Q} \cap I$, $s \in S$ e $n \in \mathbb{N}$ è base di cardinalità m e l'insieme $\{(1, s) : s \in S\}$ è discreto in $J(m)$.

Esercizio 9.10. *Provare che il riccio $J(m)$ è uno spazio metrico completo.*

Suggerimento. Nel caso $m = \aleph_0$ possiamo trovare un'applicazione $i : J(\aleph_0) \to \ell_2$ tale che $i(J(\aleph_0))$ è chiuso in ℓ_2 e $i : J(\aleph_0) \to i(J(\aleph_0))$ è Lipschitziana in entrambe direzioni. Quindi $J(\aleph_0)$ è completo essendo uniformemente omeomorfo ad uno spazio completo.

Dare anche un argomento diretto per la completezza di $J(m)$. ♣

Esercizio 9.11. *Paragonare la topologia del riccio $J(\aleph_0)$ col la topologia del ventaglio V.*

Si può cambiare la metrica del riccio $J(\aleph_0)$, disponendolo nel piano con il punto O nel centro e gli "aculei sui segmenti definiti da $A_r = \{t(\cos 2\pi r + i \sin 2\pi r) : 0 \leq t \leq 1\}$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Ora, con la metrica usuale del piano, otteniamo uno spazio che denoteremo con H.

Esercizio 9.12. *Provare che il riccio H non è uno spazio metrico completo.*

Suggerimento: Trovare un sottospazio chiuso di H (per esempio, l'insieme dei punti a distanza $1/2$ da O) che non è completo ed applicare Teorema 9.3.

9.1 Completamento di uno spazio metrico

Esercizio 9.13. *Sia (X, d) uno spazio topologico. Dimostrare che lo spazio $(C^*(X), d_u)$ delle funzione continue limitate con la metrica d_u della convergenza uniforme è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(C^*(X), d_u)$. Fissando $x \in X$ si vede subito che la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi esiste $f(x) := \lim f_n(x)$. La funzione f così definita risulta continua poiche f_n converge uniformemente verso f (cf. 2.25). Notiamo infine che $f_n \to f$ anche nello spazio metrico $(C^*(X), d_u)$. □

Esercizio 9.14. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che lo spazio $(C^*(X), d_u)$ delle funzione uniformemente continue limitate con la metrica d_u della convergenza uniforme è completo.*

Dimostrazione. Ragionare come prima. Adesso la funzione f risulta uniformemente continua poichè f_n è uniformemente continua e converge uniformemente verso f (cf. 2.25). □

Teorema 9.15. (Teorema di Hausdorff) *Ogni spazio metrico (X, d) ammette un applicazione isometrica $\iota : X \to Y$ in uno spazio metrico completo Y. Inoltre, ι si può scegliere con $\iota(X)$ denso in Y.*

Dimostrazione. Dall'Eser. 2.26 esiste un applicazione isometrica $\iota : (X, d) \to (C^*(X), d_u)$ e questo spazio è completo come visto sopra. Per concludere notiamo che $\overline{\iota(X)}$ è completo in quanto sottospazio chiuso di uno spazio completo (cf. Es. 9.3). □

Un altro modo, più esplicito, di costruire uno spazio completo a partire di uno spazio metrico arbitrario lo conosciamo dall'analisi – il completamento alla Cantor dei numeri razionali che ci dà $\mathbb{R}$. Questo procedimento funziona nello stesso modo anche per spazi metrici. Per uno spazio metrico X denotiamo con $\hat{X}$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ dell'insieme $\tilde{X}$ delle successioni di Cauchy di X. Definiamo una distanza $\hat{d}$ in $\hat{X}$ ponendo $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim d(x_n, y_n)$, dove $\{x_n\} \in \hat{x}$ e $\{y_n\} \in \hat{y}$ (questo limite esiste per l'Eser. 8.10). Si verifica facilmente che $\hat{d}$ è una metrica su $\hat{X}$ per la quale la funzione $\iota : X \to \hat{X}$ definita con $\iota(x)$ la classe in $\hat{X}$ della successione costante x, riuslta una isometria. In più, ogni successione di Cauchy $\{x_n\}$ in X converge verso il punto $\hat{x}$ di $\hat{X}$ determinato dalla classe di $\{x_n\}$. Per finire basta applicare il seguente:

Esercizio 9.16. *Sia Y uno spazio metrico che contine un sottospazio X tale che ogni successione di Cauchy in X è convergente in Y. Allora la chiusura $\overline{X}$ in Y è completa.*

Dimostrazione. Supponiamo ad assurdo che $\overline{X}$ non sia completo. Allora esiste una successione di Cauchy $\{y_n\}$ in $\overline{X}$ che non converge in Y. Pertanto Y ammette un'estensione propria Y_∞ tale che $y_n \to \infty$ in Z. Quindi X è denso in $Z = \overline{X} \cup \{\infty\}$. Sia $x_n \to \infty$ con $x_n \in X$. Per l'ipotesi esiste il limite $y = \lim x_n \in Y$. Per l'inicità del limtie in Z si ha $\infty = y \in Y$ assurdo. □

Dal teorema di unicità che dimostriamo adesso si vede che le costruzioni diverse non possono dare risultati essenzialmente diversi.

Avremo bisogno del seguente teorema di estensione di applicazioni uniformemente continue.

Teorema 9.17. *Sia Y uno spazio metrico completo e sia A un sottospazio denso di uno spazio metrico X. Allora ogni applicazione uniformemente continua $f : A \to Y$ si estende in modo unico a tutto lo spazio X. Se f è isometrica, allora lo è anche la sua estensione.*

Dimostrazione. Per $x \in X$ scegliamo una succesione $a_n \to x$ con $a_n \in A$ per tutti n. Poiche la successione $\{a_n\}$ è di Cauchy (cf. 8.7) lo è anche $\{f(a_n)\}$ (cf. 8.9). Per la completezza di Y esiste $f(x) := \lim f(a_n)$. La correttezza della definizione ed il fatto che f così definita estende l'applicazione in partenza si verificano agevolmente. Per vedere che f sia uniformemente continua fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta > 0$ tale che per $a, a' \in A$ si ha $d'(f(a), f(a')) < \varepsilon/2$ se $d(a, a') < \delta$. Ora per ogni coppia $x, x' \in X$ con $d(x, x') < \delta/2$ si ha $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$. (Infatti, scegliamo $a, a' \in A$ con $d(a, x) < \delta/4$, $d(a', x') < \delta/4$, $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon/4$ e $d'(f(x'), f(a')) < \varepsilon/4$. Allora $d(a, a') < \delta$ e quindi $d'(f(a), f(a')) < \varepsilon/2$.)

L'unicità di f si verifica facilmente (per il caso generale vedi anche 6.8). Nel caso f sia isometrica, notiamo che per $x, x' \in X$ con $x = \lim a_n, x' = \lim a'_n$ (dove $a_n, a'_n \in A$) si ha

$$d(x, x') = \lim d(a_n, a'_n) = \lim d'(f(a_n), f(a'_n)) = d'(f(x), f(x'))$$

per la continuità della funzione d. □

Adesso il seguente teorema di unicità segue subito dal teorema precedente.

Teorema 9.18. *Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $i_\nu : (X, d) \to Y_\nu$, $\nu = 1, 2$ due applicazioni isometriche con Y_1, Y_2 spazi metrici completi e $i_\nu(X)$ denso in Y_ν. Allora esiste un isometria $j : Y_1 \to Y_2$ tale che $j \circ i_1 = i_2$.*

L'unico (a meno di isometria) spazio completo che contiene un dato spazio metrico X come sottospazio denso chiameremo *completamento* di X e denoteremo con $\hat{X}$.

9.2 I teoremi di Banach, Cantor e Baire

Dedichiamo questo paragrafo ai tre teoremi classici che hanno reso il concetto "spazio completo parte della cultura generale di ogni matematico. Il primo tratta i così detti punti fissi di un applicazione $f : X \to X$, cio' e punti $x \in X$ tali che $f(x) = x$.

Teorema 9.19. (Teorema di Banach del punto fisso) *Sia X uno spazio metrico completo e $f : X \to X$ un applicazione per la quale esiste un $r < 1$ tale che $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$. Allora esiste un (solo) punto fisso di f.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ arbitrario. Poniamo $x_0 := x$ e definiamo x_n per induzione ponendo $x_k := f(x_{k-1})$ per $k > 0$. Adesso la disuguaglianza $d(x_k, x_{k+1}) \leq r^k d(x_0, x_1)$ si dimostra per induzione dalla disuguaglianza

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq rd(x_{k-1}, x_k) \tag{1}$$

e mostra che la successione x_k è di Cauchy. Sia $a = \lim x_k$. Allora passando al limite in (1) (visto come $d(x_k, f(x_k)) \leq d(x_{k-1}, f(x_{k-1})))$ avremo $d(a, f(a)) \leq rd(a, f(a))$ e quindi $d(a, f(a)) = 0$. Di conseguenza $f(a) = a$. Per l'unicità basta notare che il punto fisso $a = a_x$ ricavato a partire dal punto arbitrario x non dipende da x in quanto per $y \in X$ con le iterazioni y_n ed il limite a_y definiti come prima si ha $d(a_x, a_y) \leq d(x_n, y_n) \leq r^n d(x, y)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $d(a_x, a_y) = 0$ e $a_x = a_y$. □

Questo teorema trova numerosissime applicazioni nell'analisi matematica, dove X è uno spazio di funzioni e f è opportuno operatore differenziale su X. In tal caso è fondamentale anche il fatto, venuto fuori nella dimostrazione, che all'unico punto fisso di f si può arrivare con la successione delle iterazioni di f a partire da *ogni* punto dello spazio. La condizione $r < 1$ è importante:

Esercizio 9.20. *Dare esempio di un funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per tutti $x, y \in \mathbb{R}$ non avente punti fissi.*

Teorema 9.21. (Teorema di Cantor) *Sia X uno spazio metrico completo e sia $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ una successione di sottospazi chiusi con $\lim_n$ diam $A_n = 0$. Allora l'intersezione $\bigcap_n A_n$ consiste di un solo punto.*

Dimostrazione. Poniamo $A = \bigcap_n A_n$. Chiaramente diam $A = 0$, quindi A ha al più un punto. Per vedere che $A \neq \emptyset$ scegliamo $a_n \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy, quindi converge verso un punto a. Poichè A_n è chiuso avremo $a \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $a \in A$. □

La condizione $\lim_n \operatorname{diam} A_n = 0$ è essenziale nel teorema di Cantor. Infatti, con $A_n = [n, +\infty)$ nello spazio completo $\mathbb{R}$ abbiamo $\bigcap_n A_n = \emptyset$. Vedremo poi, che questa condizione può essere eliminata se lo spazio è compatto (cf. 10.21).

L'interno di un insieme A in uno spazio metrico consiste di tutti punti $a \in X$ per i quali esiste un $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Ovviamente, questo coincide con la definizione di interno per spazi topologici quando si prende la topologia metrica di X.

Teorema 9.22. (Teorema di Baire) *Sia X uno spazio metrico completo. Allora per ogni famiglia numerabile $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsieme chiusi di X con $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ esiste un F_n con interno non-vuoto.*

Dimostrazione. Supponiamo ad assurdo che ogni F_n ha interno vuoto. Vogliamo costruire per induzione una successioni di insiemi chiusi $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ con interno non vuoto tali che

$$A_n \cap F_n = \emptyset \text{ e } \mathrm{diam} A_n < 1/n \text{ per ogni } n > 0 \qquad (2).$$

Poniamo $A_0 = X$ e supponiamo di aver già definito A_n con interno non vuoto e soddisfacente (2). Poiché F_{n+1} ha interno vuoto possiamo trovare un disco aperto B in A_n tale che $\overline{B} \cap F_{n+1} = \emptyset$ e diam $B < 1/(n+1)$. Adesso poniamo $A_{n+1} = \overline{B}$. Per il teorema di Cantor applicato alla successione $\{A_n\}$ troviamo un punto $a \in \bigcap_n A_n$. Per (2) $a_n \notin F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ – assurdo poichè $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. □

Un sottoinsieme con interno vuoto in uno spazio X si dice anche *magro*, mentre un sottoinsieme di unione numerabile di insiemi chiusi magri di X si dice *di prima categoria*. Un sottoinsieme di X che non è di prima categoria si dice *di seconda categoria*. In questi termini, il teorema di Baire afferma che *ogni spazio metrico completo è di seconda categoria*. Per questo motivo il teorema di Baire è noto anche come *il teorema di Baire delle categorie*. La dimostrazione del teorema di Baire ci dà il seguente teorema più forte: *se X è uno spazio metrico completo allora il complemento di ogni sottospazio di prima categoria in X è denso in X*, in particolare, il complemento di ogni sottospazio di prima categoria è un sottospazio di seconda categoria (cf. 9.24).

Nell'Esercizio 9.24 vediamo che la completezza non è una condizione necessaria per la validità del teorema di Baire.

Chiaramente, per un punto $x \in X$ l'insieme $\{x\}$ è magro se e solo se x non è isolato.

Esercizio 9.23. *Uno spazio metrico numerabile e senza punti isolati (per esempio, $\mathbb{Q}$) è di prima categoria.*

Proposizione 9.24. *Dimostrare che lo spazio (I, d) dei numeri irrazionali con la metrica d idotta da $\mathbb{R}$ è di seconda categoria non essendo uno spazio completo.*

Dimostrazione. Notare che $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è completo in quanto sottospazio denso e proprio di $\mathbb{R}$ (vedi Es. 9.3). Sia per assurdo $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, dove D_n è chiuso e magro in I. Allora la chiusura F_n di D_n è insieme magro in $\mathbb{R}$ e quindi $\mathbb{R}$ risulta di prima categoria in quanto unione numerabile di insiemi magri ($\{F_n\}$ e $\{\{r\} : r \in \mathbb{Q}\}$), mentre il teorema di Baire delle categorie ci dice che $\mathbb{R}$ è di seconda categoria – assurdo. □

Bisogna notare qui che anche se (I, d) non è completo, questo fatto è dovuto alla *metrica d*, mentre esistono altre metriche equivalenti su I che sono completi (cf. Esercizio 9.32 o 5.18).

9.3 Come riconoscere gli spazi metrici completi

Esercizio 9.25. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme chiuso di X. Per la funzione f_A definita con $f_A(x) = d(x, A)$ dimostrare che $d^*(x, y) = d(x, y) + |1/f_A(x) - 1/f_A(y)|$ definisce una metrica sul complemento $X \setminus A$ che ha le stesse successioni convergenti come d. Dimostare che se X è completo, allora $X \setminus A$ risulta completo se munito con la metrica d^*.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy nello spazio $(X \setminus A, d^*)$. Allora $\{x_n\}$ risulta di Cauchy anche rispetto alla metrica d. Per la completezza di (X, d) esiste il limite $\lim_n x_n \in X$. Verificare che $\lim_n x_n \notin A$ perchè altrimenti $1/f_A(x) \to +\infty$, mentre $1/f_A(x_n)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Poichè A è chiuso, esiste allora un $\varepsilon > 0$ tale che $d(x, A) \geq \varepsilon$. Dedurrne che $x_n \to x$ anche rispetto alla metrica d^*. □

Nel seguito estenderemo questa costruzione anche nel caso quando A è unione numerabile di sottoinsiemi chiusi di X (cf. §9.3).

Esercizio 9.26. *Trovare una metrica d^* sull'intervallo $(0, 1)$ avente le stesse successioni convergenti come la metrica usuale d su $\mathbb{R}$ e per la quale $(0, 1)$ risulta completo.*

Abbiamo visto poco prima che alcuni spazi metrici pur non essendo completi ammettono una metrica equivalente che li rende completi (i numeri irrazionali). Questo solleva il seguente problema: dato uno spazio metrico X come riconoscere se X ammette una metrica equivalente completa.

A questo scopo serve una classe importante di sottoinsiemi dei spazi metrici che comprende simultaneamente sia gli insiemi chiusi che quelli aperti. Un sottoinsieme A di uno spazio metrico X si chiama *insieme G_δ* se A è intersezione di una famiglia numerabile di aperti. Ovviamente ogni insieme aperto è anche insieme G_δ.

Esercizio 9.27. *Dimostare che ogni insieme chiuso è G_δ.*

Dimostrazione. Sia A un insieme chiuso. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme aperto $U_n := \{x \in X : d(x, A) < 1/n\}$ e si provi che $A = \bigcap_n U_n$. □

Lemma 9.28. *Sia X uno spazio metrico e sia A un insieme G_δ di X. Dimostare che esiste un'applicazione $f : Y \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che* Graph (f) *è chiusa in $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Dimostrazione. Sia $A = \bigcap_n U_n$, dove ogni U_n è aperto in X. Sia $F_n = X \setminus U_n$ e $f_n(x) = (d(x, F_n))^{-1}$ definita su U_n. Allora tutte le funzioni f_n sono definite su A e pertanto definiscono una funzione diagonale $f : A \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che la n-esima coordinata di $f(x)$ sia $f_n(x)$. Poichè tutti f_n sono continue, anche f lo è (cf. 5.13). Per il teorema del grafico chiuso (cf. 6.7) $G =$ Graph (f) è chiuso nel prodotto $A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Per vedere che G è chiuso anche nel prodotto $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supponiamo ad assurdo che non lo sia e prendiamo un punto nella chiusura $(a, z) \in \overline{G} \setminus G$. Allora $a \in X \setminus A$ poiche G è chiuso in $A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Allora esiste un $n \in \mathbb{N}$ con $a \notin U_n$ e quindi $a \in F_n$. Sia adesso $\{(a_k, r_k)\}$ una successione in G che converge verso (a, z). Per la continuità della funzione $d(x, F_n)$ deduciamo che $d(a_k, F_n)$ converge verso 0 quando $k \to \infty$ (i.e., quando $a_k \to a$). Allora abbiamo $\lim f_n(a_k) = +\infty$. D'altra parte, per $(a_k, r_k) \in G$ abbiamo $r_k = f_n(a_k)$ per tutti $k \in \mathbb{N}$. Quindi $z = \lim r_k = \lim f_n(a_k) = +\infty$ – assurdo. □

È stato facile dimostrare che sottospazio chiuso di uno spazio completo resta completo (rispetto alla stessa metrica) (cf. 9.3). Nel seguente teorema, dovuto ad Alexandroff, estendiamo questo risultato ai sottospazi G_δ ma dovendo eventualmente sostituire la metrica del sottospazio con una metrica equivalente. Questo è stato già fatto Nell'Esr. 9.25 nel caso di sottospazi aperti.

Teorema 9.29. *Sia X uno spazio metrico completo e sia A un G_δ-insieme di X. Allora A è omeomorfo ad uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Per Lemma 9.28 esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che Graph (f) è chiuso in $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Poiché X e $\mathbb{R}$ sono completi, per il 9.7 anche lo spazio $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ammette una metrica che lo rende completo. Quindi Graph (f) è completo quale sottospazio chiuso di $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Per finire basta osservare che A è omeomorfo a Graph (f) (cf. 5.15). □

Daremo senza dimostrazione rigorosa il seguente teorema inverso del teorema di Alexandroff.

Teorema 9.30. *Se il sottospazio Y di uno spazio metrico X è omeomorfo ad uno spazio metrico completo allora Y è G_δ in X.*

La dimostrazione è basata sul seguente teorema di Lavrentiev (cf. [Kur, §35, II]): *se per due spazi metrici completi M_1 e M_2 esiste un omeomorfismo $f : A_1 \to A_2$ dove A_i è sottospazio di M_i $(i = 1, 2)$, allora f si estende ad un omeomorfismo $f : B_1 \to B_2$ dove B_i è un insieme G_δ di M_i $(i = 1, 2)$.* Adesso, se $f : Y \to Z$ è un omeomerfismo e Z è uno spazio completo, allora f si può estendere su un G_δ-insieme B di X. Poichè l'estensione deve rimanere biettiva e f era biettiva in partenza, questo implica che $A = B$, cioè, A è un G_δ-insieme di X.

Esercizio 9.31. *Dimostrare che uno spazio X è omeomorfo ad uno spazio metrico completo se e solo se X è G_δ in $\hat{X}$.*

Esercizio 9.32. *Dimostrare che lo spazio I dei numeri irrazionali è omeomorfo ad uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Segue dall'esercizio precedente. Una dimostrazione diretta si poò dare applicando l'omeomorfismo tra I e lo spazi metrico completo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (cf. Esercizio 5.18). □

10 Spazi metrici compatti

Definizione 10.1. Uno spazio metrico X si chiama *compatto* se ogni successione ha una sottosuccessione convergente (o equivalentemente, ogni successione ha un punto di accumulazione).

Teorema 10.2. (Bolzano-Weierstrass) *Ogni intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ è compatto.*

Questo teorema vale anche nello spazio $\mathbb{R}^n$:

Teorema 10.3. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato.*

Il seguente esempio mostra che questo teorema non rimane vero per spazi metrici completi. Vedremo nel seguito (Definizione 10.8) come deve essere rafforzata la proprietà "limitato per conservare la validità del teorema di Bolzano-Weierstrass per spazi metrici completi (cf. Corollario 10.17).

Esercizio 10.4. *Trovare un insieme chiuso e limitato di ℓ_2 che non sia compatto.*

Dimostrazione. Sia $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell_2$ la successione con 1 in posizione n e 0 in tutte le altre posizioni. Allora $A = \{e_n : n \in N\}$ è chiuso (poichè alcuna successione non banale in A converge) e limitato, ma non è compatto. □

Esercizio 10.5. *Provare che per m infinito il riccio $J(m)$ non è compatto.*

Un altro classico teorema dell'analisi matematica, quello di Heine-Borel, permette di caratterizzare la compattezza in $\mathbb{R}^n$ come segue: *sia K un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi aperti di K la cui unione copre K, allora esiste anche una sottofamiglia finita $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ che copre K.* Vedremo nel seguto, che la controparte del teorema di Heine-Borel rimane vera per tutti spazi metrici compatti (cf. Teorema 10.20).

10.1 Spazi precompatti

Qui vedremo che cosa bisogna aggiungere alla completezza per raggiungere la compattezza.

Lemma 10.6. *Dimostrare che:*

(i) *uno spazio compatto è sempre completo;*

(ii) *un sottospazio A di uno spazio compatto X è compatto se e solo se A è chiuso.*

Dimostrazione. Per (i) notare che una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente è anch'essa convergente. Per vedere che un sottospazio compatto é sempre chiuso applichiamo (i) Teorema 9.3. □

Esercizio 10.7. *Dare esempi di spazi completi che non sono compatti.*

Ci poniamo ora come obiettivo di individuare quale proprietà si potrebbe aggiungere alla completezza per avere la compattezza. Chiaramente bisogna rafforzare il concetto "limitato (vedi Es. 10.4). Lo faremo nel modo seguente, sfruttando il fatto che ogni disco è ovviamente un insieme limitato.

Definizione 10.8. Uno spazio metrico X si chiama *precompatto* se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono dei punti $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$.

Al posto del termine precompatto si usa (ed è chiaro perchè) anche il termine *totalmente limitato.* La definizione 10.8 si può dare anche così: per ogni $\varepsilon > 0$ il ricoprimento aperto $X = \bigcup_{x \in X} B_\varepsilon(x)$ ammette un sottoricoprimento finito. È importante notare che non si può sostituire il disco $B_\varepsilon(x)$ con un insieme aperto di diametro ε. Infatti, anche se $(0, 1]$ risulta precompatto per la definizione 10.8, è facile trovare un ricoprimento aperto $(0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_n$, dove O_n è un insieme aperto di diametro $\frac{1}{2}$, senza sottoricoprimenti finiti (per esempio $O_n = (a_n, b_n) \cup (c_n, d_n)$ con $d_n - a_n = \frac{1}{2}$ e $a_n \to 0$).

Esercizio 10.9. *Dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, considerato come spazio metrico con la metrica euclidea, è precompatto se e solo se è limitato.*

Lemma 10.10. *Dimostrare che un spazio metrico (X, d) non è precompatto se e solo se esiste un $\varepsilon > 0$ e una successione $\{x_n\}$ tale che $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per ogni $n \neq m$.*

Dimostrazione. Se per qualche $\varepsilon > 0$ e successione $\{x_n\}$ vale $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per ogni $n \neq m$ lo spazio X non può essere unione finita di dischi di raggio $\varepsilon/2$ poichè ogni disco di questo raggio può contenere non più di un punto solo della successione.

Viceversa, supponiamo che X non sia precompatto. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni scelta della successione $x_1, \dots, x_n, \dots$ nessuna delle unioni finite $\bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ copre X. Allora è possibile scegliere una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq \varepsilon > 0$ se $k \neq l$. La successione $\{x_{n_k}\}$ ha la proprietà desiderata. □

Teorema 10.11. *Ogni spazio compatto è precompatto.*

Dimostrazione. Supponiamo che X non sia precompatto. Allora per il Lemma 10.10 esiste un $\varepsilon > 0$ e una successione $x_1, \dots, x_n, \dots$ tale che $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per ogni $n \neq m$. Chiaramente la successione $\{x_n\}$ non ha sottosucessioni convergenti – assurdo. □

Corollario 10.12. *Sia X un sottospazio dello spazio metrico Y.*

1. *Se Y è precompatto, allora anche X è precompatto;*

2. *Se X è precompatto e denso in Y, allora anche Y è precompatto.*

Dimostrazione. La prima parte segue immediatemante dal Lemma 10.10.

2. Supponiamo che Y non sia precompatto. Allora per il Lemma 10.10 esistono $\varepsilon > 0$ e una successione $\{y_n\}$ in Y tale che $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon$ per ogni $n \neq m$. Per la densità di X in Y troviamo per ogni n un punto $x_n \in X$ con $d(x_n, y_n) < \varepsilon/4$. Ora per $m \neq n$ $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon/2$ – assurdo, perchè X è precompatto. □

Lemma 10.13. *Uno spazio metrico X è precompatto se e solo se ogni successione in X ammette una sottosuccessione di Cauchy.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia precompatto. Sia $S = \{x_n\}$ una successione. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare una sottosuccessione $S_\varepsilon = \{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ tale che $d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \varepsilon$. Procedendo per induzione, con $\varepsilon = \frac{1}{n}$, troviamo una successione di sottosuccessioni $S_n = \{x_{f_n(m)}\}$, tali che $S_0 = \{x_n\}$ e per $n > 0$ la successione S_n coincide con la successione S_ε già descritta con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ costruita per la successione S_{n-1}. Alla fine troviamo una sottosuccessione "diagonale $\{x_{f(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, tale che $x_{f(m)}, x_{f(m+1)}, \dots$ è sottosuccessione di S_m per ogni m. Non è difficile dimostrare che $\{x_{f(m)}\}$ è di Cauchy.

Se X non è precompatto, esistono $\varepsilon > 0$ e una successione $\{x_n\}$ in X tale che $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per ogni $n \neq m$. Chiaramente questa successione non ammette alcuna sottosuccessione di Cauchy. □

Corollario 10.14. *Una successione $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in uno spazio metrico X non ammette sottosucessione di Cauchy se e solo se per ogni sottosuccessione S' di S esiste un $\varepsilon > 0$ tale che S' ammette una sottosuccessione S'' per la quale $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per ogni coppia di elementi distinti x_n, x_m di S''.*

Teorema 10.15. *Dimostrare che uno spazio metrico X è compatto se e solo se è precompatto e completo.*

Dimostrazione. Se X è compatto, allora X è anche completo e precompatto per Lemma 10.6 e Teorema 10.11. Supponiamo adesso che X sia completo e precompatto. Sia $S = \{x_n\}$ una successione. Allora per il lemma precedente S ha una sottosuccessione di Cauchy e quindi convergente poichè X è completo. $\square$

Teorema 10.16. *Sia X uno spazio metrico e sia $\hat{X}$ il suo completamento. Allora $\hat{X}$ è compatto se e solo se X è precompatto.*

Dimostrazione. Se X è precompato, allora anche $\hat{X}$ è precompatto per il Corollario 10.12. Quindi $\hat{X}$ è e anche compatto per il Teorema 10.15. Se invece $\hat{X}$ è compatto, allora è senz'altro precompatto, e quindi X è precompatto per il Corollario 10.12. $\square$

Adesso possiamo annunciare la generalizzazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass per la quale abbiamo percorso questa strada (cf. Teorema 10.3):

Corollario 10.17. *Sia X uno spazio metrico completo. Un sottospazio A di X è compatto se e solo se A è chiuso e precompatto.*

10.2 I teoremi di Lebesgue e Heine-Borel

A questo punto ci prepariamo a dimostrare il teorema di Heine-Borel (vedi 10.20).

Teorema 10.18. (Lebesgue) *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $X = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni sottoinsieme E di X con diam $E \leq \delta$ esiste $i \in I$ con $E \subseteq U_i$.*

Dimostrazione. Supponiamo che tale δ non esista. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ esiste un sottoinsieme E_n di X con diam $E_n \leq \frac{1}{n}$ che non è contenuto in nessun U_i. Notiamo che $E_n \neq \emptyset$, quindi esiste $x_n \in E_n$. Ovviamente $E_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x_n)$. Poichè X è compatto esiste una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \to x$ di $\{x_n\}$. Sia $x \in U_i$. Poiché U_i è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_{2\varepsilon}(x) \subseteq U_i$. Scegliamo ora k_0 con $n_{k_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ e anche tale che $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ se $k \geq k_0$. Per la nostra scelta avremo $E_{n_k} \subseteq B_\varepsilon(x_{n_k}) \subseteq B_{2\varepsilon}(x) \subseteq U_i$ – assurdo. $\square$

Definizione 10.19. Sia X uno spazio metrico, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. $\mathcal{U}$ si dice *ricoprimento uniforme* se esiste un numero positivo δ con la proprietà che per ogni sottoinsieme E di X con $diam E \leq \delta$, esiste $i \in I$ con $E \subseteq U_i$. Il numero δ si chiama *numero di Lebesgue per il ricoprimento*.

Uno spazio metrico X si chiama *spazio di Lebesgue* se ogni ricoprimento aperto di X è uniforme (ossia ammette un numero di Lebesgue).

Abbiamo così dimostrato nel teorema di Lebesgue che ogni spazio metrico compatto è uno spazio di Lebesgue. Diamo due applicazioni di questo teorema.

Teorema 10.20. *Uno spazio metrico X è compatto se e solo se per ogni famiglia di insiemi aperti $\{U_i\}_{i \in I}$ la cui unione è X esiste anche una sottofamiglia finita $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ che copre X.*

Dimostrazione. Sufficienza. Sia $S = \{x_n\}$ una successione senza punti di accumulazione. Allora per ogni $y \in X$ esiste un intorno aperto U_y che contiene al più un punto della successione S. Ora il ricoprimento aperto $X = \bigcup_{y \in X} U_y$ ammette un sottoricoprimento finito $X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Poichè ogni membro di questa unione può contenere solo un numero finito di elementi di S arriviamo ad un assurdo.

Necessità. Supponiamo che X è compatto e sia $X = \bigcup_{i \in X} U_i$ un ricoprimento aperto di X. Per il Teorema di Lebesgue esiste un numero di Lebesgue $\delta > 0$ per questo ricoprimento. Per il Teorema 10.11 esistono un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n$ tali che $X = \bigcup_{k=1}^n B_\delta(x_k)$. Se $B_\delta(x_k) \subseteq U_{i_k}$, avremo ovviamente $X = \bigcup_{k=1}^n U_k$. $\square$

Adesso, passando ai complementi, si dimostra agevolmente il teorema di Cantor nel caso di spazi compatti. Si noti come la condizione $\lim_n$ diam $A_n = 0$ diventa irrilevante in questo caso.

Esercizio 10.21. *Sia X uno spazio metrico compatto e siano $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ insiemi chiusi di X. Allora $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.*

10.3 Misurare la compattezza tramite la continuità uniforme: Spazi di Atsuji

Teorema 10.22. (Heine-Cantor) *Sia X uno spazio metrico compatto. Allora ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è anche uniformemente continua.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per la continuità della funzione $f : X \to \mathbb{R}$ esiste per ogni $x \in X$ un $\delta_x > 0$ tale che per ogni $y \in B_{\delta_x}(x)$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. In altre parole, il diametro dell'insieme $f(B_{\delta_x}(x))$ è al più ε. Ora il ricoprimento aperto $X = \bigcup_{x \in X} B_{\delta_x}(x)$ ammette un numero di Lebesgue $\delta > 0$ secondo il Teorema 10.18. Se $d(y, z) < \delta$ allora l'insieme $\{y, z\}$ cade in uno dei dischi $B_{\delta_x}(x)$ e quindi si ha $|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$. □

Questo teorema si inverte parzialmente come vedremo nel seguito. Notiamo intanto che la dimostrazione fa vedere che se X è uno spazio di Lebesgue, e (Y, d') uno spazio metrico arbitrario, allora ogni funzione continua $f : X \to Y$ è uniformemente continua.

Il teorema di Heine-Cantor suggerisce che possiamo ottenere una classe di spazi in cui le funzioni continue coincidono con quelle uniformemente continue, generalizzando la nozione di spazio metrico compatto.

Definizione 10.23. Uno spazio metrico X si dice *spazio di Atsuji* (oppure *spazio UC*) se ogni funzione continua $X \to \mathbb{R}$ è sempre uniformemente continua.

La dimostrazione del teorema di Heine-Cantor fa vedere che gli spazi di Lebesgue sono spazi di Atsuji.

Il teorema seguente riassume le proprietà caratteristiche degli spazi di Atsuji:

Teorema 10.24. *Per uno spazio metrico X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *per ogni spazio metrico Y ogni funzione continua $X \to Y$ é anche uniformemente continua;*
2. *X è uno spazio di Atsuji;*
3. *ogni funzione continua $X \to [0, 1]$ è uniformemente continua;*
4. *insiemi chiusi e disgiunti di X hanno distanza positiva;*
5. *ogni C-successione $\{z_n\}$ in X con $z_{2n} \neq z_{2n+1}$ per infiniti indici n ha un punto di aderenza.*

Dimostrazione. Le implicazioni $1 \to 2 \to 3$ sono banali.

3. $\to$ 4. Siano A e B due insiemi chiusi disgiunti con $d(A, B) = 0$. Per il Lemma di Urysohn 6.29 la funzione $f : A \cup B \to [0, 1]$ definita con $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$ si estende ad una funzione continua $\overline{f} : X \to [0, 1]$. Poichè $d(A, B) = 0$ esistono due successioni $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tali che $d(a_n, b_n) \to 0$. D'altra parte, la distanza tra gli immagini $f(a_n)$ e $f(b_n)$ è 1, quindi la funzione continua $\overline{f}$ non può essere uniformemente continua.

4. $\to$ 5. Sia $\{z_n\}$ una C-successione in X, che non ha punti di aderenza. Poichè infiniti indici n soddisfano $z_{2n} \neq z_{2n+1}$, possiamo (passando a sottosuccessioni) suporre che $z_{2n} \neq z_{2n+1}$ per ogni n. Nessuna delle due successioni $\{z_{2n}\}$ e $\{z_{2n+1}\}$ può avere delle sottosuccessioni di Cauchy, perchè ogni successione di Cauchy senza punti di aderenza si può spezzare in una coppia di insiemi chiusi e disgiunti a distanza 0 e questo contraddice l'ipotesi 4. Qunidi esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per tutti $n \neq m$ si ha $d(z_{2n}, z_{2m}) \geq \varepsilon$ e $d(z_{2n+1}, z_{2m+1}) \geq \varepsilon$. Poichè $d(z_{2n}, z_{2n+1}) \to 0$ esiste n_0 tale che per $n > n_0$ si ha $d(z_{2n}, z_{2n+1}) < \varepsilon$. Ora per $n, m > n_0$ non può accadere $z_{2n} = z_{2m+1}$ con $n \neq m$. Quindi gli insiemi $A' = \{z_{2n} : n > n_0\}$ e $B' = \{z_{2n+1} : n > n_0\}$ sono chiusi e disgiunti. D'altra parte, $d(A, B) = 0$ poichè $d(z_{2n}, z_{2n+1}) \to 0$.

5. $\to$ 1. Sia $X \to Y$ una funzione continua, dove Y é uno spazio metrico. Per verificare che f é uniformemente continua consideriamo una C-successione $\{z_n\}$ in X. Supponiamo che $f(z_n)$ non é una C-successione. Quindi esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni m esiste $n > m$ con $d(f(z_{2n}), f(z_{2n+1})) > \varepsilon$. Passando a sottosuccessione possiamo supporre che vale

$$d(f(z_{2n}), f(z_{2n+1})) > \varepsilon \text{ per tutti } n. \tag{$*$}$$

Allora non é possibile avere $z_{2n} = z_{2n+1}$ per tutti meno un numero finito di n, perché allora anche la successione $\{f(z_n)\}$ in Y avrebbe la stessa proprietà, contrariamente a (*). Quidni $z_{2n} \neq z_{2n+1}$ per infiniti indici n. Allora per ipotesi $\{z_n\}$ ha un punto di aderenza z. Quindi esiste una sottosuccesione convergente $z_{n_k} \to z$. Inoltre, se la parte degli indici pari in n_k é infinita (diciamo n_{k_s}), allora $d((z_{2n} \neq z_{2n+1}) \to 0$ implica che anche $z_{n_{k_s}+1} \to z$. Ma allora $d(f(z_{n_{k_s}}), f(z_{n_{k_s}+1})) \to 0$, contrariamente a (*). Si ragiona analogamente, se la parte degli indici dispari in n_k é infinita. □

Diamo adesso alcune applicazioni di questo teorema.

Corollario 10.25. *Se X è di Atsuji e Y è un sottoinsieme chiuso di X, allora anche Y è di Atsuji.*

Dimostrazione. La proprietà 4 nel teorema precedente si conserva per il passaggio ai sottospazi chiusi. □

Teorema 10.26. (Atsuji) *Sia X uno spazio metrico di Atsuji. Allora X è completo. Se X non ha punti isolati, allora X è anche compatto.*

Dimostrazione. Sia x_n una successione di Cauchy senza limite tale che $x_n \neq x_m$ per $n \neq m$. Allora gli'insiemi $S' = \{x_{2n}\}$ e $S'' = \{x_{2n+1}\}$ sarebbero chiusi e disgiunti a distanza 0. Questo contradice il punto 4 del teorema precedente. Quindi, lo spazio metrico X è completo. Supponiamo adesso che X non sia compatto e non abbia punti isolati. Allora esiste una successione infinita x_n senza punti di accumulazione. Poichè tutti punti x_n sono non isolati, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si trova un punto $y_n \in B_{2^{-n}\varepsilon}(x_n)$. Allora $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ danno luogo ad una C-successione senza punti di accumulazione. Questo contradice il punto 5 del teorema precedente. □

Visto che ogni funzione continua $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ è (ovviamente) uniformemente continua quando $\mathbb{Z}$ è dotato dalla metrica indotta da $\mathbb{R}$, non possiamo aspettare di dimostrare che uno spazio con la proprietà del teorema di Atsuji avente punti isolati debba essere compatto. Tuttavia, si può dimostrare che – grosso modo – accade uno dei due casi. Ecco la forma precisa del teorema di Atsuji:

Teorema 10.27. *Sia (X, d) spazio metrico. Allora X è di Atsuji se e solo se l'insieme X' dei punti non isolati di X è compatto e $\forall \varepsilon > 0$ il sottospazio metrico $D_\varepsilon = \{x \in X : d(x, X') \geq \varepsilon\}$ di X è uniformemente discreto.*

Dimostrazione. Supponiamo che X abbia la proprietà descritta nell'ipotesi. Per il teorema precedente, per vedere che X è spazio di Atsuji basta vedere che ogni C-successione $(\{x_n\}, \{y_n\})$ di infiniti punti distinti di X ha punti di accumulazione. Supponiamo ad assurdo che $F = \{x_n\} \cup \{y_n\}$ non abbia punti di accumulazione ed è quindi chiuso. Se $z \in X'$, allora z non è punto di accumulazione per F e quindi $z \notin F$. Quindi X' non interseca il chiuso F. Essendo X' compatto contenuto nell'aperto $\mathcal{O} = X \setminus F$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $X' \subseteq B_\varepsilon(X') \subseteq \mathcal{O}$, dove $B_\varepsilon(X') := \{x \in X : d(x, X') < \varepsilon\}$. Poichè $F \subseteq X \backslash \mathcal{O} \subseteq D_\epsilon$ segue che F è uniformemente discreto. Pertanto, $d(x_n, y_n) \geq \delta > 0$ per tutti n e quindi $(\{x_n\}, \{y_n\})$ non è una C-successione. Questo contraddice l'ipotesi.

Ora supponiamo che X sia di Atsuji. Per verificare la compattezza di X' notiamo prima che lo spazio metrico X è completo per il Teorema 10.24 e allora anche X' risulta completo in quanto sottospazio chiuso di X. Quindi basta verificare che X sia precompatto. Per assurdo, supponiamo X' non precompatto : sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di X' che per un certo $\epsilon > 0$ soddisfa $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ (Lemma 10.10). Nell'intorno $V_n = B_{\varepsilon/4}(x_n)$ di x_n troviamo un punto $y_n \in X$. Ora la successione $(\{x_n\}, \{y_n\})$ è una C-successione senza punti di accumulazione – assurdo per il Teorema 10.24.

Se per qualche ε l'insieme D_ε non è uniformemente discreto, allora $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n, y_n \in D_\varepsilon$, tali che $d(x_n, y_n) < 1/n$. Quindi (x_n, y_n) è una C-successione senza punti di accumulazione (gli eventiali punti di accumulazione sono in X', cioè a distanza $\geq \varepsilon$) – assurdo per il Teorema precedente. □

Adesso dimostriamo che gli spazi di Atsuji e gli spazi di Lebesgue coincidono. Per il commento dopo il teorema di Heine-Cantor, basta dimostrare il segunte

Corollario 10.28. *Se X è uno spazio di Atsuji, allora X è uno spazio di Lebesgue.*

Dimostrazione. X è unione di X' -che è compatto - e di un insieme I uniformemente discreto; allora ogni ricoprimento di X' è uniforme. Inoltre, per definizione di spazio uniformemente discreto, esiste δ tale che I si può ricoprire con i dischi di raggio δ e centro x, per ogni $x \in I$. L'unione dei due ricoprimenti di X' e di I è un ricoprimento uniforme di X. □

10.4 L'insieme di Cantor e la curva di Peano

Per ogni $n > 0$ naturale si consideri il sottoinsieme $U_n = \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} (\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n})$ dell'intervallo $[0, 1]$. Essendo unione di 3^{n-1} intervalli aperti, U_n è aperto. Di conseguenza, anche l'insieme $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ è aperto. Allora il complemento $C = [0, 1] \setminus U$, noto come *insieme di Cantor* , è chiuso, e di conseguenza compatto. Poichè la somma delle lunghezze degli intervalli nell'insieme $\bigcup_{k=1}^n U_k$ è $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n}$ e questa somma converge a 1, l'insieme C ha misura 0. Tuttavia, la cardinalità di C è uguale alla cardinalità del continuo:

Esercizio 10.29. *Dimostrare che C è omeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Dimostrazione. Notare che ogni $x \in C$ si presenta in modo unico come somma (eventualmente infinita)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, \tag{3}$$

dove $c_n = 0$ o 2. □

Esercizio 10.30. *Dimostrare che esiste una funzione continua e suriettiva $C \to [0, 1]$.*

Dimostrazione. Per $x \in C$ della forma (3) definire $f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{2^{n+1}}$. □

Esercizio 10.31. *Dimostrare che la funzione $f : C \to [0, 1]$ dell'esercizio precedente si estende ad una funzione continua $h : [0, 1] \to [0, 1]$.*

Dimostrazione. Per $z \in C$ poniamo $h(z) = f(z)$. Se $z \notin C$ allora esistono $x, x' \in C$ tali che $x < z < x'$ e l'intervallo (x, x') non interseca C. Allora per qualche $1 \leq i < \infty$ abbiamo $0 = c_i < c'_i = 2$ mentre tutti coefficienti precedenti $c_k = c'_k$ (se $i > 1$) coincidono, e per $l > i$, $0 = c'_l < c_l = 2$. Allora $f(x) = f(x')$ ed estendiamo f ponendo $h(z) = f(x) = f(x')$. □

La funzione $h : [0,1] \to [0,1]$ appena costruita è nota come *funzione di Cantor*, essa è continua e crescente ed è costante su ogni intervallo dei 2^n intervalli che compongono la differenza $U_{n+1} \setminus U_n$[3].

Teorema 10.32. (Teorema generalizzato di Peano) *Per ogni $n \leq \omega$ esiste un applicazione continua e suriettiva* $[0,1] \to [0,1]^n$.

Dimostrazione. Sia $n \leq \omega$. Allora per 10.29 abbiamo un applicazione continua e suriettiva $C \to C^n$ poichè ovviamente $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo alla sua potenza $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^n$. Poi, il 10.30 ci permette di costruire un applicazione continua e suriettiva $C^n \to [0,1]^n$, e quindi componendo otteniamo un applicazione continua e suriettiva $g : C \to [0,1]^n$. Alla fine, possiamo estendere g su tutto l'intervallo $[0,1]$ per "linearità essendo il cubo $[0,1]^n$ un insieme convesso nello spazio lineare $\mathbb{R}^n$. □

11 Spazi topologici compatti

La compattezza per spazi topologici si definisce come nel §10:

Definizione 11.1. Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

Si dice che una famiglia di insiemi $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ha *la proprietà dell'intersezione finita* se tutte le intersezioni finite $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n}$ di elementi di questa famiglia sono non vuote.

Esercizio 11.2. *Dimostrare che uno spazio topologico è compatto se e solo se per ogni famiglia di insiemi chiusi $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ con la proprietà dell'intersezione finita anche l'intersezione $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ di tutta la famiglia è non vuota.*

Suggerimento. Si dimostra passando ai complementi aperti. ♣

Avremo spesso bisogno della seguente proprietà dei spazi topologici compatti.

Esercizio 11.3. *Sia X uno spazio compatto, sia U un insieme aperto di X e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita. Se $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq U$, allora esistono $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che anche $\bigcap_{k=1}^n F_k \subseteq U$.*

Suggerimento. Applicare l'Es. 11.2 ragionando ad assurdo. ♣

Teorema 11.4. *Dimostrare che per uno spazio topologico X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *X è compatto;*
2. *ogni filtro di X ha un punto di accumulazione;*
3. *ogni rete ha un punto di accumulazione;*
4. *ogni ultrafiltro di X è convergente.*

Dimostrazione. L'equivalenza di 1. e 2. segue dall'esercizio precedente. Si può ragionare anche direttamente notando che ogni filtro $\mathcal{F}$ su X con $ad\mathcal{F} = \emptyset$ definisce un ricoprimento aperto di X: quello costituito dai complementi delle chiusure degli $F \in \mathcal{F}$); tale ricoprimento non ha sottoricoprimenti finiti. □

Esercizio 11.5. *Sia X uno spazio topologico compatto e sia $f : X \to Y$ un' applicazione continua suriettiva. Allora anche lo spazio Y è compatto.*

Esercizio 11.6. *Dimostrare che sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

Suggerimento. Ragionare come nella dimostrazione della Proposizione 4.13. ♣

Teorema 11.7. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Dimostrare che un sottospazio compatto di X deve essere chiuso.*

Dimostrazione. Sia K un sottospazio compatto di X. Se $x \in \overline{K}$ in X, allora il filtro aperto $\mathcal{V}(x)$ genera il filtro aperto $\mathcal{F} = \{X \cap V : V \in \mathcal{V}(x)\}$ in X. Sia $z \in K$ un punto di accumulazione $\mathcal{F}$. Per il Lemma 6.6 $z = x$, quindi $x \in K$. Questo prova che K é chiuso in X. □

Teorema 11.8. *Sia X uno spazio compatto e sia $f : X \to Y$ un' applicazione continua e biettiva su uno spazio di Hausdorff Y. Dimostrare che f è chiusa e quindi è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Applicare Teorema 11.6 e l'esercizio precedendte. □

[3] ed è quindi quasi ovunque derivabile.

11.1 Compattezza e assiomi di separazione

La compattezza “migliora le proprietà di separazione dello spazio nel senso seguente:

Lemma 11.9. *Ogni spazio compatto e T_2 è regolare.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto e T_2, $x \in X$ e sia F un chiuso in X con $x \notin F$. Allora per ogni $y \in F$ abbiamo $x \neq y$ e quindi esistono intorni aperti disgiunti U_y e V_y di x e y rispettivamente. Poiché F è compatto per l' esercizio 11.6, esistono $y_1, \ldots, y_n \in F$ tali che l'insieme aperto $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ contiene Y. Allora $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ è un intorno aperto di x tale che $U \cap V = \emptyset$. □

Lemma 11.10. *Ogni spazio compatto e T_2 è normale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto e T_2 e siano $F, G \subseteq X$ due chiusi disgiunti. Applicando l' esercizio precedente possiamo assumere che X sia regolare, quindi per ogni $x \in G$ si possono trovare intorni disgiunti di G e x. si conclude come nella dimostrazione precedente. □

Uno spazio X è *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U del punto x tale che $\overline{U}$ è compatto.

Lemma 11.11. *Ogni spazio localmente compatto e T_2 è completamente regolare.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e si scelga un intorno aperto U di x tale che $\overline{U}$ è compatto. Allora $\overline{U}$ è completamente regolare. Se F è un chiuso in X con $x \in X$, allora esiste un intorno aperto V di x tale che $\overline{V} \subseteq U$ e $V \cap F = \emptyset$. Poiché $\overline{U}$ è regolare possiamo trovare una funzione continua $f : \overline{U} \to [0, 1]$ con $f(\overline{U} \setminus V) = 0$ e $f(x) = 1$. Adesso estendiamo f a tutto lo spazio X ponendo $f(z) = 0$ per ogni $z \in X \setminus \overline{U}$. La funzione f resta continua e ovviamente $f(F) = 0$. □

11.2 Prodotti di spazi topologici compatti

Teorema 11.12. (Teorema di Kuratowski della proiezione chiusa) *Sia Y uno spazio topologico compatto e sia X uno spazio arbitrario. Allora la proiezione $p : X \times Y \to X$ è un' applicazione chiusa.*

Dimostrazione. Sia F un insieme chiuso di $X \times Y$ dimostriamo che $p(F)$ è chiuso in X. Supponiamo che $x \in X$ e $x \notin p(F)$. Allora $\{x\} \times Y$ non interseca F, quindi il complemento U di F in $X \times Y$ è un aperto che contiene $\{x\} \times Y$. Per $y \in Y$ siano U_y un intorno aperto di x e V_y un interno aperto di y tali che $U_y \times V_y \subseteq U$. Per la compattezza di Y esistono $y_1, \ldots, y_n$ tali che $Y = \bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$. Ora con $U = \bigcap_{k=1}^n U_{y_k}$ si ha $U \times Y \subseteq U$, cioè $U \times Y \cap F = \emptyset$. Ma allora $U \cap p(F) = \emptyset$. Quindi $x \notin \overline{p(F)}$. □

Vediamo adesso che il teorema di Kuratowski della proiezione chiusa si può invertire:

Teorema 11.13. (Teorema di Mrowka)*teorema!di Mrowka Sia Y uno spazio topologico tale che la proiezione $p : X \times Y \to X$ sia un' applicazione chiusa per ogni uno spazio topologico X. Allora Y è compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che Y non sia compatto. Allora per il Teorema 11.4 esiste un filtro $\mathcal{F}$ in Y senza punti di accumulazione. Sia X lo spazio ottenuto agiungendo all'insieme Y (considerato con la topologia discreta) un punto ∞ relativo al filtro $\mathcal{F}$. Se Y è T_1, allora la diagonale $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ è un sottoinsieme chiuso nel prodotto $X \times Y$, ma la sua proiezione $Y = p(\Delta)$ non è chiusa in X. Infatti, $\infty \in \overline{Y}$ e $\infty \notin Y$. Quindi la proiezione p non è chiusa, assurdo. Se Y non è T_1, allora la diagonale Δ non è chiusa e bisogna ragionare con il sottoinsieme $F = \{(y, \overline{\{y\}}) : y \in Y\}$ del prodotto $X \times Y$, per il quale si riesce vedere che sia chiuso. Infatti, se $(x, y) \in X \times Y$ e $(x, y) \notin F$, allora $y \notin \overline{\{x\}}$. Quindi, esiste un intorno aperto U di y in Y con $x \notin U$. Quindi, $U \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$. Pertanto, l'intorno $\{x\} \times U$ di (x, y) non interseca F e quindi $(x, y) \notin \overline{F}$. Se invece il punto in considerazione è $(\infty, y) \in X \times Y$, scegliano un intorno aperto U di y e $F \in \mathcal{F}$ con $U \cap F = \emptyset$ (tali U e F esistono poiché y non può essere un punto di accumulazione di $\mathcal{F}$). Adesso con $W = \{infty\} \cup F$, $W \times U$ è un intorno aperto di (∞, y) che non interseca F (poichè si ha $U \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ per ogni $x \in F$, per la scelta di U e F). Questo dimostra che F è chiuso in $X \times Y$. Come prima, la sua proiezione $Y = p(\Delta)$ non è chiusa in X. □

Lemma 11.14. *Sia Y uno spazio topologico compatto e X uno spazio arbitrario. Allora per ogni ricoprimento aperto $\bigcup_\alpha W_\alpha$ dello spazio $X \times Y$ e per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $U \times Y$ sia ricoperto da un numero finito di W_α.*

Dimostrazione. Per $y \in Y$ esistono α_y e U_y e V_y intorni di x e y rispettivamente tali che $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W_{\alpha_y}$. Poiché $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$, per la compattezza di Y esistono $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tali che $Y = \bigcup_{s=1}^m V_{y_s}$; con $U = \bigcap_{s=1}^m U_{y_s}$, si ha:

$$U \times Y \subseteq \bigcup_{s=1}^m W_i. \quad \clubsuit$$

Teorema 11.15. *Siano X e Y due spazi topologici compatti. Allora anche lo spazio $X \times Y$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $X \times Y = \bigcup_\alpha W_\alpha$ un ricoprimento aperto. Per l' esercizio 11.14 per ogni $x \in X$ esiste un aperto U_x in X che contiene x e $\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,n_x}$, tali che valga $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_x} W_{\alpha_{x,k}}$. Per la compattezza di X esistono $x_1, \ldots, x_m \in X$ tali che $X = \bigcup_{s=1}^m U_{x_s}$. Allora $X \times Y = \bigcup_{s=1}^m (U_{x_s} \times Y) \subseteq \bigcup_{s=1}^m \bigcup_{k=1}^{n_{x_k}} W_{\alpha_{x_s,k}}$. □

Ovviamente, il teorema precedente vale anche per prodotti finiti di spazi compatti. Il teorema rimane vero anche nel caso di prodotti infiniti, ma adesso la dimostrazione è basata sull'assioma della scelta (ed è in effetti equivalente ad esso). Questo è uno dei teoremi più importanti della topologia.

Teorema 11.16. (Tichonov) *Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici. Allora anche lo spazio prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto se e solo se ciascuno degli X_i è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X. Allora per ogni $i \in I$ la proiezione $p_i(\mathcal{U})$ genera un ultrafiltro in X_i. Per la compattezza di X_i esiste un punto $x_i \in X_i$ tale che $p_i(\mathcal{U}) \to x_i$. Ora $\mathcal{U} \to x = (x_i)$. Infatti, poichè $\mathcal{U}$ è un filtro basta vedere che ogni intorno U di x della prebase della topologia di Tichonov appartiene a $\mathcal{U}$. Sia $i \in I$ tale che $U = p_i^{-1}(V)$ per un intorno aperto V di x_i in X_i. Allora $V \in p_i(\mathcal{U})$ e quindi esiste $F \in \mathcal{U}$ con $p_i(F) \subseteq V$, allora $F \subseteq U$ e pertanto $U \in \mathcal{U}$. □

Come conseguenza del teorema di Tichonov, saremo in grado di determinare quali sono i sottospazi degli spazi compatti di Hausdorff caratterizzando gli spazi topologici che ammettono un omeomorfismo con un sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff. Ovviamente, per prima cosa occorre trovare qualche proprietà necessaria per tali spazi. Siccome gli spazi compatti di Hausdorff sono anche normali (11.10), ci si potrebbe chiedere se questi spazi non sono normali, ma abbiamo già visto che la normalità non è ereditaria. La proprietà di essere Tichonov è invece ereditaria (cf. 6.2), quindi i nostri spazi devono necessariamente essere spazi di Tichonov. Quello che è sorprendente e bello è che questa semplice proprietà basta:

Teorema 11.17. *Ogni spazio di Tichonov è sottospazio denso di qualche spazio compatto di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Tichonov. Applicando il Teorema di Tichonov 6.25 troviamo un'immersione di X in un cubo di Tichonov $[0,1]^\alpha$. Per il teorema di Tichonov del prodotto, il cubo $[0,1]^\alpha$ écompatto. Quindi, anche la chiusura K di X nel cubo é compatta per l'Es. 11.6. □

11.3 Compattificazioni

Un intero ramo della topologia studia *le compattificazioni* degli spazi di Tichonov, ossia le estensioni compatte di Hausdorff Y di uno dato spazio di Hausdorff X tali che X sia denso in Y. Per il Teorema 6.9 vale $|Y| \leq 2^{2^{|X|}}$ per ogni compattificazione Y di X. Quindi, a meno di omeomorfismo, le compattificazioni di X formano un insieme $\mathcal{C}(X)$.

Tra le compattificazioni $\iota : X \to K$ e $\iota' : X \to K'$ di X si introduce la relazione $\iota \leq \iota'$ se esiste un' applicazione continua $g : K' \to K$ tale che $\iota = g \circ \iota'$. Chiaramente $\iota \leq \iota'$ e $\iota' \leq \iota$ assieme danno luogo ad un omeomorfismo $K \to K'$ che commuta con ι e ι'. (Infatti, se $f : K \to K'$ é l'applicazione data da $\iota' \leq \iota$, si hanno due applicazioni $g \circ f : K \to K$ e $id_K : K \to K$, che coincidono sul sottospazio denso X, e quindi coincidono su K per 'Es. 6.8. Analogamente, $f \circ g = id_{K'}$. Quindi f e g sono omeomorfismi.) In tal caso le due compattificazioni si considerano equivalenti. A meno di questa identificazione, l'insieme $\mathcal{C}(X)$ delle compattificazioni di X diventa un insieme parzialmente ordinato. (Per vedere che a meno di identificazione si ha un insieme, basta notare che ogni compattificazione di X non può avere più di $2^{2^{|X|}}$ punti, quindi tutti gli spazi compatti con sottospazio denso di cardinalità $|X|$ sono al più $2^{2^{2^{2^{|X|}}}}$.)

Lemma 11.18. *Ogni insieme $C \subseteq \mathcal{C}(X)$ ammette un estremo superiore.*

Dimostrazione. Sia $\iota_c : X \to K_c$ il rispettivo membro di C. Allora l'applicazione diagonale $f : X \to \prod_{c \in C} K_c$ definisce una compattificazione $\iota : X \to \overline{f(X)}$ di X con $\iota \geq \iota_c$, più precisamente, ι é l'estremo superiore di C. □

Prendendo come C *tutto* l'insieme $\mathcal{C}(X)$ si ottiene una compattificazione di X detta *compattificazione di Stone-Čech* e denotata di solito con βX. La compattificazione $X \to \beta X$ è l'elemento massimo tra tutte le compattificazioni di X (vedi anche 15.5).

Teorema 11.19. *Sia X uno spazio di Tichonov e sia $f : X \to K$ una funzione continua con K compatto. Allora esite unica estensione $\tilde{f} : \beta X \to K$ di f.*

Dimostrazione. L'unicità di $\tilde{f}$ segue dal'Es. 6.8. Per trovare almeno un'estensione $\tilde{f}$ ragioniamo così. L'applicazione diagonale $X \to \beta X \times K$ definisce una compattificazione $c : X \to c(X)$ di X più grande di βX. Per le proprietà estremale di βX esiste un'applicazione $g : \beta X \to c(C)$ che commuta con c e $X \to \beta X$. Componendo con la proiezione $p : \beta X \times K \to K$ troviamo l'applicazione $\beta X \to K$ che estende f. □

11.3.1 La compattificazione di Alexandroff

Per spazi localmente compatti c'è un modo assai facile per costruire una compattificazione. Infatti, per uno spazio X localmente compatto e T_2, consideriamo la spazio αX ottenuto aggiungendo a X un punto ∞, ponendo X aperto in $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ e prendendo come intorni basici di ∞ gli insiemi $U \cup \{\infty\}$, dove U è un sottoinsieme aperto di X con complemento $X \setminus U$ compatto. È facile vedere che αX è un' estensione compatta di X. Poiché X è localmente compatto, la topologia di αX è di Hausdorff. La compattificazione αX è nota come *compattificazione di Alexandroff.* Ora vediamo che la compattezza locale è necessaria per la costruzione di compattificazioni "economiche come αX.

Esercizio 11.20. *Dimostrare che uno spazio di Tichonov X ammette una compattificazione Y tale che il complemento $Y \setminus X$ è finito se e solo se X è localmente compatto.*

Per l'ordine parziale $\leq$ in $\mathcal{C}(X)$ introdotto sopra, la compattificazione di Alexandroff αX (se esiste!) è il minimo.

Teorema 11.21. *Dimostrare che per uno spazio di Tichonov X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *X è compatto;*
2. *X non ammette estensioni T_2;*
3. *ogni filtro aperto di X ha punti di accumulazione.*

Dimostrazione. 2 e 3 sono equivalenti grazie all' eser. 8.2 e 1 implica 2 per il Teorema 11.4. L'implicazione 2 → 1 segue dal teorema di esistenza di compattificazioni degli spazi di Tichonov. □

11.3.2 La compattificazione di Čech-Stone di $\mathbb{N}$

Ora costruiamo la compattificazione $\beta\mathbb{N}$. A questo scopo consideriamo l'insieme X di tutti gli ultrafiltri di $\mathbb{N}$ identificando $\mathbb{N}$ con il sottoinsieme dei soui ultrafiltri fissi. Per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$ senza punti fissi e per ogni $U \in \mathcal{U}$ definiamo $W_U = \{p \in X : U \in p\}$. Ovviamente $W_U \cap \mathbb{N} = U$. D'altra parte, $W_U \cap W_V = W_{U \cap V}$, in particolare W_U e W_V sono disgiunti se U e V sono disgiunti. Pertanto, la topologia su X che ha tutti i punti di $\mathbb{N}$ isolati e per $p \in X \setminus \mathbb{N}$ ha come filtro di intorni di p quello generato da $\{W_U\}_{U \in p}$ è una topologia di Tichonov per la quale ogni W_U è sia aperto che chiuso e $W_U = \overline{U}$. Inoltre, ogni filtro aperto $\mathbf{F}$ su X ha un punto di accumulazione in X. Infatti, poiché $\mathbf{F}$ é aperto, ogni $F \in \mathbf{F}$ ha interno non-vuoto e per la densità di $\mathbb{N}$ in X si ha $F \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. La famiglia $\mathcal{F} = \{F \cap \mathbb{N} : F \in \mathbf{F}\}$ è un filtro su $\mathbb{N}$. Se p è un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ che contiene $\mathcal{F}$, allora p è un punto di accumulazione di $\mathbf{F}$ in X, poiché per ogni $F \in \mathbf{F}$ e per ogni intorno basico W_U di p si ha $W_U \cap F \neq \emptyset$ in quanto l'intersezione di questo insieme con $\mathbb{N}$ coincide con $U \cap (F \cap \mathbb{N}) \neq \emptyset$ (essendo $F \cap \mathbb{N} \in \mathcal{F}$). Abbiamo così dimostrato che $ad\mathbf{F} \neq \emptyset$ per ogni filtro aperto di X e possiamo quindi applicare il teorema precedente per affermare che X è compatto. Notiamo infine che per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$ visto come un punto $p = \mathcal{U} \in X$ si ha $\mathcal{U} \to p$ nella spazio topologico X. Infatti, basta notare che $W_U \cap \mathbb{N} = U$. Per la definizione della compattificazione $\beta\mathbb{N}$ esiste un' applicazione continua $f : \beta\mathbb{N} \to X$ tale che $f(n) = n$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro di $\mathbb{N}$. Allora $\mathcal{U}$ converge verso un unico punto x di $\beta\mathbb{N}$. D'altra parte, $\mathcal{U}$ converge verso $p = \mathcal{U} \in X$. Quindi, per la continuità della funzione f si ha $f(x) = \mathcal{U}$. In particolare, f è iniettiva (se $x \neq y$ in $\beta\mathbb{N}$ allora esistono ultrafiltri $\mathcal{U}_x$ e $\mathcal{U}_y$ in $\mathbb{N}$ contenenti rispettivamente i filtri $\{F \cap \mathbb{N} : F \in \mathcal{V}(x)\}$ e $\{F \cap \mathbb{N} : F \in \mathcal{V}(y)\}$; poiché x e y hanno almeno una coppia di intorni disgiunti, questi filtri sono distinti, pertanto i loro limiti $f(x)$ e $f(y)$ in X sono distinti). D' altra parte, f è anche suriettiva, perché $f(\beta\mathbb{N}) \supseteq \mathbb{N} = f(\mathbb{N})$ è densa in X e chiusa come immagine del compatto $\beta\mathbb{N}$. Questo implica che f è omeomorfismo.

Come applicazione di questo fatto, vedremo adesso che ci sono $2^{\mathbf{c}}$ ultrafiltri in $\mathbb{N}$. Basta vedere che $|\beta\mathbb{N}| \geq 2^{\mathbf{c}}$. Per la proprietà universale di $\beta\mathbb{N}$ (cf. Theorem 11.19) sappiamo che ogni spazio compatto separabile X ammette una suriezione continua $\beta\mathbb{N} \to X$ (basta scegliere un insieme denso numerabile $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ di X e prendere l' estensione a $\beta\mathbb{N}$ della funzione $\mathbb{N} \to X$ definita con uno spazio compatto e separabile di cardinalità $2^{\mathbf{c}}$. Tale spazio esiste per il teorema di Hewitt-Marczewski-Pondiczery del quale daremo una breve dimostrazione nel seguito. In particolare, $\{0,1\}^{\mathbf{c}}$ è separabile.

Siano $\{X_i\}_{i \in I}$ spazi separabili con $|I| \leq \mathbf{c}$. Il teorema di Hewitt-Marczewski-Pondiczery afferma che anche il prodotto $X = \prod_{i \in I} X_i$ è separabile. In forma più generale, se α è un cardinale infinito e se $\{X_i\}_{i \in I}$ sono spazi topologici con $d(X_i) \leq \alpha$ per ogni $i \in I$ e $|I| \leq 2^{\alpha}$, allora anche $d(\prod_{i \in I} X_i) \leq \alpha$. Il seguente lemma riduce la dimostrazione al caso di spazi discreti dove la densità coincide con la cardinalità:

Lemma 11.22. *(a) Sia X uno spazio discreto. Allora $d(X) = |X|$.*

(b) Sia X uno spazio discreto con $|X| = \alpha$. Allora uno spazio topologico Y ha $d(Y) \leq \alpha$ se e solo se esiste un applicazione continua $f : X \to Y$ con $f(X)$ densa in Y.

Teorema 11.23. *Sia X un insieme discreto di cardinalità α. Allora $d(X^{2^{\alpha}}) = \alpha$.*

Dimostrazione. Lo spazio X è immagine continua del prodotto X^{2^α} tramite la proiezione, quindi per il lemma precedente abbiamo $d(X^{2^\alpha}) \geq d(X) = \alpha$. Dimostreremo adesso che $d(X^{2^\alpha}) \leq \alpha$.

Notiamo che per $D = \{0,1\}$ si ha $|D^\alpha| = 2^\alpha$, quindi $X^{2^\alpha} = X^{D^\alpha}$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di chiusi-aperti di D^α avente come elementi tutti gli insiemi A del tipo $A = p_F^{-1}(t)$, dove $F \subseteq \alpha$ è un insieme finito e $t \in D^F$ è arbitrario. Poichè la cardinalità dell'insieme $[\alpha]^{<\omega}$ di tutte le parti finite di α è sempre uguale ad α, si ha $|\mathcal{B}| = \alpha$. Notiamo che per ogni $J \in [D^\alpha]^{<\omega}$ esiste una partizione $D^\alpha = \bigcup_{l=1}^n A_l$ con $A_l \in \mathcal{B}$ e $|J \cap A_l| = 1$ per ogni $l = 1, 2, \dots n$. Denotiamo con $\mathcal{P}$ la partizione $A_1, \dots, A_n$. Per ogni partizione $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ e per ogni funzione finita $\psi : \{1, 2, \dots, n\} \to X$ definiamo la funzione $\Psi_{\mathcal{P},\psi} \in X^{D^\alpha}$ tramite $\Psi_{\mathcal{P},\psi}|_{A_l} = \psi(l)$ per ogni $l = 1, 2, \dots n$. Come prima si verifica che l'insieme $Y = \{\Psi_{\mathcal{P},\psi}\}$, dove $\mathcal{P}$ varia tra tutte le partizioni finite di D^α con $A_l \in \mathcal{B}$ e ψ tra le funzioni finite $\mathcal{P} \to X$, soddisfa $|Y| = \alpha$. Ora resta da vedere che Y è denso in X^{2^α}. Infatti, per ogni $J \in [D^\alpha]^{<\omega}$ e per ogni funzione finita $\psi \in X^J$ troviamo una partizione $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ con $A_l \in \mathcal{B}$ e $|J \cap A_l| = 1$ per ogni $l = 1, 2, \dots n$. Adesso l'aperto $V = p_J^{-1}(\psi)$ di X^{2^α} contiene l'elemento $\Psi_{\mathcal{P},\psi}$ che sta nell' intersezione $Y \cap V$. □

12 Altre forme di compattezza

Qui confrontiamo tre tipi di compattezza: compattezza numerabile, pseudocompattezza e paracompattezza.

12.1 La compattezza numerabile

Una proprietà più debole della compattezza è la seguente: uno spazio topologico X si dice *numerabilmente compatto* se ogni ricoprimento aperto e numerabile di X ammette un sottoricoprimento finito. Infatti, ovviamente compatto $\Rightarrow$ numerabilmente compatto . L'implicazione inversa è vera per gli spazi di Lindelöff (poiché ogni ricoprimento aperto di uno spazio di Lindelöff ammette un sottoricoprimento numerabile). Quindi, uno spazio è compatto se e solo se esso è di Lindelöff e numerabilmente compatto.

Passando ai complementi (come nel caso della compattezza) si vede facilmente che:

Esercizio 12.1. *Uno spazio di Hausdorff X è numerabilmente compatto se e solo se ogni famiglia numerabile di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

Esercizio 12.2. *Sottospazio chiuso di uno spazio numerabilmente compatto è numerabilmente compatto.*

Dimostrazione. Applicare 12.1. □

La compattezza numerabile non si preservano per prodotti finiti (cf. [E]).

Teorema 12.3. *Uno spazio di Hausdorff X è numerabilmente compatto se e solo se ogni insieme infinito numerabile A di X ha un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia numerabilmente compatto. Sia $A = \{a_1, \dots, a_n \dots\}$ e $F_n = \overline{\{a_n, a_{n+1}, \dots\}}$. Allora per l'Es. 12.1 esiste $x \in \bigcap F_n$ che sarà il punto di accumulazione desiderato. Al contrario, supponiamo che ogni insieme infinito numerabile di X abbia un punto di accumulazione. Assumiamo per assurdo che X non sia numerabilmente compatto. Allora per l'Es. 12.1 esiste una famiglia di chiusi non vuoti $F_1 \supseteq \dots F_n \supseteq \dots$ con $\bigcap_n F_n = \emptyset$. Scegliamo $a_n \in F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poniamo $A = \{a_1, \dots, a_n \dots\}$. Si vede facilmente che A non ha punti di accumulazione. □

Teorema 12.4. *Uno spazio metrico X è numerabilmente compatto se e solo se X è compatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico numerabilmente compatto. Per dimostrare che X è compatto basta vedere che ogni successione $\{a_n\}$ ha un punto di accumulazione. Se l'insieme $A = \{a_n\}$ è finito questo è ovvio. Supponiamo che A sia infinito. Allora per il teorema precedente *l'insieme* A ha un punto di accumulazione a. □

Esercizio 12.5. *Sia X uno spazio numerabilmente compatto e $f : X \to Y$ un' applicazione continua e suriettiva. Allora anche lo spazio Y è numerabilmente compatto.*

Esercizio 12.6. *Lo spazio degli ordinali $< \omega_1$ è numerabilmente compatto, ma non è compatto.*

12.2 La pseudocompattezza

Il seguente ben noto teorema di Weierstrass ci permetterà di introdurre un altro tipo di compattezza.

Teorema 12.7. (Weierstrass) *Sia X uno spazio topologico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata ed esistono* $\max\{f(x) : x \in X\}$ *e* $\min\{f(x) : x \in X\}$.

Dimostrazione. Applicare l' esercizio 11.5 ed il Teorema 10.3. □

Non è difficile vedere, che per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata;

(ii) ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata e assume max e min.

Questa osservazione suggerisce il seguente concetto introdotto da Edvin Hewitt negli anni quaranta: uno spazio topologico X si dice *pseudocompatto* se ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata. Per il teorema di Weierstrass ogni spazio compatto è pseudocompatto. Vedremo che quando X è metrico, questa proprietà implica la compattezza (vedi Teorema 12.14).

Esercizio 12.8. *Sia X uno spazio pseudocompatto e $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva. Allora anche lo spazio Y è pseudocompatto.*

Sottospazio chiuso di uno spazio pseudocompatto può non essere pseudocompatto. Infatti, *ogni spazio di Tichonov è sottospazio chiuso di qualche spazio di Tichonov pseudocompatto* (theorema di Noble).

Esercizio 12.9. *Dare un esempio di uno spazio numerabilmente compatto (e quindi pseudocompatto) che non sia compatto.*

Dimostrazione. Sia Y lo spazio definito in 5.22. Come già notato lí ogni sottoinsieme numerabile A di Y è contenuto in un opportuno sottoinsieme compatto e metrizzabile (omeomorfo a $[0, 1]^{\mathbb{N}}$) di Y, e di conseguenza ogni successione di Y ha una sottosuccessione convergente. Quindi, Y è numerabilmente compatto. $\square$

Per certi versi la compattezza numerabile si riesce a descrivere meglio della pseudocompattezza in quanto è definita in termini (di aperti) dello spazio. La definizione di pseudocompattezza sembra avere il difetto di essere "esterna allo spazio in questione in quanto coinvolge funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Tuttavia, è possibile caratterizzare la pseudocompattezza in termini interni allo spazio. A questo scopo ci serve il seguente concetto: una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ di uno spazio topologico X si dice *localmente finita* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x che interseca solo un numero finito di insiemi A_i.

Teorema 12.10. *Uno spazio topologico completamente regolare è pseudocompatto se e solo se ogni famiglia localmente finita di insiemi aperti non vuoti è necessariamente finita.*

Dimostrazione. Sia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia localmente finita di insiemi aperti non vuoti di X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissiamo $x_n \in U_n$ e consideriamo una funzione continua $f_n : X \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(x_n) = n, f_n(X\backslash U_n) = \{0\}$ e $f \geq 0$. La funzione f è ben definita e non limitata. Quindi X non può essere pseudocompatto.

Supponiamo ora che X non sia pseudocompatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua non limitata. Allora $U_n = f^{-1}((-n, n))$, per $n \in \mathbb{N}$, è aperto e la famiglia $\mathcal{U} = \{U_n : n \in N\}$ di insiemi aperti è localmente finita. Poichè f non è limitata, $\mathcal{U}$ contiene una sottofamiglia infinita di insiemi non vuoti, assurdo. $\square$

Per finire diamo il seguente teorema di Hewitt senza dimostrazione (cf. [E]).

Teorema 12.11. *Sia X uno spazio di Tichonov. Allora X è pseudocompatto se e solo se X interseca non banalmente ogni insieme G_δ non vuoto della sua compattificazione βX.*

12.3 Confronto tra pseudocompattezza e compattezza numerabile

Qui dimostriamo che la compattezza numerabile è una proprietà più forte della pseudocompattezza. Valgono infatti le seguenti implicazioni delle quali (1) è banale e (2) sarà dimostrata nel seguito (cf. 12.12):

$$\text{compatto} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \text{numerabilmente compatto} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \text{pseudocompatto.}$$

L'implicazione inversa di (2) è vera per spazi normali (12.13). L' inversa di (1) si discute anche nel paragrafo dedicato alla paracompattezza – infatti, uno spazio è compatto se e solo se esso è paracompatto e pseudocompatto.

Teorema 12.12. *Ogni spazio numerabilmente compatto è pseudocompatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio numerabilmente compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per l'Es. 12.5 $Y = f(X)$ è sottospazio numerabilmente compatto di $\mathbb{R}$. Essendo $\mathbb{R}$ metrico, possiamo concludere che $f(R)$ è compatto e di conseguenza limitato. $\square$

Esiste uno spazio numerabilmente compatto X tale che $X \times X$ non è nemmeno pseudocompatto (cf. [E]), quindi, contrariamente alla compattezza, né la pseudocompattezza né la compattezza numerabile si preservano per prodotti finiti.

Teorema 12.13. *Uno spazio T_4 è numerabilmente compatto se e solo se è pseudocompatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio T_4 pseudocompatto. Supponiamo che X non sia numerabilmente compatto. Allora esiste un sottospazio numerabile $A = \{a_1, \ldots, a_n \ldots\}$ di X senza punti di accumulazione. Allora A è chiuso in X ed è discreto come spazio topologico con la topologia indotta. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita con $f(a_n) = n$ è continua, quindi si estende ad una funzione continua su X (per il teorema di Tietze 6.30). Quindi, lo spazio X ammette funzioni continue non limitate, assurdo. L'altro verso è stato già dimostrato nell' teorema precedente. □

Teorema 12.14. *Ogni spazio merico pseudocompatto è compatto*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 12.4 e dal Teorema 12.13. □

Esempio 12.15. Lo spazio $X = T_{\omega_1} \times T_\omega \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ è pseudocompatto e localmente compatto, ma non numerabilmente compatto. Infatti, l'insieme $A = \{(\omega_1, n) : n < \omega\}$ non ha punti di adherenza in X, quindi X non è numerabilmente compatto. Verifcare che ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata.

12.4 Spazi H-chiusi

Uno spazio di Hausdorff è detto *H-chiuso* se non ammette estensioni proprie di Hausdorff. Per il 11.6, ogni spazio compatto di Hausdorff e H-chiuso. Questa classe di spazi è stata introdotta da Alexandrov e Urysohn nella loro celebre memoria sugli spazi compatti [AU].

Esercizio 12.16. *Dimostrare che uno spazio di Hausdorff é H-chiuso se e sole se ogni filtro aperto in X ha punti di aderenza.*

Suggerimento. Applicare Eser. 8.2 ♣

Sfruttando questa caratterizzazione degli spazi H-chiusi tramite filtri aperti si puó ricavare il seguente teorema che fornisce caratterizzazione di questi spazi tramite ricoprimanti aperti:

Teorema 12.17. *Dimostrare che uno spazio T_2 non ammette T_2-estensioni proprie se e solo se per ogni ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ esistono $i_1, \ldots, i_n$ tali che $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ è denso in X.*

Dimostrazione. Supponiamo che X verifichi la condizione nell'ipotesi. Per l'esercizio precedente, per verificare che X sia H-chiuso baste vedere che un filtro aperto $\mathcal{F}$ ha punti di adherenza in X. Supponiamo ad assurdo che $\mathcal{F}$ sia un filtro aperto senza punti di adherenza in X. Allora per ogni $x \in X$ la condizione $x \notin \mathrm{ad}\mathcal{F}$ dà un intorno aperto $U_x \in calV(x)$ e un $F_x \in \mathcal{F}$ tali che

$$(\forall x \in X) U_x \cap F_x = \emptyset. \qquad (*)$$

Siano $x_1, \ldots x_n \in X$ tali che $\bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$ è denso in X. Sia $F = \bigcap_{k=1}^n F_{x_k}$. Poiché $F \in \mathcal{F}$, avremo $\mathrm{Int} F \neq$. Quindi $F \cap \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \neq \emptyset$. D'altra parte, (*) implica $F \cap \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} = \emptyset$ – assurdo.

Supponiamo adesso che X sia H-chiuso. Sia $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un ricoprimento aperto. Supponiamo ad assurdo che per ogni sottoinsieme finito F di U l'insieme $U_F = \bigcup_{i \in F} U_i$ non é denso in X. Allora l'insieme chiuso $G_F = \overline{U_F}$ ha complemento aperto e non-vuoto $O_F = X \setminus G_F$. Ora $\mathcal{B} = \{O_F : F \subseteq I, \text{ finito}\}$ é una base di filtro che consiste di insiemi aperti, quindi genera un filtro aperto $\mathcal{F}$ su X. Poiché ogni punto $x \in X$ é coperto da un certo U_i, $i \in I$, chiaramente $x \notin \overline{O}_F$ per tutti $F \subseteq I$ che contengono l'indice i. Pertanto, x non é punto aderente di $\mathcal{F}$. Poiché X é H-chiuso, questo contraddice l'Es. 12.16. □

Corollario 12.18. *Un H-spazio è compatto se e solo se è regolare.*

La dimostrazione del seguente fatto segue quella del teorema di Tichonov del prodotto.

Teorema 12.19. *Prodotto di H-spazi è un H-spazio.*

Infine, il seguente teorema di Katětov ci dà la controparte della compattificazione di Stone-Čech per spazi di Hausdorff.

Teorema 12.20. *Per ogni spazio di Hausdorff X esiste un estensione di Hausdorff κH con le seguenti prorietà:*

1. *κX è un H-spazio;*
2. *per ogni H-spazio Y e per ogni applicazione continua $f : X \to Y$ con immagine densa esiste sottospazio Z di κX contente X e un'applicazione $f' : Z \to Y$ che estende f e tale che $f'(Z) = Y$.*

Dimostrazione. Un filtro aperto $\mathcal{F}$ in X è detto *massimale*, se risulta tale nella famiglia dei filtri aperti di X. Sia $\mathbf{M}$ la famiglia di tutti filtri aperti di X senza punti adherenti. Si noti che se $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{M}$ sono distinti, allora esistono $U \in \mathcal{F}$ e $V \in \mathcal{G}$ con $U \cap V = \emptyset$. Sia κX lo spazio formato dall'insieme X più i filtri di $\mathbf{M}$ con la seguente topologia. L'insieme X è dichiarato aperto in κX (e di conseguenza tutti i punti di X conservano i suoi intorni aperti tipici), un intorno della base del punto $\mathcal{F} \in \mathbf{M}$ ha la forma $\{\mathcal{F}\} \cup U$ dove $U \in \mathcal{F}$. Adesso ogni filtro aperto $\mathbf{F}$ di κX determina un filtro aperto $\mathcal{F}$ in X. Se $\mathcal{F}_0$ è un filtro aperto massimale in X che contiene $\mathcal{F}$, il punto $\mathcal{F}_0$ di κX è ovviamente un punto di accumulazione del filtro $\mathbf{F}$. Questo dimostra 1. Per dimostrare 2. consideriamo un'applicazione continua $f : X \to Y$ per un H-spazio Y. Per ogni $z \in Y \setminus f(X)$ si consideri il filtro $\mathcal{G}$ delle intersezioni $U \cap f(X)$ dove $U \in \mathcal{V}(z)$. Per la continuità di f ogni $f^{-1}(U)$ è aperto in X, pertanto si trova un filtro aperto $\mathcal{F}$ in X. Sia $\mathcal{F}_z \in \mathbf{M}$ un filtro che contiene $\mathcal{F}$. Chiaramente $\mathcal{F}_z \in \kappa X \setminus X$. Poniamo adesso $Z = X \cup \{\mathcal{F}_z : z \in Y \setminus f(X)\}$. Definiamo $f'(\mathcal{F}_z) = z$. Allora f è continua e $f'(Z) = Y$. □

12.5 Paracompattezza, separazione e partizioni dell'unità

Qui vengono fornite le proprietà fondamentali della paracompattezza, in particolare la caratterizzazione in termini di partizioni dell'unità.

La paracompattezza ha diversi legami con le altre proprietà di compattezza e di separazione; il prossimo teorema afferma per esempio che uno spazio paracompatto da T_2 diventa automaticamente T_4.

Lemma 12.21. *Sia X paracompatto e siano A, B sottoinsiemi chiusi disgiunti di X. Supponiamo che si possa separare ogni punto di B da A, cioè:*

$$\forall x \in B\ \exists\, U_x, V_x \text{ aperti disgiunti tali che } A \subseteq U_x,\ x \in V_x.$$

Allora si può separare anche A da B, ovvero esistono due aperti disgiunti U e V tali che: $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

Dimostrazione. $\mathcal{U} = \{X \setminus B\} \cup \{V_x : x \in B\}$ è ricoprimento aperto di X; per paracompattezza, $\mathcal{U}$ ha un raffinamento aperto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_s : s \in S\}$. Sia $S_1 = \{s : W_s \subseteq V_x$ per qualche $x \in B\}$. Se $x \in B$, esiste s tale $x \in W_s$; tale W_s interseca B, allora deve essere $W_s \subseteq V_{x'}$ per qualche $x' \in B$; segue che $x' \in W_s$ e $s \in S_1$. Quindi $B \subseteq \bigcup\{W_s : s \in S_1\} := V$. Se $s \in S_1$, $A \cap \overline{W_s} = \emptyset$, quindi $A \subseteq X \setminus \bigcup\{\overline{W_s} : s \in S_1\} := U$. U e V sono gli aperti cercati. □

Teorema 12.22. *Ogni T_2 spazio paracompatto è T_4.*

Dimostrazione. Poiché x è T_2, si possono separare i punti di X; per il lemma precedente X risulta regolare. Allora si possono separare anche i punti dai chiusi; riapplicando il lemma si ha che X è anche normale. □

Teorema 12.23. *Se $X \in T_2$, X è compatto se e solo se è paracompatto e pseudocompatto.*

Dimostrazione. Sia $X \in T_2$, paracompatto e pseudocompatto, allora $X \in T_4$. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X e sia $\mathcal{V}$ un raffinamento aperto localmente finito. Essendo X di Tychonov e pseudocompatto, $\mathcal{V}$ è finito. □

Vediamo ora che uno spazio è paracompatto se ha abbastanza partizioni dell'unità.

Definizione 12.24. 1) Una famiglia di funzioni continue $f_s : X \to [0,1]$, $s \in S$ si dice *partizione dell'unità* (p.d.u.) se per ogni punto x dello spazio si ha $f_s(x) \neq 0$ solo per una quantità al più numerabile di $s \in S$ ed inoltre $\sum_{s \in S} f_s(x) = 1$;

2) una p.d.u. $\{f_s : s \in S\}$ si dice *localmente finita* se il ricoprimento aperto $\{f_s^{-1}(0,1] : s \in S\}$ è localmente finito;

3) una p.d.u. $\{f_s : s \in S\}$ si dice *subordinata* ad un ricoprimento $\mathcal{U}$ se $\{f_s^{-1}(0,1] : s \in S\}$ è raffinamento di $\mathcal{U}$.

Lemma 12.25. *Sia X uno spazio normale e $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ un ricoprimento aperto localmente finito; allora $\mathcal{U}$ ha un raffinamento aperto del tipo $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ e $\overline{V_s} \subseteq U_s$ per ogni $s \in S$.*

Dimostrazione. Vogliamo confrontare i ricoprimenti del tipo $\{V_s : s \in S\}$ per sceglierne uno con la proprietà voluta. Definiamo un insieme $\mathcal{G} = \{G : S \to \tau | G(S)$ è ricoprimento di X e $\forall s\, G(s) = U_s$ oppure $\overline{G(s)} \subseteq U_s\}$, dove τ è la topologia di X. Per $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ poniamo $G_1 \leq G_2$ se $G_1(s) \neq U_s \Rightarrow G_1(s) = G_2(s)$. $\leq$ è un ordine parziale su $\mathcal{G}$. Verifichiamo che con tale ordine $\mathcal{G}$ è induttivo. Sia $\mathcal{G}_0$ una catena di $\mathcal{G}$; poiché consideriamo più grandi ricoprimenti con insiemi più piccoli, un buon candidato ad elemento massimale di $\mathcal{G}_0$ è dato da $G_0(s) = \bigcap\{G(s) : G \in \mathcal{G}_0\}$. Infatti, $G_0(s)$ è aperto per ogni $s \in S$ e verifica $G_0(s) = U_s$ oppure verifica $\overline{G_0(s)} \subseteq U_s$ perché:

- $\forall G \in \mathcal{G}_0\ G(s) = U_s \Rightarrow G_0(s) = U_s$
- $\exists H \in \mathcal{G}_0 : H(s) \neq U_s \Rightarrow G_0(s) = H(s)$.

Inoltre $G_0(s)$ è un ricoprimento di X: per $x \in X$ sia $S_0 = \{s \in S : x \in U_s\}$ (tale insime è finito); se $G_0(s) = U_s$ per qualche $s \in S_0$, allora $x \in G_0(s)$; se invece $G_0(s) \neq U_s$ per ogni $s \in S_0$, allora esistono elementi di $\mathcal{G}_0$ G_s, $s \in S_0$, tali che $G_s(s) \neq U_s$; sia G il massimo di questi elementi; allora $G(S)$ è ricoprimento di X e $x \in G(s)$ per qualche s, necessariamente in S_0; quindi $x \in G_s(s) = G_0(s)$. Dunque $G_0 \in \mathcal{G}$ e $G_0 \geq G$ per ogni $G \in \mathcal{G}_0$. Per il lemma di Zorn, $\mathcal{G}$ ha un elemento massimale: sia G. Vediamo che G fornisce il ricoprimento cercato. Per assurdo esista $t \in S$ tale che $\overline{G(t)} \not\subset U_t$ (quindi $G(t) = U_t$). $A = X \setminus \bigcup_{s \neq t} G(s)$ è chiuso contenuto in $G(t)$; per normalità, esiste un aperto V tale che che $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq G(t)$. Sia $H(t) = V$ e $H(s) = G(s)$ se $s \neq t$; allora è negata la massimalità di G perché $H \in \mathcal{G}$, $h \geq G$ ma $H \neq G$ (se fosse $V = G(t)$ si avrebbe $\overline{V} = G(t) \subseteq U_t$, escluso). □

Lemma 12.26. *Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X; se $\mathcal{U}$ ha una p.d.u. subordinata, allora $\mathcal{U}$ ha un raffinamento aperto localmente finito.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X e sia $\{f_s : s \in S\}$ una p.d.u. subordinata. Vogliamo sfruttare la partizione dell'unità per definire aperti che raffinino $\mathcal{U}$. Definiamo $f := \sup_s f_s$ e $V_s := \{f < \frac{1}{2} f_s\}$. Vediamo che f è continua, così V_s sarà aperto. Osserviamo che se $g : X \to [0,1]$ è una funzione continua e in punto x si ha $g(x) > 0$, allora $1 - g(x) < 1 = \sum_s f_s(x)$, quindi esiste un insieme finito di indici S_0 tale che: $1 - g(x) < \sum_{s \in S_0} f_s(x)$. Per continuità $U_x = \{1 - g < \sum_{s \in S_0} f_s\}$ è intorno di x. Se $y \in U_x$ e $t \notin S_0$ si ha $f_t(y) < g(y)$ (altrimenti $\sum_s f_s(y) \geq \sum_{s \in S_o} f_s(y) + f_t(y) > 1$). Sia $x \in X$ e t tale che $f_t(x) > 0$. Applicando l'osservazione con $g = f_t$ si ottiene che in tutto un intorno di x $f_s < f_t$ se $s \notin S_0$, quindi in tale intorno $f = \max\{f_s : s \in S_0 \cup \{t\}\}$ ed è continua. I V_s costituiscono un ricoprimento dello spazio perché per ogni x si ha: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2} f(x) \Rightarrow \exists s : f_s(x) > \frac{1}{2} f(x) \Rightarrow x \in V_s$. Inoltre applicando l'osservazione con $g = \frac{1}{2} f$ si ottiene che il ricoprimento è localmente finito. □

Teorema 12.27. *Per uno spazio T_1 X sono equivalenti:*

1) $X \in T_2$ ed è paracompatto;

2) ogni ricoprimento aperto di X ha una p.d.u. localmente finita e subordinata;

3) ogni ricoprimento aperto di X ha una p.d.u. subordinata.

.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2): X è T_4 per il Teorema 12.22. Sia $\mathcal{W}$ un ricoprimento aperto e sia $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ un suo raffinamento aperto e localmente finito. Per il lemma 12.25 $\mathcal{U}$ ha un raffinamento del tipo $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ con $\overline{V_s} \subseteq U_s$ per ogni s. Per il lemma di Urysohn, per ogni s esiste una funzione continua $g_s : X \to [0,1]$ tale che: $g_s(\overline{V_s}) = 1$ e $g_s(X \setminus U_s) = 0$. Poiché $\mathcal{V}$ è localmente finito, $g := \sum_s g_s$ è ben definita e continua: infatti per ogni punto x esiste un intorno (aperto) U che interseca solo un numero finito U_s; allora in U g è somma di un numero finito di g_s; inoltre, $g > 0$ (perché ogni $x \in X$ appartiene ad almeno un V_s). Posto $f_s := \frac{g_s}{g}$, le f_s costituiscono una p.d.u. localmente finita subordinata a $\mathcal{U}$ (e quindi a $\mathcal{W}$): infatti, per ogni x esiste un intorno (aperto) U che interseca solo un numero finito U_s; allora in U $f_s > 0$ solo per un numero finito di s, cioè U interseca solo un numero finito di $\{f_s > 0\}$.
3) $\Rightarrow$ 1): per il lemma 12.26 basta dimostrare che $x \in T_2$; vediamo che in realtà X è di Tychonov. Sia $x \notin F$ chiuso. $\{X \setminus F, X \setminus \{x\}\}$ è ricoprimento aperto di X. Sia $\{f_s : s \in S\}$ una p.d.u. subordinata; sia $s \in S$ tale che $f_s(x) = a > 0$; allora $\{f_s > 0\} \subseteq X \setminus F$, quindi $f_s(F) = 0$. La funzione $f := \min\{\frac{1}{a} f_s, 1\}$ è la funzione cercata. □

Teorema 12.28. *Ogni T_3-spazio di Lindelöff è paracompatto.*

Dimostrazione. Un T_3-spazio di Lindelöff X è T_4. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto; per ogni $x \in X$ scegliamo $U_x \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U_x$. Per normalità, per ogni x esiste una funzione continua $f_x : X \to [0,1]$ tale che $f_x(x) = 1$ e $f_x(X \setminus U_x) = 0$; $V_x := \{f_x > 0\} \subseteq U_s$ ed è intorno di x. Quindi $\{V_x : x \in X\}$ è ricoprimento aperto; sia $\{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ un sottoricoprimento. Sia $f_n := \frac{1}{2^n} f_{x_n}$ e $F := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$; F è ben definita e continua. Si vede che $\{\frac{f_n}{F}\}$ è p.d.u. subordinata a $\mathcal{U}$; la tesi segue dal lemma 12.26. □

13 Spazi metrizzabili e paracompattezza

In questo paragrafo viene trattato il problema della metrizzabilità di uno spazio topologico, ovvero la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti affinchè una topologia sia indotta da una metrica. A questo scopo viene dimostrato il teorema di A.H.Stone dal quale si deduce che una importante proprietà degli spazi metrici è la paracompattezza. I teoremi di Nagata-Smirnov e di Bing forniscono caratterizzazioni della metrizzabilità in termini di regolarità e di basi σ-localmente finite o σ-discrete. Il teorema di Nagata-Smirnov viene dimostrato direttamente mentre il teorema di Bing (che segue facilmente dal precedente, ma in origine dimostrato in modo indipendente) segue da un teorema di immersione di spazi metrizzabili di un certo peso in un opportuno spazio universale. Con X si denoterà in seguito un generico spazio topologico.

13.1 Il teorema di A.H.Stone

Introduciamo alcuni concetti importanti che verranno utilizzati nei teoremi che seguono:

Definizione 13.1. Dato uno spazio topologico X e una famiglia di parti $\mathcal{A}$ di X si dice che:

1) $\mathcal{A}$ è localmente finita (discreta) se $\forall x \in X \ \exists U_x$ intorno di x che intersechi al più un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$ (rispettivamente, al più un elemento di $\mathcal{A}$);

2) $\mathcal{A}$ è σ-localmente finita (σ-discreta) se è unione numerabile di famiglie localmente finite (rispetivamente, discrete).

Un' importante proprietà delle famiglie localmente finite è data dal seguente lemma:

Lemma 13.2. *Se $\{A_s\}_{s\in S}$ è una famiglia localmente finita di parti di X allora:*

$$\bigcup_{s\in S} \overline{A_s} = \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$$

Dimostrazione. L' inclusione $\subseteq$ è ovvia. Sia $x \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s} := C$ e sia U intorno di x tale che $S_0 = \{s \in S : U \cap U_s = \emptyset\}$ sia finito; sia $S_1 = S \setminus S_0$. Poiché $U_x \cap (\bigcup_{s\in S_1} A_s) = \emptyset$ si ha $x \notin \overline{\bigcup_{s\in S_1} A_s} := D$. Posto $E := \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s}$ si ha $C = D \cup E$, $x \in C$ e $x \notin D$, dunque $x \in E = \bigcup_{s\in S_0} \overline{A_s}$. □

Lemma 13.3. *Se $\{A_s\}_{s\in S}$ è una famiglia localmente finita (discreta), allora lo è anche $\{\overline{A_s}\}_{s\in S}$.*

Dimostrazione. Nelle notazioni precedenti, l'intorno U di x può esser scelto aperto, quindi se $s \notin S_0$ si ha $U \cap A_s = \emptyset$. □

Definizione 13.4. Uno spazio topologico si dice *paracompatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto localmente finito.

Ovviamente, ogni spazio compatto è paracompatto.

Teorema 13.5. (Teorema di Stone) Se X è metrizzabile, ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto σ-discreto.

Dimostrazione. Sia d la metrica su X e $\{U_s\}_{s\in S}$ un ricoprimento aperto di X. L'idea della dimostrazione è di scrivere ciascuno degli U_s come unione crescente di aperti $U_{s,n}$ da rimpicciolire poi opportunamente. Definiamo $U_{s,n} = \{x \in X : d(x, X \setminus U_s) > \frac{1}{2^n}\}$ (intuitivamente, abbiamo tolto da U_s una striscia di spessore $\frac{1}{2^n}$). Poiché la funzione di distanza da un insieme è continua, $U_{s,n}$ risulta aperto; inoltre, U_s è unione degli $U_{s,n}$ (perché, essendo $X \setminus U_s$ chiuso, $x \in U_s$ se e solo se $d(x, X\setminus U_s) > 0$). Osserviamo che se $x \in U_{s,n}$ e $y \notin U_{s,n+1}$ allora $d(x,y) > \frac{1}{2^n}$: infatti $d(x,y) \geq |d(x, X\setminus U_s) - d(y, X\setminus U_s)| > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Sia $<$ un buon ordine su S; definiamo $V_{s,n} := U_{s,n} \setminus \overline{\bigcup_{t<s} U_{t,n+1}}$; tale insieme risulta aperto. Vediamo ora che, per n fissato, i $V_{s,n}$ sono abbastanza separati. Se $x \in V_{s,n}$ e $y \in V_{t,n}$ con $s \neq t$ allora $d(x,y) > \frac{1}{2^{n+1}}$: infatti, se per esempio $s < t$ allora $x \in U_{s,n}$ e $y \notin U_{s,n+1}$ e quindi $d(x,y) > \frac{1}{2^{n+1}}$. Questo dice che ogni palla di raggio $\frac{1}{2^{n+1}}$ interseca al più un $V_{s,n}$ e dunque, per n fissato, i $V_{s,n}$ costituiscono al variare di $s \in S$ una famiglia discreta; facendo variare anche $n \in \mathbb{N}$ si ottiene una famiglia σ-discreta. Vediamo ora che i $V_{s,n}$ formano un ricoprimento dello spazio. Sia $x \in X$ e sia s il minimo indice tale che $x \in U_{s,n}$ per qualche n; allora $x \in V_{s,n}$ se e solo se $x \notin \overline{\bigcup_{t<s} U_{t,n+1}} := F$; basta verificare dunque che $B(x, \frac{1}{2^{n+2}}) \cap F = \emptyset$; questo vale perché per ogni $t < s$ $x \notin U_{t,n+2}$, allora se $y \in U_{t,n+1}$ si ha $d(x,y) > \frac{1}{2^{n+2}}$. □

Corollario 13.6. *Ogni spazio metrizzabile ha una base σ-discreta (e quindi σ-localmente finita).*

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, l'insieme delle palle di raggio $\frac{1}{n}$ e centro x al variare di $x \in X$ è un ricoprimento aperto di X; sia $\mathcal{B}_n$ un suo raffinamento aperto σ-discreto. La famiglia $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ è pure σ-discreta; verifichiamo che è anche base di X. Sia U un aperto, $x \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tale che $B := B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$; per definizione di ricoprimento esiste $V \in \mathcal{B}_{2n}$ tale che $x \in V$ ed essendo V contenuto in una palla di raggio $\frac{1}{2n}$ deve essere $V \subseteq B$. □

Lemma 13.7. *Sia X uno spazio metrizzabile e $\{G_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un ricoprimento aperto $\{H_i\}_{i\in I}$ tale che $\overline{H_i} \subseteq G_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Sia d la metrica su X e $C_i = X \setminus G_i$; si può supporre d limitata e $G_i \neq X$ per ogni $i \in I$ e dunque $C_i \neq \emptyset$ per ogni i. Poiché X è normale, basta trovare una famiglia di chiusi $F_i, i \in I$, che ricoprano lo spazio e tali che $F_i \subseteq G_i$ per ogni i. Anche in questo caso cercheremo di restringere (ma non troppo) i G_i sfruttando la metrica. Sia $F_i = \{x \in X : 2d(x, C_i) \geq d(x, C_j) \text{ per ogni } j\}$; risulta $F_i = \bigcap_j \{x \in X : 2d(x, C_i) \geq d(x, C_j)\}$ e quindi F_i è chiuso. Posto $\sigma(x) = \sup_i d(x, C_i)$ si ha anche $F_i = \{x \in X : 2d(x, C_i) \geq \sigma(x)\}$; ma $\sigma(x) > 0$ per ogni x (in quanto x appartiene ad almeno uno dei G_i) allora $F_i \subseteq G_i$; inoltre $2\sigma(x) > \sigma(x)$ e per definizione di estremo superiore esiste un i tale che $2d(x, C_i) > \sigma(x)$ cioè $x \in F_i$. Dunque gli F_i ricoprono X, sono chiusi e $F_i \subset G_i$ e la dimostrazione è conclusa. □

Il teorema che segue afferma che in uno spazio metrizzabile si può passare, a meno di raffinamento, da un ricoprimento aperto σ-localmente finito ad uno localmente finito.

Teorema 13.8. *Sia X metrizzabile e $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto σ-localmente finito; allora esiste un raffinamento aperto e localmente finito di $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ un ricoprimento aperto di X con $\mathcal{A}_n$ localmente finita. Sia $\mathcal{A}_n = \{G_{n,t} : n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in T_n\}$. Per il lemma precedente, esistono degli aperti $H_{n,t}$ tali che

$$\overline{H_{n,t}} \subseteq G_{n,t} \text{ e } \bigcup\{H_{n,t} : t \in T_n\} = \bigcup\{G_{n,t} : t \in T_n\}.$$

Definiamo ora $K_{n,t} := G_{n,t} \setminus \bigcup_{m<n} \bigcup_{t\in T_m} \overline{H_{m,t}}$; gli $H_{m,t}$ costituiscono per m fisso una famiglia localmente finita allora $\bigcup_{t\in T_m} \overline{H_{m,t}} = \overline{\bigcup_{t\in T_m}}$ è chiuso, dunque lo è anche $\bigcup_{m<n} \bigcup_{t\in T_m} \overline{H_{m,t}}$ e $K_{n,t}$ è aperto. Vediamo che i $K_{n,t}$ costituiscono, al variare sia di n sia di $t \in T_n$, una famiglia localmente finita. Sia $x \in X$ e n_0 minimo tale che $x \in H_{n_0,t_0}$ per qualche t_0. Se $n \geq n_0$ $H_{n_0,t_0} \cap K_{n,t} = \emptyset$; poichè $\mathcal{A}_n$ è localmente finita, per ogni $n \leq n_0$ esiste un intorno di V_n di x tale che V_n intersechi solo un numero finito di elementi di $\mathcal{A}_n$; ma allora $H_{n_0,t_0} \cap V_1 \cap \ldots \cap V_{n_0}$ è intorno di x che interseca solo un numero finito di $K_{n.t}$. Resta da verificare che i $K_{n,t}$ sono un ricoprimento di X. Sia $x \in X$ e n_0 minimo tale che $x \in G_{n_0,t_0}$ per qualche t_0; allora per $m < n_0$ e $t \in T_m$ $x \notin \overline{H_{n,t}}$ (in quanto $\overline{H_{n,t}} \subset G_{n,t}$ e per la minimalità di n_0) e quindi $x \in K_{n,t}$. □

Corollario 13.9. *Ogni spazio metrico è paracompatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto dello spazio. Per il teorema di Stone esiste un raffinamento aperto e σ-discreto $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{B}$ é anche σ-localmente finito. Per il teorema precedente esiste un raffinamento aperto e localmente finito $\mathcal{C}$ di $\mathcal{B}$. Dunque $\mathcal{C}$ é un un raffinamento aperto e localmente finito di $\mathcal{A}$. □

13.2 Teoremi di metrizzazione

Abbiamo visto che condizione necessaria per la metrizzabilità è avere una base σ-discreta e quindi σ-localmente finita; inoltre sappiamo che gli spazi metrici hanno forti proprietà di separazione, precisamente sono T_4. Il teorema di Nagata-Smirnov afferma che queste due condizioni sono anche sufficienti, anzi basta supporre che lo spazio sia T_3 in virtù del lemma che segue.

Lemma 13.10. *Uno spazio regolare con una base σ-localmente finita è normale.*

Dimostrazione. Siano F e W parti di X, F chiuso, W aperto e $F \subseteq W$. Sia $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ una base di X con $\mathcal{B}_n$ localmente finita. Per regolarità, $\forall x \in X\ \exists\, V_x \in \mathcal{B} : x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq W$. Definiamo $V_n := \cup\{V_x : V_x \in \mathcal{B}_n\}$; poiché $\mathcal{B}_n$ è localmente finita, si ha: $\overline{V_n} = \cup\{\overline{V_x} : V_x \in \mathcal{B}_n\} \subseteq W$; quindi $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ e $\overline{V_n} \subseteq W$. Allora esiste anche un aperto V tale che $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W$. □

Lemma 13.11. *Sia $X \in T_1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia d_n una pseudometrica su X tale che $d_n \leq 1\ \forall n$; supponiamo che siano verificate le seguenti due condizioni:*

1) d_n è continua per ogni n;

2) $\forall x \in X$ e $\forall A \subset X$ chiuso non vuoto con $x \notin A$ $\exists n \in \mathbb{N} :$ $d_n(x, A) > 0$.

Allora la posizione:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x, y)$$

definisce una metrica che induce la topologia di X.

Dimostrazione. La serie che definisce d è totalmente convergente, quindi d è ben definita e continua; inoltre d risulta chiaramente una pseudometrica. Siano $x \neq y$, cioè $x \notin \{y\} = \overline{\{y\}}$; per la 2) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $d_n(x, \overline{\{y\}}) = d_n(x, y) > 0$ e quindi $d(x, y) > 0$ e d è anche metrica. Per vedere che d induce la topologia di X basta vedere che per ogni $A \subseteq X$ chiuso non vuoto si ha $\overline{A}^d = \overline{A}$, cioé che per ogni $x \in A$ si ha: $x \in \overline{A}$ se e solo se $d(x, A) = 0$. Sia $f(y) = d(y, A)$; si ha $|f(y) - f(z)| \leq d(y, z)$ e quindi f è continua; se $x \in \overline{A}$, $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$, dunque $f(x) = 0$. Viceversa, se $x \notin \overline{A}$ per la 2) $\exists n$ $\mathbb{N}$ tale che $d_n(x, \overline{A}) > 0$, allora $d(x, A) \geq d(x, \overline{A}) \geq \frac{1}{2^n} d_n(x, \overline{A}) > 0$. □

Ora segue il teorema di Nagata-Smirnov.

Teorema 13.12. *Uno spazio topologico è metrizzabile se solo se è T_3 ed ha una base σ-localmente finita.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che le condizioni sono necessarie. Supponiamo ora che X verifichi le condizioni dell'enunciato; per il lemma 13.10 $X \in T_4$. Fissiamo una base di X $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ dove $\mathcal{B}_n = \{U_s : \ s \in S_n\}$ è localmente finita. Fissiamo ora $n \in \mathbb{N}$ e un indice $s \in S_n$; cerchiamo un chiuso contenuto in U_s per applicare il lemma di Urysohn; a questo scopo, fissiamo anche $m \in \mathbb{N}$ e definiamo $V_s := \bigcup\{U_t : \ t \in S_m \ \text{ e } \overline{U_t} \subseteq U_s\}$; poiché $\mathcal{B}_n$ è localmente finita, $\overline{V_s} \subseteq U_s$. Sia $f_s : \ X \to [0,1]$ una funzione continua tale che:

$$f_s(\overline{V_s}) = 1 \ \text{ e } \ f_s(X \setminus U_s) = 0.$$

Vorremmo definire una pseudometrica tramite un oggetto del tipo $\sum |f_s(a) - f_s(b)|$, che puó non avere senso su tutto X. Però $\forall x \in X \ \exists \ U(x)$ intorno (aperto) di x e $S(x) \subseteq S_n$ finito tali che $U(x) \cap U_s = \emptyset$ se $s \in S_n \setminus S(x)$; allora per $(a,b) \in U(x) \times U(y)$ ha senso $\sum_{s\in S(x)\cup S(y)} |f_s(a) - f_s(b)| = \sum_{s\in S_n} |f_s(a) - f_s(b)|$ questa somma definisce una funzione continua $g_{x,y} : U(x) \times U(y) \to \mathbb{R}$. Al variare di x e y in X otteniamo una famiglia compatibile di funzioni continue definite su aperti che ricoprono lo spazio, allora rimane definita anche una funzione continua $g_{n,m} : X \times X \to \mathbb{R}$. Si vede facilmente che tale funzione è pseudometrica e si può supporre che sia ≤ 1 (eventualmente si considera $\min\{g_{n,m}, 1\}$). Facendo variare n, m fra i naturali, abbiamo dunque una famiglia numerabile di pseudometriche continue e ≤ 1. Per applicare il lemma, resta da verificare la condizione 2). Sia A un chiuso non vuoto e $x \notin A$; $x \in X \setminus A$ che è aperto, allora esiste un aperto basico U_s tale che $x \in U_s \subseteq X \setminus A$; per regolarità esiste anch V_t tale che $x \in U_t \subseteq \overline{U_t} \subseteq U_s$. Siano $s \in S_n$ e $t \in S_m$, allora $x \in \overline{V_s}$ e $A \subseteq X \setminus U_s$ quindi $f_s(x) = 1$e $f_s(a) = 0$ per ogni $a \in A$. Segue che $g_{n,m}(x,a) = 1$ per ogni $a \in A$ e $g_{n,m}(x, A) = 1 > 0$. Per il lemma precedente, X è metrizzabile. □

Dal teorema 13.12 segue facilmente il seguente teorema, in origine dimostrato in modo indipendente:

Teorema 13.13. (Teorema di Bing) *Uno spazio topologico é metrizzabile se solo se è T_3 ed ha una base σ-discreta.*

Daremo una dimostrazione diretta di questo teorema trovando, per uno spazio di un certo peso, T_3 e con una base σ-discreta, un' immersione in un opportuno spazio metrico.

Lemma 13.14. *Se X è uno spazio di peso m e $\{U_s\}_{s\in S}$ è una famiglia di aperti di X, allora esiste $S_1 \subseteq S$ tale che $|S_1| = m$ e $\bigcup_{s\in S_1} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ base di X di cardinalità m. Sia $\mathcal{B}_1 = \{W \in \mathcal{B} : W \subseteq U_s \ \text{ per qualche } s\}$; per $W \in \mathcal{B}_1$ sia $s(W)$ tale che $W \subseteq U_{s(W)}$ È definita quindi una funzione $s : \mathcal{B}_1 \to S$; posto $S_1 = s(\mathcal{B}_1)$ si ha $|S_1| \leq |\mathcal{B}_1| \leq m$ e $\bigcup_{s\in S_1} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$: infatti, se $x \in U_s$ per definizione di base esiste $W \in \mathcal{B}$ tale che $x \in W \subseteq U_s$; ma allora $W \in \mathcal{B}_1$ e quindi $x \in U_{s(W)}$. □

Lemma 13.15. *Se X è uno spazio di peso $m \geq \aleph_0$ e $\mathcal{B}$ è una base di X, allora esiste una base $\mathcal{B}_1$ tale che $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ e $|\mathcal{B}_1| = m$. Quindi il peso di X è la cardinalità di una qualunque base minimale rispetto all' ordine $\subseteq$ (se ne esistono).*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{U_s : s \in S\}$; fissiamo $\mathcal{B}_0 = \{W_t : t \in T\}$ base di cardinalità m. Per le proprietà delle basi, per ogni t W_t è unione di elementi di $\mathcal{B}$: sia $W_t = \cup\{U_s : s \in S(t)\}$ dove $S(t) \subseteq S$; per il lemma precedente si può supporre $|S(t)| \leq m$. Sia ora $\mathcal{B}_1 = \{U_s : s \in S(t) \text{ per qualche } t \in T\}$. Allora $|\mathcal{B}_1| \leq |T|m = m^2 = m$ e quindi basta vedere che $\mathcal{B}_1$ è base. Sia $x \in X$ e U aperto contenente x; poiché $\mathcal{B}_0$ è base, esiste t tale che $x \in W_t \subseteq U$; essendo $W_t = \cup\{U_s : s \in S(t)\}$ esiste t ed $s \in S(t)$ tale che $x \in U_s$ ed $U_s \in \mathcal{B}_1$ per definizione. □

Teorema 13.16. *Sia X uno spazio di peso m, T_3 ed avente una base σ-discreta. Allora esiste un' immersione*

$$i : X \hookrightarrow \prod_{\aleph_0} J(m)$$

di X in un prodotto numerabile di copie del riccio $J(m)$. In particolare, X è metrizzabile.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per il lemma 13.10 X è normale. Fissiamo una base di X $\mathcal{B} = \{U_s : s \in S\}$, dove $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ e $\mathcal{B}_n = \{U_s : s \in S_n\}$ è discreta; per il lemma precedente si può supporre $|S| = m$. Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\mathcal{B}_n$ è discreta e quindi l'insieme $A_n = \cup\{\overline{U_s} : s \in S_n\}$ è chiuso; inoltre gli U_s sono aperti in $\mathcal{B}_n$ dato che $A_n \setminus U_s = \cup\{U_t : t \in S_n, t \neq s\}$. L'idea è di definire delle funzioni continue $U_s \to J(m)$ utilizzando il lemma di Urysohn. A tale scopo, fissiamo anche un altro naturale k e consideriamo $V_s := \cup\{U_t : t \in S_k \text{ e } \overline{U_t} \subseteq U_s\}$; per le proprietà delle famiglie localmente finite, $\overline{V_s} \subseteq U_s$. Si può trovare allora una funzione continua $f_s :\to [0,1]$ tale che:

$$f_s(\overline{V_s}) = 1 \text{ e } f_s(X \setminus U_s) = 0.$$

Per le oservazioni fatte, la funzione:

$$g_{n,k} :\to J(m)$$

$$g_{n,k}(x) = f_s(x) \text{ se } x \in \overline{U_s}$$

è ben definita e continua. Poiché $g_{n,k}$ assume valore 0 sulle frontiere degli U_s, il modo più ragionevole di estendere $g_{n,k}$ a tutto X è di porla costantemente uguale a 0 fuori da A_n. Formalmente, $B_n = X \setminus \cup\{U_s : s \in S_n\}$ è un insieme chiuso; definiamo $f_{n,k} : B_n \to J(m)$ costantemente uguale a $(0,s)$; allora $f_{n,k}$ è continua e compatibile con $g_{n,k}$ (basta oservare che, per come sono fatti gli U_s, $A_n \cap B_n = \cup\{\overline{U_s} \setminus U_s\}$ e dunque ivi $f_{n,k}$ e $g_{n,k}$ valgono entrambe $(0,s)$). Rimane definita quindi una funzione continua $h_{n,k}; X \to J(m)$. Facendo variare n,k fra i naturali, abbiamo una famiglia numerabile di funzioni continue a valori nel riccio; è naturale quindi definire $i := \mathrm{diag}\{\mathrm{h_{n,k}} : \mathrm{n,k} \in \mathbb{N}\}$: i sarà l'immersione cercata. L'applicazione i risulta continua perché lo sono tutte le sue componenti. Vediamo che le $h_{n,k}$ hanno la proprietà di separare i punti dai chiusi, cioè: $\forall x \in X$, $\forall A \subseteq X$ chiuso non vuoto con $x \notin A$ $\exists n,k :$ $h_{n,k}(x) \notin \overline{h_{n,k}(A)}$. Infatti, se $x \notin A$ chiuso non vuoto allora $x \in X \setminus A$ che è aperto, dunque esiste un aperto basico U_s tale che $x \in U_s \subseteq X \setminus A$; inoltre per regolarità esiste un altro aperto basico U_t tale che $x \in U_t \subseteq \overline{U_t} \subseteq U_s$. Se $s \in S_n$ e $t \in S_k$, si ha $x \in V_s$ e $A \subseteq X \setminus U_s$; dunque $h_{n,k}(x) = 1$ e $h_{n,k}(A) \cap I_s = \{(0,s)\}$ e $h_{n,k}(x) \notin \overline{h_{n,k}(A)}$. Poiché i punti sono chiusi in X, le $h_{n,k}$ separano anche i punti tra di loro, cioè: se $x \neq y$ allora esistono n,k tali che $h_{n,k}(x) \neq h_{n,k}(y)$ (infatti, $x \notin \{y\} = \overline{\{y\}}$ quindi esistono n,k tali che $h_{n,k}(x) \notin \overline{h_{n,k}(y)} = h_{n,k}(y)$); allora i è iniettiva. Vediamo anche che $i :\to i(X)$ è aperta. Sia V aperto in X e verifichiamo che $i(V)$ è intorno di ogni suo punto. Sia $i(x) \in i(V)$ con $x \in V$; $x \notin X \setminus V$ che è chiuso, allora esistono n,k tali che $h_{n,k}(x) \notin \overline{h_{n,k}(X \setminus V)} := F$; $p_{n,k}^{-1}(J(m) \setminus F) := W$ è aperto in $\prod_{\aleph_0} J(m)$ e contiene $i(x)$, quindi basta vedere che $W \cap i(X) \subseteq i(V)$; sia $i(y) \in W$ e per assurdo $x \notin V$; allora $y \in X \setminus V \Rightarrow h_{n,k}(y) \in \overline{h_{n,k}(X \setminus V)}$, contro il fatto che $i(y) \in W$. La dimostrazione è conclusa. □

.

14 Spazi connessi

Uno spazio topologico X è *connesso* se ogni funzione continua $X \to \{0,1\}$, dove $\{0,1\}$ è munito della topologia discreta, è costante.

Partizione di uno spazio topologico è una partizione $X = A_1 \cup A_2$ in due insiemi disgiunti *chiusi* (e conseguentemente *aperti*). È chiaro che X è connesso se e solo se l' unica partizione di X è quella banale $X = X \cup \emptyset$. In altre parole, X è connesso se e solo se non ha sottoinsiemi propri che sono contemporaneamente chiusi e aperti (vedi 14.12).

Esercizio 14.1. *Dimostrare che lo spazio di Sierpiǹski $\{0,1\}$ è connesso.*

Lemma 14.2. *Se $\{C_i\}_{i\in I}$ sono insiemi connessi dello spazio topologico X aventi un punto in comune allora anche l'insieme $\bigcup_{i\in I} C_i$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $C = \bigcup C_i$ e $f : C \to \{0,1\}$ una funzione continua. Per ipotesi, ognuna delle restrizioni $f|C_i$ deve essere costante. Poiché esiste un punto comune a tutti i C_i questa costante è comune per tutti i C_i. Di conseguenza anche f è costante. □

Teorema 14.3. *i) immagine continua di uno spazio connesso e connesso;*

ii) la chiusura di un insieme connesso è connesso;

iii) il prodotto $X = \prod_{i\in I} X_i$ di spazi topologici è connesso se e solo tutti gli spazi X_i sono connessi.

Dimostrazione. i) Segue facilmente dalla definizione.

ii) Sia D un sottoinsieme denso e connesso dello spazio X. Se $f : X \to \{0,1\}$ e continua allora f è costante su D, e quindi anche su X (vedi Es. 6.8).

iii) Se X é connesso, allora ogni X_i é connesso quale immagine continua di X. Supponiamo adesso che ogni X_i sia connesso. Se $|I| = 2$, allora per ogni funzione continua $f : X_1 \times X_2 \to \{0,1\}$ notiamo che la restrizione su $\{x\} \times X_2$ e su $X_1 \times \{y\}$ sono costanti per ogni scelta di $x \in X_1$ e $y \in X_2$. Poiché $(x,y) \in (\{x\} \times X_2) \cap (X_1 \times \{y\})$, questa costante non dipende da x e y. Quindi f é costante. Per induzione questo dimostra l'asserto per tutti I finiti. Ora si consideri un I arbitrario e si fissi un punto $a = (a_i) \in X$. L'insieme

$$D = \{(x_i) \in X : |\{i \in I : x_i \neq a_i\}| < \infty\}$$

é denso in X. In piú, D é unione di sottoinsiemi D_F di X che contengono il punto a e sono omeomorfi a prodotti di sottofamiglie finite $\{X_i\}_{i\in F}$ di $\{X_i\}_{i\in I}$. Poiché ogni D_F é connesso per l'argomento precedente, possiamo applicare Lemma 14.2 per concludere che anche D é connesso. Ora si applica ii). □

Esercizio 14.4. *Dimostrare che ogni sottospazio di uno spazio Y è connesso se e solo se la famiglia degli insiemi aperti é totalmente ordinata per inclusione.*

Dimostrazione. Ovviamente, uno spazio é connesso se la famiglia degli insiemi aperti é totalmente ordinata per inclusione. Poiché questa proprietà é ereditaria per passaggio a sottospazi, così abbiamo dimostrato la sufficienza. Per dimostrare la necessità, supponiamo che esistono due sottoinsiemi aperti U, V di X tali che $U \not\subseteq V$ e $V \not\subseteq U$. Siano $u \in U, u \notin V$ e $v \in V$, $v \notin U$. Allora il sottospazio $\{u, v\}$ di X é discreto, quindi non é connesso. $\square$

Esercizio 14.5. *Uno spazio topologico X si dice* irriducibile *se $X = F \cup G$, con F e G chiusi, implica $X = F$ e $X = G$. Dimostrare che:*

(a) uno spazio topologico X é irriducibile se e solo se ogni sottoinsieme aperto non vuoto di X é denso in X (o equivalentemente, $U \cap V \neq \emptyset$ per ogni coppia di aperti non vuoti U e V di X);

(b) se uno spazio X possiede un singoletto denso, allora X é irriducibile;

(c) esistono spazi irriducibili che non hanno alcun punto denso;

(d) ogni sottospazio infinito di un T_0 spazio è connesso se e solo se ogni sottospazio infinito di X é irriducibile.

Esercizio 14.6. *Dimostrare che se un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ è connesso, allora C è un intervallo.*

Dimostrazione. Supponiamo che C non sia un intervallo. Allora esiste $x \in \mathbb{R} \setminus C$ tale che $C_0 = (-\infty, x) \cap C \neq \emptyset$ e $C_1 = (x, +\infty) \cap C \neq \emptyset$ sono aperti (e chiusi). Ovviamente $C = C_0 \cup C_1$ è una partizione di C, assurdo. $\square$

Esercizio 14.7. (Teorema di Bolzano) *Siano $a < b$ numeri reali. Dimostrare che se una funzione continua $f : [a, b] \to [a, b]$ soddisfa $g(a) < 0 < g(b)$ allora esiste $x \in [a, b]$ con $g(x) = 0$.*

Esercizio 14.8. *Dimostrare che $\mathbb{R}$ è connesso. Dedurre che ogni intervallo su $\mathbb{R}$ è connesso e quindi un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo.*

Teorema 14.9. *Siano $a < b$ numeri reali. Dimostrare che ogni funzione continua $f : [a, b] \to [a, b]$ ha un punto fisso, cioè, esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = x$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Allora la funzione $g(x) = f(x) - x$ assume valori $g(a) < 0 < g(b)$. Quindi esiste $x \in [a, b]$ con $g(x) = 0$ e quindi $f(x) = x$. $\square$

Questo teorema si estende anche a $\mathbb{R}^n$: *ogni funzione continua $f : [0, 1]^n \to [0, 1]^n$ ha un punto fisso* (teorema di Brauwer del punto fisso). Per $n > 1$ la dimostrazione è molto più difficile (vedi 16.11).

Teorema 14.10. *Sia f una funzione continua dal cerchio unitario S a $\mathbb{R}$. Allora esiste una coppia di punti antipodali x e $-x$ su S tale che $f(x) = f(-x)$.*

Dimostrazione. Supponiamo ad assurdo che sempre $f(x) \neq f(-x)$. Allora possiamo definire la funzione $g : S \to \mathbb{R}$ ponendo $g(x) = \frac{1}{f(x) - f(-x)}$. Allora g é continua e $g(-x) = -g(x)$. Poiché, $g(x) \neq 0$, questo assicura che assume sia valori positivi sia valori negativi. Quindi $g(S)$ é sottoinsieme sconnesso di $\mathbb{R}$ – assurdo. $\square$

Anche questo teorema si estende anche a $\mathbb{R}^n$: *per ogni funzione continua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ (dove S^n indica la sfera in $\mathbb{R}^{n+1}$) esiste una coppia di punti antipodali x e $-x$ su S tali che $f(x) = f(-x)$* (teorema di Borsuk-Ulam). Per $n > 1$ la dimostrazione è molto più difficile (vedi [**?**]). Un'interpretazione possibile nel caso $n = 2$ é la seguente: in ogni momento esistono due punti antipodali sulla terra, aventi la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica!

É facile vedere che uno spazio connesso X non si può presentare come unione finita $X = \bigcup_{m=1}^{n} F_m$ di sottoinsiemi chiusi e nonvuoti F_k che sono a due a due disgiunti. D'altra parte, lo spazio numerabile e connesso di Bing (Esempio 6.18) é ovviamente unione *numerabile* di sottoinsiemi chiusi e nonvuoti (singoletti) che sono a due a due disgiunti. Il seguente teorema di Sierpiǹski che diamo senza dimostrazione dimostra che questo non può accadere per spazi compatti e connessi.

Teorema 14.11. *Sia X uno spazio compatti e connesso. Allora X non si può presentare come unione numerabile di sottoinsiemi chiusi e nonvuoti che sono a due a due disgiunti.*

14.1 Le componente connesse di uno spazio

Esercizio 14.12. *Sia X uno spazio topologico. Definiamo una relazione binaria $\sim$ su X ponendo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se esiste un sottospazio connesso C di X che contiene sia x che y. Dimostrare che:*

i) $\sim$ è una relazione di equivalenza in X;

ii) le classi di equivalenza sono insiemi chiusi e connessi;

iii) X è connesso se e solo se non ha sottospazi propri che sono simultaneamente chiusi e aperti;

iv) X è connesso se e solo se per ogni sottoinsieme chiuso e proprio A di X esiste una rete in $X \setminus A$ che converge verso un punto di A.

Suggerimento: Per ii) applicare l'esercizio precedente. ♣

Le classi di equivalenza di cui sopra saranno chiamati *componente connesse* dello spazio topologico X. Per $x \in X$ denoteremo con $C(x)$ *la componente connessa* del punto x, cioè l'unica componente connessa di X che contiene x.

Esercizio 14.13. *Verificare che se X e Y sono omeomorfi allora il numero delle componenti connesse di X e di Y coincidono.*

Suggerimento: Notare che ogni omeomorfismo $f : X \to Y$ induce una biiezione tra le componente connesse di X e Y. ♣

Esercizio 14.14. *Trovare quali tra i seguenti caratteri dell'alfabeto latino sono omeomorfi tra loro:*

C, D, E, F, G, I, J, K, L, M, N, O, P, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Dimostrazione. Si vede facilmente che i seguenti caratteri sono omeomorfi tra loro.

C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z.

Tra quelli che restano abbiamo altri quattro gruppi: {D, O}, {E, F, T, Y}, {K, X} e {P}. I caratteri in ognuno dei cinque gruppi sono omeomorfi tra loro, ma caratteri di diversi gruppi non sono omeomorfi tra loro. Infatti, si vede prima che tutti caratteri sono connessi. Poi possiamo isolare le seguenti proprietà che alcuni di loro hanno:

(i) per ogni punto x il complemento $X \setminus \{x\}$ è connesso;
(ii) esiste un punto x per il quale il complemento $X \setminus \{x\}$ ha tre componenti connesse;
(iii) esiste un punto x per il quale il complemento $X \setminus \{x\}$ ha quattro componenti connesse;
(iv) esistono infiniti punti x per i quali il complemento $X \setminus \{x\}$ è connesso.

I caratteri del primo gruppo hanno le seguenti proprietà :

$\neg$ (i), $\neg$ (ii), $\neg$ (iii) e $\neg$ (iv)[4],

quelli del secondo gruppo {D, O} hanno le proprietà:

(i), $\neg$ (ii), $\neg$ (iii) e $\neg$ (iv),

quelli del terzo gruppo {E, F, T, Y}:

$\neg$ (i), (ii), $\neg$ (iii) e $\neg$ (iv);

quelli del quarto gruppo {K, X} le proprietà:

$\neg$ (i), $\neg$ (ii), (iii) e $\neg$ (iv);

quelli del quinto gruppo {P} hanno le proprietà:

$\neg$ (i), $\neg$ (ii), $\neg$ (iii) e (iv);

Poiché ognuna delle proprietà (i)-(iv) o le loro negazioni sono preservate per omeomorfismo, questo termina l' esercizio (applicare l'esercizio precedente e l' esercizio 5.9). □

Lasciamo al lettore la verifica che nessuna delle proprietà (i)-(iv) può essere omessa al fine di distinuguere i cinque gruppi di caratteri. È importante notare che i caratteri vanno considerati così come sono scritti nel testo (cioè, in formato sanserif)

Esercizio 14.15. *Verificare che la proprietà :*

(*) esistono infiniti punti x per i quali il complemento $X \setminus \{x\}$ ha due componenti connesse

non è valida solo per i caratteri del secondo gruppo $\{D, O\}$.

Diventa chiaro che il discorso può essere reso più flessibile tramite la seguente terminologia. Un punto x di uno spazio connesso X si dice *punto di taglio* (*cut point*) se lo spazio $X \setminus \{x\}$ non è connesso (in altre parole, x sconnette, o "taglia, lo spazio connesso X). Si potrebbe anche introdurre il *grado* $d(x)$ di un punto di taglio come il numero di componenti connesse di $X \setminus \{x\}$. Chiaramente $d(x) \geq 2$. Per completezza scriveremo $d(x) = 1$ se x non è un punto di taglio, ma $|X| > 1$. Ogni omeomorfismo preserva la proprietà (di un punto) di essere punto di taglio, nonchè il suo grado. In particolare, per ogni $n \geq 1$ due spazi omeomorfi devono avere stesso numero cardinale di punti di grado n.

Esercizio 14.16. *Riscrivere le proprietà (i)-(iv) e (*) nei termini di punti di taglio e del loro grado.*

Dimostrazione. Notare per esempio che tutti i punti del carattere O (e del carattere D) sono di grado 1. Il carattere P ha **c** punti di grado 1 e **c** punti di grado 2.

I caratteri K, X hanno quattro punti di grado 1, **c** punti di grado 2 e un punto di grado 4.

I caratteri E, E, T, Y hanno tre punti di grado 1, **c** punti di grado 2 e un punto di grado 3.

I caratteri C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z hanno due punti di grado 1, **c** punti di grado 2 e 0 punti di grado 3. □

Esercizio 14.17. *Calcolare i gradi dei caratteri* A, B, H, Q *e* R. *Determinare quali di questi caratteri sono due a due omeomorfi e quali appartengono alle classi di omeomorfismo dei caratteri già consderati.*

[4] cioè, la negazione di (iv).

Esercizio 14.18. *Lo stesso per le cifre* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *ed i caratteri e i simboli*
$\aleph$, $\beth$, $\gimel$, Λ, ∇, Δ, Φ, Ψ, Ξ, Γ, Σ, Ω, @ , $, %, ©, #, &, *, + .

Esercizio 14.19. *Dimostrare che l'intervall* $[0,1]$ *non é omeomorfo al quadrato* $[0,1]^2$.

Suggerimento. Usare il fatto che il quadrato non ha punti di taglio, mentre ogni punto interno di $[0,1]$ é un punto di taglio.

14.2 La quasi-componente di un punto

Definizione 14.20. *Quasi-componente* $Q(x)$ di un punto x in uno spazio topologico X è l'intersezione di tutti insiemi simultaneamente chiusi e aperti (brevemente, **chiusi-aperti**) di X che contengono x.

Ovviamente, $Q(x) \supseteq C(x)$ poichè ogni insieme chiuso-aperto contenente x contiene anche $C(x)$.

Teorema 14.21. (Shura-Bura) *In uno spazio compatto e* T_2 *le quasi componenti coincidono con le componenti connesse.*

Dimostrazione. Sia Q_x la quasi componente di $x \in X$. Vogliamo vedere che Q_x coincide con la componente connessa C_x di x. Infatti, basta vedre che Q_x è connessa. Supponiamo che esistono insiemi chiusi-aperti e disgiunti $A, B \subseteq Q_x$ tali che $Q_x = A \cup B$. Poichè A e B sono insiemi chiusi e disgiunti di X, per la normalità di X troviamo due aperti disgiunti U, V tali che $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $x \in A$. Quindi $Q_x \subseteq U \cup V$. Essendo Q_x l'intersezione di tutti intorni di x che sono chiusi ed aperti, per il 11.3 troveremo un numero finito di insiemi chiusi-aperti $F_1, \ldots, F_n$ con $Q_x \subseteq F = F_1 \cap \ldots \cap F_n \subseteq U \cup V$. Adesso F è chiuso-aperto, quindi

$$\overline{U \cap F} \subseteq \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F.$$

Quindi $U \cap F$ un insieme chiuso-aperto che contiene x, quindi $Q_x \subseteq U \cap F$. Pertanto $B \subseteq Q_x \subseteq U \cap F \subseteq U$. Di conseguenza $B \subseteq U \cap V = \emptyset$. Quindi l'unico insieme chiuso-aperto di Q_x che contiene x è Q_x. Perciò Q_x è connesso. □

In generale la quasi componente $Q(x)$ di un punto x può essere molto più grande della componente connessa $C(x)$. Infatti, se consideriamo la quasi componente Q_1 del punto x nello spazio $Q(x)$, essa può risultare propriamente contenuta in $Q(x)$. Si ha sempre $C(x) \subseteq Q_1$. Analogamente si potrebbe considerare la quasi componente Q_2 del punto x relativa allo spazio Q_1. Anch'essa potrebbe essere propriamente contenuta in Q_1 e così via. Con induzione trasfinita si può definire $Q_{\alpha+1}$ come la quasi componente del punto x relativa allo spazio Q_α (se invece β è un ordinale limite si definisce $Q_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} Q_\alpha$). Per ogni spazio topologico X questa catena si interrompe ad un certo passo β, allora $Q_\beta = Q_{\beta+1}$ coincide con la componente connessa $C(x)$. D'altra parte, per ogni ordinale β esiste uno spazio topologico X_β (addirttura un gruppo topologico pseudocompatto, cf. [D]) dove la catena non si stabilizza prima del passo β per ogni punto $x \in X$.

14.3 Spazi totalmente sconnessi

Definizione 14.22. Uno spazio X è *totalmente sconnesso* se ogni componente connessa di X consiste di un solo punto.

Esercizio 14.23. *Dimostrare che :*
(a) ogni sottospazio di uno spazio totalmente sconnesso è totalmente sconnesso;
(b) prodotto di spazi totalmente sconnessi è spazio totalmente sconnesso.

Lemma 14.24. *Ogni spazio connesso e* $T_{3.5}$ *che abbia almeno due punti ha cardinalità* $\geq c$.

Dimostrazione. Supponiamo che X possieda due punti distinti x e y. Sia $f : X \to [0,1]$ una funzione continua con $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Ora $f(X)$ è un sottoinsieme connesso di $[0,1]$ contenente i punti 0 e 1. Allora $f(X) = [0,1]$, e di conseguenza $|X| \geq |f(X)| = c$. □

Esercizio 14.25. *Ogni* T_3 *spazio numerabile è totalmente sconnesso.*

Suggerimento. Notare che per il Corollario 6.33 ogni T_3 spazio numerabile é $T_{3.5}$ (addirittura, normale). ♣

Esercizio 14.26. $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *è totalmente sconnesso anche se non è numerabile (addirittura,* $|I| = c$*).*

Esercizio 14.27. *Dare esempi di spazi totalmente sconnessi di cardinalità arbitrariamente grande.*

Suggerimento. Si applichi 14.23. ♣

Vediamo addesso un T_2-spazio numerabile e connesso.

Esercizio 14.28. (Bing) *Lo spazio di Bing costruito nell'Esempio 6.18 é numerabile e connesso.*

Dimostrazione. Per verificare che X è connesso consideriamo un insieme non vuoto O che sia chiuso ed aperto. Allora si applica 3 dall'Esempio 6.18 con $V = U$. Quindi O è denso in X. Ora di nuovo sfruttiamo il fatto che O è chiuso in X per concludere che $O = X$. □

15 La spazio delle componenente connesse ed altri quozienti funtoriali

Adesso vedremo che le componenente connesse di uno spazio topologico formano uno spazio totalmente sconnesso rispetto alla topologia quoziente.

Teorema 15.1. *Sia X uno spazio topologico e sia $\sim$ la relazione di equivalenza su X definito della partizione di X in componente connesse $X = \bigcup_x C_x$. Allora:*

(1) il quoziente $X/\!\sim$ è totalmente sconnesso;

(2) per ogni applicazione continua $f : X \to Z$, dove Z è uno spazio totalmente sconnessso, esiste un' unica applicazione continua $f' : X/\!\sim \to Z$ tale che $f = f' \circ \pi$.

Dimostrazione. (1) Sia F un insieme chiuso con più di un punto di $X/\sim$ e sia $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione canonica. Allora $\pi^{-1}(F)$ è chiuso in X che non può essere connesso dato che la sua immagine in $X/\!\sim$ ha più di un punto e quindi connetterebbe due punti x e y di X con componenti connesse diversi. Quindi esiste una partizione $A \cup B$ di $\pi^{-1}(F)$ con A e B chiusi e disgiunti. Poiché ogni componente C_x è connessa, essa è interamente contenuta o in A o in B. Quindi sia A che B sono unioni di componenti connesse, pertanto sono insiemi saturati per la relazione $\sim$. Questo vuol dire che $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ e $B = \pi^{-1}(\pi(B))$. Quindi sia $\pi(A)$ che $\pi(B)$ sono chiusi in $X/\!\sim$ e sono disgiunti. Questo dimostra che $F = \pi(A) \cup \pi(B)$ è una partizione di F e quindi F non è connesso. Pertanto $X/\!\sim$ è totalmente sconnesso.
(2) Poiché ogni immagine $f(C_x)$ è connessa mentre Z è totalmente sconnesso, concludiamo che $|f(C_x)| = 1$. Quindi esiste un' applicazione $f' : X/\!\sim \to Z$ con $f = f' \circ \pi$. La continuità di f' segue dal lemma 5.25. □

Ci sono costruzioni analoghe che portano il quoziente in una classe desiderata di spazi topologici.

Esempio 15.2. Sia X uno spazio topologico.

(a) Poniamo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se e solo se $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Si verifica subito che questa è una relazione di equivalenza su X. Il quoziente $X/\!\sim$ è uno spazio T_0. In più, per ogni applicazione continua $f : X \to Z$, dove Z è uno spazio T_0, esiste un'unica applicazione continua $f' : X/\!\sim \to Z$ tale che $f = f' \circ \pi$.

(b) Poniamo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se e solo se $Q(x) = Q(y)$. Poichè $X = \bigcup_z Q(z)$ è una partizione di X $\sim$ è una relazione di equivalenza su X. Il quoziente $X/\!\sim$ è uno spazio con quasi-componente triviali (cioè, se $a \neq b$ in $X/\!\sim$ esiste un chiuso-aperto in $X/\sim$ che li separa). In più, per ogni applicazione continua $f : X \to Z$, dove Z è uno spazio con quasi-componenti triviali, esiste un'unica applicazione continua $f' : X/\!\sim \to Z$ tale che $f = f' \circ \pi$.

(c) Poniamo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se e solo se per ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ si ha $f(x) = f(y)$. Questa è una relazione di equivalenza su X. Il quoziente $X/\!\sim$ ha la proprietà che ogni coppia di punti distinti $a \neq b$ se separano tramite una funzione contiua $f : X/\!\sim \to \mathbb{R}$ (cioè, $(f(a) \neq f(b))$. Spazi con questa proprietà sono detti *funzionalmente di Hausdorff*. Per ogni applicazione continua $f : X \to Z$, dove Z è uno spazio funzionalmente di Hausdorff, esiste un'unica applicazione continua $f' : X/\!\sim \to Z$ tale che $f = f' \circ \pi$.

(d) Poniamo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se e solo se per ogni funzione continua $f : X \to \{0, 1\}$ si ha $f(x) = f(y)$. Questa è una relazione di equivalenza su X che coincide con la relazione di equivalenza considerata al punto (b). Quindi, il quoziente $X/\!\sim$ é lo spazio delle quasi-componenti come in (b).

Esercizio 15.3. *Sia X uno spazio topologico. Per ogni funzione continua $f : [0, 1] \to X$, diremo che* esiste un arco in X da $x = f(0)$ a $y = f(1)$, *mentre l'insieme $f([0, 1])$ si dirà un* arco*; si dice che X é* connesso per archi *se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un arco in X da x a y.*

(a) Sia Y il grafico della funzione $f : (0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$ definita con $f(x) = \sin(1/x)$, e $X = \{0\} \times [-1, 1] \cup Y$, munito con la topologia relativa del piano. Dimostrare che X é connesso, ma non é connesso per archi.

(b) Poniamo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se e solo se esiste un arco in X da x a y. Dimostrare che $\sim$ é una relazione di equivalenza. (Le classi di equivalenza di $\sim$ si chiamano componenti di connessione per archi *di X.) Determinare le componenti di connessione per archi dello spazio X del punto (a).*

(c) Per lo spazio X del punto (a) dimostrare che lo spazio quoziente $X/\!\sim$ è conneso per archi.

(d) Dimostrare che le componenti di connessione per archi di uno spazio T_1 numerabile X sono singoletti, cioé X é senza archi non-banali.

(e) Dare esempio di uno spazio connensso e T_2 senza archi non-banali.

Suggerimenti. (a) Per vedere che X é connesso basta notare che Y é connesso e denso in X. Sia $g : [0,1] \to X$ una funzione continua con $g(0) = 0$. Supponiamo che esiste $u > 0$ tale che $g(u) \notin I = \{0\} \times [-1,1]$. Allora $U = \{t \in [0,1] : g(t) \notin I\} \neq \emptyset$ é aperto in $[0,1]$. Scriviamo $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, allora per $t \in U$ si ha $g_1(t) > 0$ e $g_2(t) = f(g_1(t))$. Sia $a = \sup\{t : g_1(t) = 0\}$. Allora anche $g_1(a) = 0$ per la continuità di g_1. Per la scelta di a esiste una successione $u_n \to a$ con $u_n \in U$. Questo darebbe $g_1(u_n) \to g_1(a) = 0$. Sfruttando il fatto che $[a,1]$ connesso e passando ad un'altra successione, se necessario, possiamo assumere che $g(u_{2n}) = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ e $g(u_{2n}) = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ per tutti $n \in \mathbb{N}$, e quindi $f(g(u_{2n})) = 1$, mentre $f(g(u_{2n+1})) = -1$, per tutti $n \in \mathbb{N}$. Poiché $g(u_n) = (g_1(u_n), f(g_1(u_n)))$ dovrebbe convegere a $g(a)$ per la continuità di g e ovviamente $g_2(u_n) = f(g_1(u_n))$ non può convergere quando $g_1(u_n) \to 0$, si arriva ad assurdo. Questo dimostra che $U = \emptyset$ e quindi $g([0,1]) \subseteq I$. Quindi, i punti di Y non possono essere raggiunti da un arco che parte da un punto in I.

(c) Basta notare che $X/\!\sim$ è omeomorfo allo spazio di Sierpiǹski $\{0,1\}$.

(d) Per vedere che ogni funzione continua $f : [0,1] \to X$ é costante si sfrutti il fatto che X é numerabile e si applichi il Teorema di Sierpiǹski (14.11) alla partizione $[0,1] = \bigcup_{x \in X} f(x)^{-1}$.

(e) Si consideri lo spazio di Bing X costruito nell'Esempio 6.18. Ogni arco C di X deve essere uno spazio compatto e connesso. Poiché X è T_2, C deve essere uno spazio di Tichonov. Quindi, per il Lemma 14.24 C deve essere un singoletto. (Una soluzione alternativa: applicare il punto (d) allo stesso spazio.)

Questo tipo di costruzioni, anche se meno esplicità in generale, si potrebbe fare per ogni classe di spazi $\mathbf{A}$ chiusa per il passaggio a prodotti e sottospazi (si verifichi che la classe degli spazi funzionalmente di Hausdorff e la classe degli spazi con quasi-componenti triviali hanno entrambe questa proprietà). Nei due esempi sopra la costruzione era eseguita esplicitamente, ma anche in generale si ha il seguente:

Teorema 15.4. *Sia $\mathbf{A}$ una classe di spazi topologici chiusa per il passaggio a prodotti e sottospazi. Allora ogni spazio topologico ammette una applicazione continua e suriettiva $r_X : X \to rX$, dove $rX \in \mathbf{A}$ e per ogni applicazione continua $f : X \to Z$, dove Z è uno spazio in $\mathbf{A}$, esiste un' unica applicazione continua $f' : rX \to Z$ tale che $f = f' \circ \pi$.*

Dimostrazione. Sia $f_i : X \to A_i$, $i \in I$, l' insieme di tutte le applicazioni continue e suriettive con $A_i \in \mathbf{A}$. (Nella scelta dell'insieme degli indici I facciamo attenzione a "non ripetere la stessa applicazione per essere sicuri che basti un insieme I di indici. Questo si puo fare perché ogni applicazione suriettiva f con dominio X ha codominio Z di cardinalità limitata da quella di X, quindi anche l'insieme di tutte le possibili topologie su Z che rendono f continua è limitato da un numero cardinale che dipende solamente da $|X|$). Sia $g : X \to \prod_{i \in I} A_i$ l' applicazione diagonale determinata dalla famiglia $\{f_i\}$ e sia rX l'immagine $f(X)$ munita della topologia relativa del prodotto. Allora la co-restrizione $r_X : X \to rX$ di f ha le proprietà desiderate. Infatti, se $f : X \to Z$ è un' applicazione continua suriettiva e $Z \in \mathbf{A}$, allora esiste $i \in I$ tale che f coincida con f_i, e quindi $Z = A_i$ (a meno di omeomorfismo). Quindi possiamo prendere come $f' : rX \to Z = X_i$ la restrizione della proiezione $p_i : \prod_i A_i \to A_i$ su rX. Nel caso in cui $f : X \to Z$ non sia suriettiva consideriamo l' applicazione $f : X \to f(Z)$ alla quale applichiamo l'argomento precedente. $\square$

Lasciamo al lettore la dimostrazione (del tutto simile) del seguente teorema:

Teorema 15.5. *Sia $\mathbf{A}$ una classe di spazi topologici T_2 chiusa per il passaggio a prodotti e sottospazi chiusi. Allora ogni spazio topologico ammette una applicazione continua con immagine densa $r_X : X \to rX$, dove $rX \in \mathbf{A}$ e per ogni applicazione continua $f : X \to Z$, dove Z è uno spazio in $\mathbf{A}$, esiste un'unica applicazione continua $f' : X/\!\sim \to Z$ tale che $f = f' \circ \pi$.*

Nel caso in cui $\mathbf{A}$ sia la classe degli spazi compatti di Hausdorff il teorema precedente fornisce la compattificazione di Stone-Čech $\beta X = rX$.

16 Dimensione

16.1 Spazi zero-dimensionali

Definizione 16.1. Uno spazio X è *zero-dimensionale* se X ha una base di aperti che sono anche chiusi.

Esercizio 16.2. *Dimostrare che:*
(a) sottospazio di uno spazio zero-dimensionale è zero-dimensionale;
(b) prodotto di spazi zero-dimensionali è spazio zero-dimensionale;
(c) uno spazio topologico T_0 zero-dimensionale è spazio di Tichonov.

Esercizio 16.3. *Ogni T_1-spazio zero-dimensionale è totalmente sconnesso.*

Dimostrazione. Sia C un insieme connesso di X e $x \in C$. Sia O_a un intorno di x che sia chiuso e aperto. Allora $C \subseteq O_a$. Poichè l'intersezione di tutti intorni O_a coincide con $\{x\}$, concludiamo che $C = \{x\}$. $\square$

Vedremo che in presenza di compattezza locale l' implicazione "zero-dimensionale $\Rightarrow$ "totalmente sconnesso si inverte (cf. 16.6).

Lemma 16.4. *Sia X uno spazio regolare di cui ogni punto ha un intorno zero-dimensionale. Allora anche X è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia U un intorno aperto di x. Allora esiste un intorno aperto V di x di cui chiusura $K = \overline{V}$ è zero-dimensionale e contenuta in U. Sia $O \subseteq V$ un intorno di x chiuso ed aperto come sottospazio di K. Poichè K è chiuso in X O è chiuso in X. D'altra parte esiste un aperto A di X tale che $O = A \cap K$. Poichè $O \subseteq V$ abbiamo

$$O = O \cap V = A \cap K \cap V = A \cap V,$$

quindi O è aperto anche in X. □

Teorema 16.5. *Uno spazio compatto, T_2 e totalmente sconnesso è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto, T_2 e totalmente sconnesso. Per il teorema di Shura-Bura le quasi componenti sono triviali. Quindi, preso $x \in X$ abbiamo $Q(x) = \{x\}$. Sia adesso U un intorno aperto di x. Poichè $Q(x) \subseteq U$ è intersezione di insiemi chiusi-aperti, per il 11.3 una sottofamiglia finita di essi, $O_1, \ldots, O_n$ ha la proprietà $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k \subseteq U$. Poichè O resta chiuso-aperto, abbiamo dimostrato che X è zero-dimensionale. □

Ora dimostriamo che la compattezza locale rende gli spazi totalmente sconnessi anche zero-dimensionali.

Corollario 16.6. (Vedenissov) *Uno spazio localmente compatto e totalmente sconnesso è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia U un intorno aperto di x con chiusura $K = \overline{U}$ compatta. Poichè K è totalmente sconnesesso, il teorema precedente implica che K è zero-dimensionale. Adesso per 16.4 anche X è zero-dimensionale. □

Esercizio 16.7. *Lo spazio $\mathbb{Q}$ è zero-dimensionale (e quindi totalmente sconnesso). Dimostrare lo stesso per $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (i numeri irrazionali) e $\mathbb{Q}^n$ per $n \in \mathbb{N}$. È $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ zero-dimensionale per $n > 1$?*

Questo fatto non si estende nel caso infinito: Paul Erdös nel 1940 ha dimostrato che il sottospazio dello spazio di Hilbert ℓ_2 costituito dai punti con coordinate razionali non è zero-dimensionale.

Con riferimento all'Esercizio 14.25 si potrebbe dimostrare che ogni $T_{3.5}$ spazio numerabile è addirittura zero-dimensionale (cf. [E]).

Nel teorema che segue lo spazio $\{0, 1\}$ ha la topologia discreta.

Teorema 16.8. *Sia X uno spazio topologico T_0 zero-dimensionale avente una base di cardinalità α. Allora X è omeomorfo ad un sottospazio del prodotto $\{0, 1\}^{\alpha}$.*

Dimostrazione. Seguire la dimostrazione del teorema di Tichonov. □

Si noti come le due topologie diverse su $\{0, 1\}$, quella discreta e quella di Sierpìnski, danno risultati molto diversi (cf. Teorema 6.3).

16.2 Oltre la dimensione zero

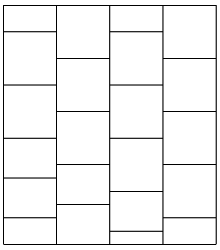
È possibile definire una funzione dim X che associa ad uno spazio topologico X un numero naturale o il simbolo ∞, detta *dimensione* dello spazio X. La dimensione si può considerare come funzione che "misura la connessione dello spazio. Infatti, abbiamo visto che gli spazi zero-dimensionali sono totalmente sconnessi, cioè hanno il più basso grado di connessione. Gli spazi di dimensione 1 che usualmente incontriamo, come $\mathbb{R}$ o le curve nel piano o in $\mathbb{R}^n$, si possono "spezzare tramite un insieme finito di punti, cioè esiste un insieme finito F il cui complemento non è connesso. Andando avanti, osserviamo che possiamo spezzare un quadrato in $\mathbb{R}^2$ con una linea (1-dimensionale), ma non con un insieme zero-dimensionale. L' idea di definire la dimensione per induzione appartiene a Poincaré ed è stata sviluppata da Urysohn e Menger negli anni '20. La teoria della dimensione è uno dei rami della topologia, dove la definizione della dimensione è ben formalizzata e studiata. Nel seguito diamo una raccolta di definizioni e risultati per rendere l'idea di che cosa sia la dimensione. Per uno studio approffondito della dimensione indirizziamo il lettore ai testi specializzati in teoria della dimensione [E] (per la dimensione dei gruppi topologici pseudocompatti vedi anche [D]).

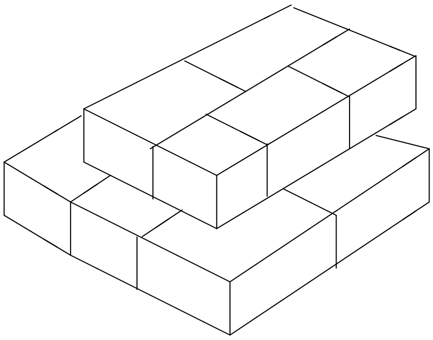
16.2.1 La dimensione induttiva

Una delle vie per introdurre la dimensione è per induzione. La funzione così definita si denota con ind X, ponendo ind $\emptyset = -1$. Il caso di dimensione 0 è stato discusso con rigore nel paragrafo precedente. Allora, per $n \geq 0$, dopo aver definito gli spazi di dimensione $\leq n - 1$, si dice che uno spazio X ha *dimensione al più n*, se X ha una base di aperti U tali che la frontiera di U ha dimensione al più $n - 1$. Abbiamo così definito quando vale ind $X \leq n$. Per uno spazio X diremo che ind $X = n$ se $\dim X \leq n$ e non vale $\dim X \leq n - 1$. Se non esiste alcun n con ind $X \leq n$ si pone ind $X = \infty$. Ora si può vedere chiaramente che anche la definizione di dimensione zero data in 16.1 rientra in questo schema. La dimensione così definita ha delle proprietà molto naturali; lasciamo al lettore il compito di verificare che $\mathbb{R}$ e gli spazi (caratteri) considerati nell' esempio 14.14 risultano avere dimensione 1. La dimensone induttiva fu introdotta da Urysohn e Menger.

16.2.2 La dimensione di Lebesgue

Ordine (o *molteplicità*) di un ricoprimento localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di uno spazio topologico $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, denotato con $ord(\mathcal{U})$, è il maggior numero k tale che esistono $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k} \in \mathcal{U}$ con $\bigcap_{j=1}^{k} U_{i_j} \neq \emptyset$. Per uno spazio X scriveremo $\dim X \leq n$ se ogni ricoprimento aperto localmente finito di X ammette un raffinamento aperto di ordine $\leq n + 1$. Allo stesso risultato si arriva se si usano insiemi chiusi invece di aperti.





In questi disegni si mostrano ricoprimenti chiusi di ordine 3 e 4 rispettivamente del quadrato (di dimensione 2) e dello cubo (tre dimensionale, il cubo stesso non è stato disegnato per non complicare inutilmente il disegno). Sembra abbastanza "chiaro che in entrambi casi si trovano dei ricoprimenti di ordine $n + 1$ (3 e 4 rispettivamente) costituiti di insiemi chiusi di diametro sufficientemente piccolo. Questo dà un idea delle disuguaglianze $\dim[0,1]^2 \leq 2$, $\dim[0,1]^3 \leq 3$ e in generale $\dim[0,1]^n \leq n$. Non è molto difficile dimostrare che per ogni insieme compatto K in $\mathbb{R}^n$ vale $\dim K \leq n$. La disuguaglianza $\dim[0,1]^n \geq n$, dovuta a Lebesgue, è più difficile a dimostrare. Nel seguito diamo un idea della dimostrazione nel caso di $n = 2$.

Le dimensioni ind e dim coincidono per spazi metrici separabili, per questo da ora in poi scriveremo solamente $\dim X$ per uno spazio metrico separabile.

16.3 La dimensione delle varietà topolgiche e poliedri

Brouwer ha usato la dimensione per dimostrare che $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ non sono omeomorfi per n e m distinti. Il risultato più preciso, $\dim \mathbb{R}^n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, è stato dimostrato da Lebesgue.

16.3.1 Dimensione due

Sia $T = [a_0, a_1, a_2]$ un triangolo in $\mathbb{R}^2$, ossia l' insieme chiuso dei punti di $\mathbb{R}^2$ racchiusi nel triangolo determinato dai tre punti non collineari a_0, a_1, a_2. È ben noto che ogni punto $x \in T$ è determinato univocamente dalle sue coordinate baricentriche μ_0, μ_1, μ_2 che soddisfano $\mu_i \geq 0$, $x = \sum_{i=0}^{2} \mu_i a_i$ e $\sum_{i=0}^{2} \mu_i = 1$. Una *triangolazione* di T è una presentazione $T = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ dove S_j sono triangoli tali che ogni intersezione $S_j \cap S_k$ è o vuota, o un vertice comune o un lato comune di S_j e S_k. Sia V l'insieme dei vertici della triangolazione $\{S_j\}$. Una coloramento $\chi : V \to \{a_0, a_1, a_2\}$ di V è detto *regolare* se per ogni vertice $v \in V$ che appartiene ad un lato $[a_i, a_j]$ di T viene colorato in uno dei colori a_i o a_j. In particolare, ad a_i si associa il colore a_i.

Lemma 16.9. (Primo lemma di Sperner) *Sia $T = [a_0, a_1, a_2]$ un triangolo in $\mathbb{R}^2$, sia $T = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ una triangolazione di T e sia $\chi : V \to \{a_0, a_1, a_2\}$ un coloramento regolare. Allora esiste un triangolo S_j colorato in tre colori diversi.*

Tramite questo lemma si dimostra il lemma successivo

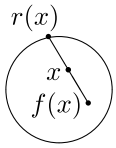
Lemma 16.10. (Secondo lemma di Sperner) *Sia $T = [a_0, a_1, a_2]$ un triangolo in $\mathbb{R}^2$, sia $T = \bigcup_{j=0}^{2} A_j$ un ricoprimento chiuso tale che sempre $a_i \in A_i$ e $[a_i, a_j] \subseteq A_i \cup A_j$. Allora $A_0 \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.*

Come corollario di questo lemma e un terzo lemma di Sperner si dimostra che $\dim[0,1]^2 \geq 2$. Per una via alternativa, basata sul teorema del punto fisso, vedi anche la fine di questo capitolo.

Corollario 16.11. (Teorema di Brauwer del punto fisso) *Sia $T = [a_0, a_1, a_2]$ un triangolo in $\mathbb{R}^2$. Allora ogni applicazione continua $f : T \to T$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in T$ denotiamo con $\mu_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, le sue coordinate baricentriche in T. Sia $A_i = \{x \in T : \mu_i(f(x)) \leq \mu_i(x)\}$, $i = 0, 1, 2$. Chiaramente A_i è chiuso e $T = \bigcup_{j=0}^{2} A_j$. Questo ricoprimento soddisfa le ipotesi del secondo lemma di Sperner, intanto esiste un punto $x_0 \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$. Allora $\mu_i(f(x)) = \mu_i(x)$ per tutti i, pertanto $f(x) = x$. $\square$

Questa dimostrazione del teorema di Brauwer del punto fisso funziona anche per $\mathbb{R}^n$, ma richiede la forma generale dei lemmi di Sperner per n arbitrario. È facile invece dimostrare l'equivalenza del teorema del punto fisso e della seguente affermazione: *non esiste alcuna applicazione continua* $f : D_n \to Fr\ D_n$ *tale che* $f(x) = x$ *per tutti gli* $x \in Fr\ D_n$, dove $D_n = \overline{B_1(0)}$ è il disco chiuso di raggio 1 e centro 0 in $\mathbb{R}^n$. In altre parole Fr D_n, che è la sfera, non è retratto di D_n (un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice *retratto* di X se esiste una applicazione continua $f : X \to A$ tale che $f(x) = x$ per tutti $x \in A$; un' applicazione f con questa proprietà si chiama *retrazione*). È facile trovare una retrazione $D_n \setminus \{0\} \to$ Fr D_n. Infatti, se $f : D_n \to D_n$ è un applicazione senza punti fissi, allora definiamo una retrazione $r : D_n \to FrD_n$ nel seguente modo: per $x \in D_n$ il punto $f(x)$ non coincide mai con x quindi è ben determinato un (unico) punto $r(x)$ su FrD_n tale che x appartiene al segmento $[r(x), f(x)]$. Viceversa, se $r : D_n \to FrD_n$ è una retrazione e se $\sigma : D_n$ è la simmetria relativa al punto origine 0, la composizione $\sigma \circ r : D_n \to D_n$ non ha punti fissi.



16.3.2 Le varietà

Uno spazio connesso di base numerabile V si dice *varietà topolgica* se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale he ogni punto di X ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Poiché V risulta metrizzabile e separabile, le due funzioni dim V e ind V coincidono con n per una varietà topologica.

Più in generale, si considerano spazi P "composti di un numero finito di pezzi A_i, ciacuno dei quali è omeomeorfo ad un disco chiuso D_n, ma adesso n può variare al variare del chiuso A_i. Tali spazi si dicono *poliedri.* Un poliedro si definisce in modo rigoroso a partire da uno spazio euclideo $\mathbb{R}^m$: ciascuno degli A_i sarà ora un *simplesso simpliciale* in $\mathbb{R}^m$ (cioè, l'inviluppo convesso di un insieme di vertici $v_0, \ldots, v_n$, come i triangoli nel caso $n = 2$ considerato sopra, per $n = 3$ vengono tetraedri ecc.). Si richiede anche che le intersezioni $A_i \cap A_j$ siano vuote oppure siano un verice comune, o un lato comune, o una faccia comune, ecc. per i due simplessi. Si dimostra, in analogia con il caso $n = 2$ considerato sopra, che un simplesso $[v_0, \ldots, v_n]$ ha dimensione n, e quindi la dimensione del poliedro P coincide con la maggiore delle dimensioni dei suoi simplessi A_i. Per esempio, i caratteri considerati in 14.14 sono poliedri di dimensione 1. Solamente i caratteri D e O sono delle varietà topologiche (di dimensione 1).

16.4 Alcune proprietà importanti della dimensione

Si può dimostare che $\dim \ell_2 = \infty$ mentre gli spazi metrici separabili di dimensione finita si trovano negli spazi euclidei. Più precisamente:

Teorema 16.12. (Nöbeling–Pontryagin) *Ogni spazio metrico separabile di dimensione n è omeomorfo ad un sottospazio del cubo* $[0, 1]^{2n+1}$.

Per vedere che questo limite è preciso basta notare che un grafo non-planare ha dimensione 1 e non si può immergere nel quadrato $[0, 1]^2$. L'immersione in $[0, 1]^{2n+1}$ non è un' isometria. Infatti, lo spazio metrico X con quattro punti $\{x, a_1, a_2, a_3\}$ con distanze $d(a_i, a_j) = 1$ per $i \neq j$ e $d(x, a_i) = \frac{1}{2}$ non ammette isometrie in ℓ_2.

Per finire, aggiungeremo solamente che la dimensione soddisfa anche le seguenti condizioni naturali:

Teorema 16.13. (Urysohn-Menger)

- *Se* $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ *e tutti* X_j *sono sottospazi chiusi di* X *con* $\dim X_j \leq n$ *allora anche* $\dim X \leq n$*;*
- $\dim X \leq n$ *se e solo se* $X = \bigcup_{j=0}^{n} X_j$ *e* $\dim X_j = 0$.

La curva di Peano è un'applicazione continua e suriettiva $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Quindi, le applicazione continue suriettive possono far crescere la dimensione.

Il seguente teorema permette di abbassare la dimensione nel teorema di Nöbeling–Pontryagin al prezzo di indebolire la richiesta di omeomorfismo.

Teorema 16.14. *Sia X uno spazio metrico compatto. Allora* dim $\leq n$ *se e solo se esiste un' applicazione continua* $f : X \to [0, 1]^n$ *tale che* $f^{-1}(x)$ *è zero-dimensionale per ogni* $x \in [0, 1]^n$.

Per uno spazio metrico separabile X si può dimostrare che $\dim X \leq n$ *se e solo se per ogni sottospazio chiuso A di X e per ogni funzione continua $f : A \to S^n$ nella sfera n-dimensionale esiste un estensione continua $\overline{f} : X \to S^n$ di f* (teorema di Alexandrov). Questo approccio porta verso la teoria della dimensione omologica. Applicando questo teorema alla frontiera A $(= S^1)$ del disco D_2 e all'identità $f : A \to S^1$ si vede come $\dim D_2 > 1$ (infatti, f non si può estendere a tutto D_2 perchè questo darebbe una retrazione di D_2 sulla sua frontiera).

17 La topologia di Zariski di un anello commutativo

Sia A un anello commutativo con identità. Per il teorema di Krull esiste almeno un ideale massimale (e quindi primo) di A. Denoteremo con $X = \operatorname{Spec} A$ l'insieme degli ideali primi di A (si noti che $A = (1)$ non si considera un ideale primo). Quindi, sempre $\operatorname{Spec} A \neq \emptyset$. Inoltre, A é un campo se e solo se $|\operatorname{Spec} A| = 1$.

Consideriamo gli insiemi del tipo $O_f = \{\mathfrak{p} \in X : f \notin \mathfrak{p}\}$, $f \in A$. Per un ideale $\mathfrak{a}$ di A si pone $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in X : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$.

Un elemento $a \in A$ si dice *nilpotente* se $A^n = 0$ per qualche $n > 0$. Denoteremo con $\mathcal{N}(A)$ l'insieme degli elementi nilpotenti di A e lo chiameremo *radicale nilpotente* di A.

Teorema 17.1. *Sia A un anello commutativo con identità. Allora:*

(i) *$\mathcal{N}(A)$ è un ideale di A che coincide con l'intersezione di tutti gli ideali primi di A.*

(ii) *Sia $f \in A$. Allora $O_f = \emptyset$ se e solo se $f \in \mathcal{N}(A)$, mentre $O_f = X$ se e solo se $f \in \mathcal{U}(A)$ (i.e., f è invertibile).*

(iii) *Per $f, g \in A$ $O_f \cap O_g = O_{fg}$ e $O_{f+g} \subseteq O_f \cup O_g$.*

(iv) *Se $f \in A$ appartiene all'ideale generato dalla famiglia di elementi $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$, allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tali che $O_f \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{f_{\alpha_]}}$.*

(v) *Se l'ideale $\mathfrak{a}$ di A è generato dalla famiglia di elementi $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$, allora $\bigcup_{\alpha \in I} O_{f_\alpha} = X \setminus V(\mathfrak{a})$.*

(vi) *La famiglia $\mathcal{B} = \{O_f\}_{f \in A}$ forma base di una topologia su X, detta* topologia di Zariski*.*

(vii) *Siano $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ due ideali di A. Allora*

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \text{ e } V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}). \tag{6}$$

(viii) *La famiglia degli insiemi $V(\mathfrak{a})$, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale arbitrario di A, concide con la famiglia degli insiemi chiusi della topologia di Zariski di X.*

(ix) *per ogni punto $\mathfrak{p} \in X$ la chiusura del singoletto $\{\mathfrak{p}\}$ in* $\operatorname{Spec} A$ *coincide con $V(\mathfrak{p})$.*

(i) La dimostrazione di questo fatto é data nel caso generale nella Proposizione 17.9

(ii) segue da (i).

(iii) Se $\mathfrak{p}$ é un ideale primo di A, allora $\mathfrak{p} \not\ni fg$ se e solo se $\mathfrak{p} \not\ni f$ e $\mathfrak{p} \not\ni g$. Per dimostrare l'inclusione $O_{f+g} \subseteq O_f \cup O_g$ basta notare che se $\mathfrak{p}$ é un ideale primo di A con $\mathfrak{p} \not\ni f + g$, allora non é possibile avere $f \in \mathfrak{p}$ e $g \in \mathfrak{p}$.

(iv) Segue da (iii).

(v) Basta vedere che coincidono i complementi.

(vi) $X = O_1$, per $f, g \in A$ abbiamo $O_f \cap O_g = O_{fg}$. Questo dimostra che $\mathcal{B}$ é una base di topologia su X.

(vii) La prima eguaglianza in (6) segue facilmente dalla definizione di ideale primo. La seconda vale per famiglie arbitrarie di ideali $\{\mathfrak{a}_i\}$ e non sfrutta il fatto che i membri della famiglia $V(-)$ sono deali *primi*.

(viii) segue da (v).

(ix) Essendo chiuso, $V(\mathfrak{p})$ ovviamente contiene la chiusura del singoletto $\{\mathfrak{p}\}$ poiche $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p})$. D'altra parte, se un chiuso $V(\mathfrak{a})$ contiene $\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, e quindi $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{a})$. Essendo il più piccolo chiuso che contiene $\mathfrak{p}$, $V(\mathfrak{p})$ deve coincidere con la chiusura del singoletto $\{\mathfrak{p}\}$.

Esercizio 17.2. *Sia K un campo, $n \in \mathbb{N}$ e $A = K^n$. Dimostrare che* $\operatorname{Spec}A$ *è discreto e* $|\operatorname{Spec}A| = n$.

Esercizio 17.3. *Descrivere* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Esercizio 17.4. *Sia K un campo e $A = K[x]$. Descrivere* $\operatorname{Spec}A$.

Esercizio 17.5. *Descrivere* $\operatorname{Spec}A$ *per un dominio di ideali principali A.*

Esercizio 17.6. *Descrivere* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]$.

Teorema 17.7. *Sia A un anello commutativo. Dimostrare che lo spazio* $\operatorname{Spec}A$ *è compatto e T_0.*

Dimostrazione. Prendere un ricoprimento $X = \bigcup_{\alpha \in I} O_{f_\alpha}$. Dalla proprietà (v) la famiglia $\{f_\alpha\}$ genera l'ideale (1), quindi una parte finita $\{f_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$ genera l'ideale (1) lo stesso. Allora $X = \bigcup_{k=1}^n O_{f_{\alpha_k}}$. □

Con un argomento simile, che usa la proprità (iv) si dimostra che anche tutti gli aperti O_f sono compatti.

Proposizione 17.8. *Sia A un anello commutativo e $f \in A$. Allora O_f é compatto.*

Dimostrazione. Sia $O_f = \bigcup_{\alpha \in I} O_{f_\alpha}$ un ricoprimenti aperto di O_f. Allora passando ai complementi abbiamo $V((f)) = X \setminus O_f = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus O_{f_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} V((f_\alpha)) = V(\mathfrak{a})$, dove $\mathfrak{a}$ é l'ideale generato dalla famiglia $\{f_\alpha\}_{i \in I}$. Questo implica $f \in rad(\mathfrak{a})$ e quindi $f^n = \sum_{k=1}^{n} c_k f_{\alpha_k}$. Per (iii) del Teorema 17.1

$$O_f = O_{f^n} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{f_{\alpha_k}}.$$

□

Proposizione 17.9. *Sia A un anello commutativo. Dimostrare che:*

(a) per ogni ideale I di A l'insieme $rad(I) = \{a \in A : (\exists n \in \mathbb{N}) a^n \in I\}$ (detto radicale di *I) é un ideale di A che coincide con l'intersezione di tutti ideale primi di A che contengono I;*

(b) se $V(I)$ é un chiuso arbitrario, allora $V(rad(I))$, dove $rad(I) = \{a \in A : (\exists n \in \mathbb{N}) a^n \in I\}$.

(c) se un chiuso F in $X = \operatorname{Spec} A$ é irriducibile (cf. Es. 14.5), allora $F = V(\mathfrak{p})$ per qualche ideale primo $\mathfrak{p}$ di A (e quindi, F coincide con la chiusura del singoletto $\{\mathfrak{p}\}$, cf. (ix) del Teorema 17.1).

Dimostrazione. (a) Sia J l'intersezione di tutti ideale primi di A che contengono I. Ovviamente, $I \leq J$. Se $a \not\in nI$, allora applicando il lemma di Zorn trovare un ideale $\mathfrak{p}$ di A tale che $\mathfrak{p}$ contiene I, ma non contiene alcuna potenza di a ed é massimale con queste proprietà. Dimostrare che $\mathfrak{p}$ é primo, quindi testimonia il fatto che $a \notin J$.

(b) Segue da (a).

(c) Sia $F = V(\mathfrak{a})$ un chiuso irriducibile di X. Per il punto (b) possiamo supporre che $\mathfrak{a} = rad(\mathfrak{a})$. Quindi, per il punto (a), $\mathfrak{a}$ é intersezione di una famiglia Y di ideali primi. Se $|Y| > 1$, possiamo scrivere $Y = Y \cup Y''$, con $Y' \neq Y$ e $Y'' \neq Y$. Allora $F' = V(\bigcap_{\mathfrak{p} \in Y'} \mathfrak{p}$ e $F'' = V(\bigcap_{\mathfrak{p} \in Y''} \mathfrak{p}$ sono sottoinsiemi chiusi e propri di F con $F = F' \cup F''$ essendo $\mathfrak{a} = (\bigcap_{\mathfrak{p} \in Y''} \mathfrak{p}) \cap (\bigcap_{\mathfrak{p} \in Y''} \mathfrak{p})$, assurdo, perché F é irriducibile. Quindi $|Y| = 1$, cioé $F = V(\mathfrak{p})$. □

Spazi topologici dove ogni chiuso irriducibile coincide con la chiusura di un suo punto si chiamano *sobri.* Abbiamo così dimostrato che $\operatorname{Spec} A$ é sobrio per ogni anello anello commutativo A. In altre parole, per ogni anello commutativo A lo spazio $X = \operatorname{Spec} A$ é uno spazio T_0, sobrio e compatto, che ha una base di aperti compatti $\mathcal{B}$ chiusa per intersezioni finiti (inaffti, gli aperti O_f formano una base $\mathcal{B}$ chiusa per intersezioni finiti (punti (iii) del teorema 17.1) che sono compatti per la Proposizione 17.9). E' stato dimostrato da M. Hochster che ogni spazio topologico con queste proprietà (cioé T_0, sobrio e compatto, con una base di aperti compatti $\mathcal{B}$ chiusa per intersezioni finiti) risulta essere lo spettro di qualche anello commutativo.

Esercizio 17.10. *Sia $f : R \to S$ un omomorfismo tra anelli commutativi con identità. Allora l'applicazione $f^* : \mathrm{Spec} S \to \mathrm{Spec} R$ definita con $f^*(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$, per $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} S$, è continua.*

Esercizio 17.11. *Siano $f : R \to S$ e $g : S \to L$ omomorfismi tra anelli commutativi con identità. Allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e $(id_R)^* = id_{\mathrm{Spec} S}$. Dedurre, che se due annelli commutativi con identità R e S sono isomorfi, allora gli spazi topologici $\mathrm{Spec} R$ e $\mathrm{Spec} S$ sono omeomorfi.*

Esercizio 17.12. *Sia A un anello commutativo e sia $f : A \to A/\mathcal{N}(A)$ l'omomorfismo canonico. Dimostare che f^* é un omeomorfismo tra $\operatorname{Spec} A/\mathcal{N}(A)$ e $\operatorname{Spec} A$.*

Esercizio 17.13. *Sia A un anello di valutazione discreta. Dimostrare che Spec A è omeomorfo allo spazio di Sierpiǹski.*

Esercizio 17.14. *Sia A un anello commutativo.*

1. *Dimostrare che la topologia di Zariski ζ di $X =$ Spec A è meno fine della topologa inferiore di Alexandroff-Tucker τ dell'insieme X ordinato rispetto all'inclusione "$\subseteq$.*

2. *Dimostrare che le due topologie su X coincidono quando X é finito.*

3. *Trovare esempi con $\zeta \neq \tau$.*

Suggerimento. Poiché gli insiemi chiusi $V(\mathbf{a})$ di ζ sono chiusi anche in τ, si ricava subito $\xi \leq \tau$. D'altra parte, per ogni punto $\mathbf{p} \in X$ la τ-chiusura del singoletto $\{\mathbf{p}\}$ coincide con $V(\mathbf{p})$ e quindi coincide con la ζ-chiusura di $\{\mathbf{p}\}$. Per finire basta osservare, che due topologie su un insieme finito X coincidono, quando coincidono le chiusure dei punti di X fatte rispetto a queste topologie. ♣

Esercizio 17.15. *Dare esempi di anelli R e S non isomorfi con* Spec R *e* $\mathrm{Spec} S$ *omeomorfi.*

Dimostrazione. Prendere due anelli di valutazione discreta non-isomorfi e applicare l'esercizio precedente. Altro argomento: considerare due campi non-isomorfi. □

Sia A un anello commutativo con identità. Un elemento $a \in A$ e *idempotente* di A se $a^2 = a$. Tipici idempotenti di A provengono da decomposizioni $A = B \oplus C$ di A in prodotto diretto di anelli B e C con identità. Viceversa, se $a \in A$ é un idmpotente diverso da 0 e 1, allora $A = (a) \oplus (1-a)$ e gli ideali principali (a) e $(1-a)$ hanno identità (a e $1-a$, rispettivamente).

Esercizio 17.16. *Sia A un anello commutativo con identità e senza elementi nilpotenti non-nulli. Se $a = a^2 \in A$ è un idempotente di A, allora $O_a \cup O_{a-1} = X$ e $O_a \cap O_{a-1} = \emptyset$. Di conseguenza O_a è chiuso e aperto.*

Dimostrazione. Basta notare che $O_a \cap O_{a-1} = O_0$ e $O_a \cup O_{a-1} = X \setminus V(A)$. □

Teorema 17.17. *Sia A un anello commutativo con identità e senza elementi nilpotenti non-nulli. Dimostrare che lo spazio* Spec$A$ *è connesso se e solo se A non è prodotto diretto di due anelli con identità.*

Dimostrazione. Sia $A = B \oplus C$, e siano $e_1 \in B$, $e_2 \in C$ gli identità degli anelli B e C. Allora $a = e_1$ è un idempotente di A, quindi $O_a \cap O_{a-1} = \emptyset$, mentre $O_a \cup O_{a-1} = X \setminus V(A) = X$. Quindi, poichè $a \neq 0, 1$, avremo una partizione $X = O_a \cup O_{a-1}$ non banale di X. Di conseguenza X non è connesso. Ora supponiamo che X non è connesso e sia $X = F \cup G$ una partizione di X in due insiemi chiusi non vuoti. Allora $F = V(\mathfrak{a})$ e $G = V(\mathfrak{b})$. Per le formule (6) avremo $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = X$ e $V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$. Quindi $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$ (per $\mathcal{N}(A) = 0$) e $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$. Ma allora $A = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. □

Lo *spettro massimale* Specmax A di A è il sottospazio di Spec$A$ avente come punti gli ideali massimali di A.

Esercizio 17.18. *Sia A un anello commutativo. Allora:*
(i) Un ideale primo $\mathfrak{p} \in$ Spec A appartiene a Specmax A *se e solo se $\{\mathfrak{p}\}$ è chiuso in* Spec A.
(ii) Lo spazio Specmax A *è compatto e T_1.*
(iii) Dare esempi per far vedere che Specmax A *non é necessariamente chiuso in* Spec A.

Dimostrazione. (ii) Se Specmax $A \subseteq \bigcup_{f \in L} O_f$ è un ricoprimento di Specmax A, l'ideale $\mathfrak{a}$ generato dalla famiglia $\{f : f \in L\}$ è improprio. Quindi esiste una sottofamiglia finita $J \subseteq I$ tale che genera $\mathfrak{a}$, e quindi Specmax $A \subseteq \bigcup_{f \in J} O_f$. □

17.1 Dualità di Stone

Un anello commutativo A con unità si dice *anello di Boole* se per ogni elemento a di A vale $a^2 = a$.

Lemma 17.19. *Se I é un ideale primo di un anello di Boole A, allora $x \in I$ o $1 - x \in I$ per ogni elemento x di A. Di conseguenza,* Spec$A$ = Specmax$A$.

Dimostrazione. La prima affermazione segue immediatamente dalla definizione di ideale primo e dal fatto che $x(1-x) = 0 \in I$ per ogni $x \in A$. Per provare che un ideale primo I é anche massimale basta notare che se $x \in A$ e $x \notin I$, allora $1 - x \in I$ e quindi l'ideale $(x) + I$ coincide con A. □

Teorema 17.20. *Sia A un anello di Boole. Dimostrare che lo spazio* Spec$A$ *è zero-dimensionale, in particolare, totalmente sconnesso e T_2.*

Dimostrazione. Siano I_1 e I_2 due ideali primi distinti di A. Poiché questi ideali sono massimali (cf. Lemma 17.19), esistono $x_1 \in I_1 \setminus I_2$ e $x_2 \in I_2 \setminus I_1$. Quindi $x_1 - x_2 \notin I_1 \cup I_2$. Consideriamo gli intorni aperti $I_1 \in O_{x_2} \cap O_{x_1 - x_2}$ e $I_1 \in O_{x_1} \cap O_{x_1 - x_2}$. Notiamo che $I \in O_{x_1} \cap O_{x_1 - x_2} \cap O_{x_2}$ implicherebbe $1 - x_1 \in I$, $1 - x_1 \in I$ e $1 - x_1 + x_2 \in I$ (per il Lemma 17.19) e $-1 = (1 - x_1) - (1 - x_2) - (1 - x_1 + x_2) \in I$. Quindi, $I = A$. Questo dimostra che $O_{x_1} \cap O_{x_1 - x_2} \cap O_{x_2} = \emptyset$ e pertanto I_1 e I_2 hanno intorni disgiunti. Quindi Spec$A$ é uno spazio compatto di Hausdorff. Per l'Es. 17.16 gli aperti O_a della base sono chiusi e aperti, quindi Spec$A$ é zero dimensionale. □

Esercizio 17.21. *Un anello commutativo A con unità si dice* regolare von Neumann *(brevemente,* regolare*), se per ogni $a \in A$ esiste $x \in A$ tale che $a = a^2 x$. Dimostrare che:*

(i) ogni anello di Boole é regolare;

(ii) prodotto diretto di anelli regolari é un anello regolare;

(iii) il Teorema 17.20 resta vero anche per anelli regolari.

Teorema 17.22. *Sia X uno spazio compatto zero-dimensionale e T_2. Dimostrare che esiste un anello di Boole A, tale che* Spec$A$.

Dimostrazione. Sia A la famiglia degli insiemi chiusi e aperti della spazio X. Allora A risulta un anello di Boole rispetto alla differenza simmetrica e l'intersezione. Verifichiamo adesso che X è omeomorfo a Spec$A$. Per $x \in X$ sia $\mathfrak{V}_x$ insieme di tutti intorni chiusi e aperti di $x \in X$ e sia $\mathfrak{m}_x$ la famigli di tutti complementi dei membri di $\mathfrak{V}_x$ (cioé insiemi chiusi e aperti di X che non contengono x). Allora $\mathfrak{m}_x$ é un ideale massimale di A. Verifichiamo adesso che che tutti ideali primi di A sono di questo tipo. Infatti, per il Lemma 17.19 ogni ideale primo di A é anche massimale. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di X e supponiamo ed assurdo che $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_x$ per ogni $x \in X$. Quindi, per ogni $x \in X$ l'ideale $\mathfrak{m}_x$ non contiene $\mathfrak{m}$ (essendo $\mathfrak{m}$ massimale, se $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathfrak{m}$ avremo $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$). Sia $O_x \in \mathfrak{m}$ con $O_x \notin \mathfrak{m}_x$. Questo vuol dire $x \in O_x$. Troviamo così un ricoprimento aperto $\bigcup_{x \in X} O_x$ di X. Per la compattezza di X esitonu punti $x_1, \ldots, x_n$ tali che $X = \bigcup_{k=1}^n O_{x_k}$. Ora sostituiamo gli chiusi-aperti O_{x_k} con altri chisui aperti U_k (piú piccoli) allo scopo di ricavare una partizione $\bigcup_{k=1}^n U_k$. Poniamo $U_1 = O_{x_1}$ e per $1 < k \leq n$ $U_k = O_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$. Ora $U_k \subseteq O_{x_k}$ e quindi $U_k \in \mathfrak{m}$. Inoltre, $X = \bigcup_{k=1}^n U_k$ e U_k sono a due a due disgiunti. Pertanto, $1_A = \sum_{k=1}^n U_k$, dove la somma é calcolata nell'anello Booleano A, dove $1_A = X$. Questo ci dà $1_A \in \mathfrak{m}$, assurdo. Quindi, esiste $x_0 \in X$, tale che $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{x_0}$.

Verifichiamo adesso che la corrispondenza $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ definisce un omeomorfismo $g : X \to \operatorname{Spec} A$. A questo scopo basta notare che per un insieme chiuso aperto U di X $f(U) = O_U$, dove O_U é stato calcolato sull'elemento U dell'anello A. Poiché gli insiemi chiusi aperti di X e gli insiemi U_f, con $f \in A$, formano basi degli spazi topologici X e $\operatorname{Spec} A$ rispettivamente, si ha la tesi. □

Abbiamo visto in questo modo, che per alcune classi di anelli commutativi, il passaggio $A \mapsto$ Spec$A$ non porta a "perdita di informazione. In altre parole, l'anello di partenza A si può ricuperare a partire dallo spazio topologico Spec$A$. Infatti, nel teorema precedente possiamo vedere i sottoinsiemi chiusi e aperti di X come il luogo degli zeri di una funzione continua $f : X \to \{0, 1\}$ a valori nell'anello Booleano $\{0, 1\}$. Adesso definiamo A come l'anello delle funzioni $B(X)$ a valori in $\{0, 1\}$. La coppia delle corrispondenze $X \mapsto B(X)$ e $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ è nota come *dualità di Stone.* Il termine dualità è giustificato da $X \cong SpecB(X)$ e $A \cong B(SpecA)$.

18 L'anello delle funzioni continue

Teorema 18.1. *Sia X uno spazio topologico T_2 e $A = C(X)$ l'anello delle funzioni continue $X \to \mathbb{R}$.*

(i) Dimostrare che per ogni $x \in X$ l'insieme $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ è un ideale massimale di $C(X)$;

(ii) Se lo spazio X è compatto, allora tutti gli ideali massimali di $C(X)$ sono del tipo $\mathfrak{m}_x$ per qualche $x \in X$. La corripsondenza $g : x \mapsto \mathfrak{m}_x$ è un omeomorfismo tra X ed il sottospazio Specmax A *di* Spec$A$.

(iii) Se X è uno spazio metrico e il punto $x \in X$ non è aperto, allora l'ideale $\mathfrak{m}_x$ di $C(X)$ non è un principale;

(iv) esistono ideali massimali di $C(\mathbb{R})$ che non coincidono con $\mathfrak{m}_x$ per alcun elemento $x \in \mathbb{R}$.

(v) Se X è connesso, allora gli unici idempotenti di $C(X)$ sono le funzioni costanti 0 e 1.

(vi) Se $a < b$ e $c < d$ sono numeri reali, allora $C([a, b]) \cong C([c, d])$ e $C((a, b)) \cong C(\mathbb{R})$;

(vii) Per $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ l'anello $C(X)$ ha quattro idempotenti, quindi $C(X) \not\cong C([0, 1])$. Più in generale, se X ha $n < \infty$ componente connesse, allora $C(X)$ ha 2^n idempotenti.

Dimostrazione. (ii) Basta dimostare che ogni ideale proprio I di $A = C(X)$ è contenuto in un opportuno $\mathfrak{m}_x$. Supponiamo che $I \not\subseteq \mathfrak{m}_x$ per ogni $x \in X$, cioè esiste $f_x \in I$ con $f_x(x) \neq 0$. Per la continuità di f_x esiste un intorno aperto Δ_x di x in X tale che f_x non si annulla su Δ_x. Ora $\bigcup_{x \in [0,1]} \Delta_x$ è un ricoprimento aperto di X, quindi per la compattezza di X $\bigcup_{i=1}^n \Delta_{x_i}$ è ancora un ricoprimento di X. Quindi la funzione $f = \Sigma_{i=1}^n f_{x_i}^2 \in I$ è dovunque positiva. La funzione f è invertibile, di conseguenza $I = A$ - assurdo.

(iii) Supponiamo che $\mathfrak{m}_x = (f)$ per una funzione $f \in C(X)$. Allora esiste un intorno di x dove la funzione f non è identica a 0, quindi esiste una successione convergente $x_n \to x$ in X tale che $f(x_n) \neq 0$ per ogni n. Poichè la funzione $h(x) = \sqrt{|f(x)|} \in \mathfrak{m}_x$ avremo $h(x) = f(x)g(x)$ per qualche $g \in C(X)$. Elevando al quadrato troviamo $|f| = f^2 g^2 = |f|^2 g^2$ e quindi $|f|(1 - |f|g^2) = 0$. Ponendo $x = x_n$ si ha $1 = |f(x_n)|g^2(x_n)$ per ogni n. Poichè $|f(x_n)| \to 0$ e $g^2(x_n) \to g^2(x)$, passando al limite otteniamo $1 = 0$ - assurdo. Per vedere che g é un omeomorfismo, osserviamo che per una funzione $f \in A$ l'immagine inversa tramite g dell'aperto O_f della base di $\operatorname{Spec} A$ coincide con l'insieme $coz(f) = \{x \in X : f(x) \neq\}$. Non é difficile provare, usando la definizone della completa regolarità, che al variare la funzione f tra tutte la funzioni continue $f : X \to [0, 1]$ si trova una base della topologia di X. pertanto, g risulta un omeomorfismo.

(iv) Denotiamo con I_∞ l'insieme delle funzioni $f \in C(\mathbb{R})$ tali che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ con $f(n) = 0$ per tutti $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$. Ora I_∞ è un ideale di $C(\mathbb{R})$ con $I_\infty \not\subseteq \mathfrak{m}_x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poichè I_∞ è un ideale proprio di A, applicando il lemma di Zorn, troviamo un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A che contiene I_∞. Poichè $I \not\subseteq \mathfrak{m}_x$ per ogni $x \in X$, $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_x$ per ogni $x \in X$. □

Abbiamo visto in (ii) che la struttura algebrica dell'anello $C(X)$ basta per recuperare la topologia dello spazio X nel caso esso sia compatto. D'altra parte, la presenza di idempotenti $\neq 0, 1$ dell'anello $C(X)$ ci dice che lo spazio X non è connesso (cf. (v)).

In generale, per spazi di Tychonov l'anello $C(X)$ viene considerato con tre topologie. È utile tener conto che $C(X)$ può essere considerato come sottospazio del prodotto $\mathbb{R}^X$ (che consiste di *tutte* le funzioni $X \to \mathbb{R}$, mentre $C(X)$ consiste solo di quelle continue). Questa identificazione definisce la struttura di anello di $C(X)$.

(a) la topologia della convergenza puntuale: $f_\alpha \to f$ in $C(X)$ se per ogni $x \in X$ $f_\alpha(x) \to f(x)$ in $\mathbb{R}$; questa è anche la topologia indotta su $C(X)$ in quanto sottospazio del prodotto $\mathbb{R}^X$.

(b) la topologia della convergenza uniforme: $f_\alpha \to f$ in $C(X)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste α_0 tale che $|f(x) - f_\alpha(x)| < \varepsilon$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$ e per ogni $x \in X$.

(c) la topologia compatta-aperta: $f_\alpha \to f$ in $C(X)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni sottospazio compatto K di X esiste α_0 tale che $|f(x) - f_\alpha(x)| < \varepsilon$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$ e per ogni $x \in K$.

Usualmente $C(X)$ munito della topologia della convergenza puntuale si denota con $C_p(X)$. Poichè $\mathbb{R}^X$ è un anello topologico (cioè, le operazioni "+ e "· sono continue), anche $C_p(X)$ risulta un anello topologico.

Teorema 18.2. (Teorema di Nagata) *Se X e Y sono due spazi di Tichonov tali che $C_p(X) \cong C_p(Y)$ come anelli topologici allora X e Y sono omeomeorfi.*

Indice analitico

Riferimenti bibliografici

[AU] Alexandrov e Urysohn, *Mémoire sur les espaces compacts*, Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam 14 (1929).

[AM] M. Atiyah, I. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969 ix+128 pp.

[C] Giulio Campanella, *Esercizi di Topologia Generale*, UniTor, Roma, 1991.

[CDW] Krzysztof Ciesielski, D. Dikranjan e Stephen Watson, *Classes of functions characterized by images of the sets*, Colloq. Math., **77** (1998), no. 2, 211–232.

[D] D. Dikranjan, *Disconnectedness and dimension in pseudocompact groups*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, **316**, Série I (1993) 309-314.

[DT] D. Dikranjan W. Tholen *Categorical Structure of Closure Operators with Applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics*, *Mathematics and its Applications*, vol. 346, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1995, pp. 358+xviii.

[Du] J. Dugundji, "Topology, Allyn And Bacon, Inc., Boston 1966

[E] Ryszard Engelking, "General Topology, Helderman Verlag, Berlin. 1989

[E] R. Engelking, *Dimension Theory*, North-Holland, 1978.

[G] Franco Ghione, *Tau topologo*, Roma, 1984.

[J] P. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[K] J. Kelley, *General Topology.* D.Van Nostrand Company, New York 1959 (o Graduate texts in mathematics, 27, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1975).

[Kur] W. Kuratuwski, *Topology*, Academic Press, 1966.

[V] Daniel J. Velleman, *Characterizing Continuity*, American Math. Monthly, **104** (1997) 318–322.