Complementi di Topologia 1

D. Dikranjan

Queste note sono un complemento agli appunti del corso di Topologia 1, tenuto durante l'AA 2007/2008.

Indice

1 Spazi di funzioni **1**
1.1 Le tre topologie degli spazi di funzioni . . . 1
1.1.1 La topologia della convergenza puntuale e la topologia della convergenza uniforme . . . 1
1.1.2 La topologia compatta-aperta . . . 2
1.2 Approssimazione in spazi di funzioni . . . 3
1.3 Compattezza degli spazi di funzioni ed equicontinuità . . . 4
1.3.1 Equicontinuità di famiglie di funzioni . . . 4
1.3.2 Teorema di Ascoli . . . 5

2 Dinamica topologica **6**
2.1 Teoremi del punto fisso . . . 6
2.2 Punti periodici e punti ricorrenti . . . 6
2.3 Teoremi di ricorrenza . . . 7
2.3.1 Teorema di ricorrenza di Birkhoff . . . 7
2.3.2 Spazi di misura e Teorema di ricorrenza di Poincaré . . . 7
2.3.3 Misure invarianti . . . 9

3 La mappa di Gauss e le frazioni continue **10**
3.1 Le frazioni continue e lo spazio di Baire . . . 11

4 Categorie e funtori **11**
4.1 Le Categorie . . . 11
4.1.1 Sottocategorie di una categioria . . . 12
4.1.2 Le categorie **Top**, **Met** e **Toph** . . . 12
4.1.3 Insiemi puntati, spazi topologici puntati, la categoria delle coppie . . . 13
4.2 I funtori . . . 13
4.2.1 Primi esempi . . . 14
4.2.2 Il funtore π_1 di Poincaré . . . 15

1 Spazi di funzioni

In ciò che segue Y sarà sempre uno spazio topologico (e più spesso uno spazio metrico (Y, d)), mentre X sarà uno spazio topologico o solamente un insieme. Studieremo vari modi per munire il prodotto cartesiano Y^X, o appropriati sottoinsiemi $\mathcal{F}$ di Y^X, di una topologia che soddisfi qualche condizione naturale. Allora gli *spazi di funzioni* sono semplicemente sottoinsiemi $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ muniti di una topologia appropriata.

1.1 Le tre topologie degli spazi di funzioni

1.1.1 La topologia della convergenza puntuale e la topologia della convergenza uniforme

La definizione della topologia della convergenza puntuale non richiede alcuna topologia su X. Denotiamo con τ_p la topologia di Tichonov del prodotto cartesiano Y^X. Questa è la topologia meno fine che rende continue tutte le proiezioni $p_x : Y^X \to X$ (definite da $p_x(f) = f(x)$ per ogni $f \in Y^X$) per $x \in X$.

Esercizio 1.1. Dimostrare che $f_n \to f$ in (Y^X, τ_p) se e solo se $f_n(x) \to f(x)$ in Y per ogni $x \in X$.

Per le proprietà appena vista, la topologia τ_p si chiama spesso anche *topologia della convergenza puntuale* in Y^X.

Osservazione 1.2. Il prodotto cartesiano Y^X porta anche una topologia τ_b molto più fine, nota come *box topology.* Una base di τ_b è data dagli insiemi della forma $\prod_{x\in X} U_x$, dove ogni U_x è un sottoinsieme aperto non vuoto di Y per ogni $x \in X$.

Esercizio 1.3. Sia $\{Y_i : i \in I\}$ una famiglia arbitraria di spazi topologici. Dimostrare che è possibile definire in modo simile una box topology sul prodotto $Y = \prod_{i\in I} Y_i$.

Per vedere che la box topology soddisfa una proprietà molto più forte di compatibilità con le proiezioni consideriamo la mappa naturale $ev : Y^X \times X \to Y$ definita da $ev(f, x) = f(x)$ per ogni $f \in Y^X$ e $x \in X$. Una topologia τ su un insieme $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ è detta *compatibile* se la restrizione $ev : \mathcal{F} \times X \to Y$ è continua quando si considera $(\mathcal{F}, \tau) \times X$ con la topologia prodotto.

Esempio 1.4. (a) La topologia discreta su Y^X è compatibile. Infatti per ogni sottoinsieme aperto V di Y $ev^{-1}(V) = \bigcup\{\{f\} \times f^{-1}(V) : f(X) \cap V \neq \emptyset\}$ è aperto in $Y^X \times X$.

(b) Se τ è una topologia compatibile su un insieme di funzioni $\mathcal{F} \subseteq Y^X$, allora anche tutte le topologie più fini su $\mathcal{F}$ sono compatibili. Questa proprietà ci permetterà di dedurre dall'Esercizio 1.7 e dall'Esempio 1.8 che anche la box topology τ_b è compatibile (e questo a sua volta implicherà che la topologia discreta è compatibile).

Definizione 1.5. Siano X un insieme e Y uno spazio metrico. Denotiamo con $B(X, Y)$ l'insieme di tutte le funzioni limitate in Y^X, cioè le funzioni $f : X \to Y$ tali che diam $f(X)$ è limitato.

Se X e Y sono spazi topologici, allora $C(X, Y)$ denoterà l'insieme di tutte le funzioni continue da X a Y e $C^*(X, Y) = C(X) \cap B(X, Y)$. Nel caso in cui $Y = \mathbb{R}$, scriveremo anche $C(X)$ al posto di $C(X, \mathbb{R})$ e $C^*(X)$ al posto di $C^*(X, \mathbb{R})$.

Esercizio 1.6. Dimostrare che:

(a) uno spazio topologico X è pseudocompatto se e solo se $C(X) = C^*(X)$;

(b) se X è uno spazio pseudocompatto e Y è uno spazio metrico, allora $C(X, Y) \subseteq B(X, Y)$.

Denotiamo con d_u la metrica di $B(X, Y)$ definita da

$$d_u(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

per ogni $f, g \in B(X, Y)$ e denotiamo con τ_u la topologia metrica di $B(X, Y)$ determinata dalla metrica d_u. Questa topologia è chiamata *topologia della convergenza uniforme.* Notiamo che se d^* è la metrica limitata associata a d, definita da

$$d^*(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \text{ per ogni } x, y \in Y,$$

allora la metrica uniforme d^*_u su $B(X, Y)$ definisce la stessa topologia della convergenza uniforme su $B(X, Y)$. Ma la metrica d^*_u è definita praticamente su tutto Y^X, poiché $B(X, (Y, d^*)) = Y^X$. Questo rende possibile estendere τ_u a una topologia metrica su $B(X, Y)$. Diventa così possibile parlare di topologia della convergenza uniforme su Y^X.

Esercizio 1.7. Dimostrare che $\tau_u \subseteq \tau_b$.

Esempio 1.8. Sia X uno spazio topologico. Allora τ_u è una topologia compatibile su $C(X, Y)$.

Infatti siano $x \in X$, $f \in C(X, Y)$ e $\varepsilon > 0$. Esiste un intorno U di x in X tale che $f(U) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(x))$. Ora $W_{X,\varepsilon/2}(f)$ è un τ_u-intorno di f e quindi è sufficiente controllare che $ev(W_{X,\varepsilon}(f) \times U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, che vale perché per ogni $g \in W_{X,\varepsilon}(f)$ e $u \in U$ si ha $d(g(u), f(x)) \leq d(g(u), f(u)) + d(f(u), f(x)) \leq \varepsilon$.

Proposizione 1.9. *Se X è uno spazio topologico e Y è uno spazio metrico, allora $C(X, Y)$ e $C^*(X, Y)$ sono entrambi sottoinsiemi τ_u-chiusi di Y^X.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f \in Y^X$ non sia continua. Allora esistono $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ tali che $f(U) \not\subseteq B_\varepsilon(f(x))$ per tutti gli intorni U di x in X. Assumiamo che $d_u(g, f) < \varepsilon/3$. Se g fosse continuo in x, allora per qualche intorno V di x in X si avrebbe $g(V) \subseteq B_\varepsilon(g(x))$. Per la nostra assunzione su f esiste $v \in V$ tale che $d(f(v), f(x)) \geq \varepsilon$. Poiché $d(g(v), g(x)) < \varepsilon/3$, $d(g(x), f(x)) < \varepsilon/3$ e $d(g(v), f(v)) < \varepsilon/3$. Questo implica che

$$\varepsilon \leq d(f(v), f(x)) \leq d(f(v), g(v)) + d(g(v), g(x)) + d(g(x), f(x)) < \varepsilon,$$

che è una contraddizione. Ciò stabilisce che $C(X, Y)$ è τ_u-chiuso. Ovviamente, $B(X, Y)$ é τ_u-chiuso in Y^X, dunque $C^*(X, Y)$ è τ_u-chiuso in $C(X, Y)$. $\square$

Corollario 1.10. *Se X è uno spazio topologico, allora lo spazio metrico $(C^*(X), d_u)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $(C^*(X), d_u)$. Per ogni $x \in X$ la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi esiste $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dunque $f_n \to f$ in (Y^X, τ_p). Vediamo che $f_n \to f$ anche in (Y^X, τ_u). A questo scopo fissiamo un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $d_u(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ per ogni $n, m > n_0$. Siano $x \in X$ e $n_x \in \mathbb{N}$ tali che $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$ per ogni intero $n \geq n_x$. Allora per ogni intero $n \geq n_0$ si ha

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_{n_x}(x)) + d(f_{n_x}(x), f(x))) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Per la proposizione precedente $f \in C^*(X)$. □

1.1.2 La topologia compatta-aperta

Definizione 1.11. Se X e Y sono spazi topologici, allora la topologia *compatta-aperta* τ_{co} di Y^X ha come prebase la famiglia di tutti gli insiemi $W(K, U) = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq Y\}$, dove $K \subseteq X$ è compatto e $U \subseteq Y$ è aperto.

Esercizio 1.12. Dimostrare che $\tau_p \subseteq \tau_{co}$.

Nel caso in cui Y è uno spazio metrico si può definire un'altra topologia τ_{uc} sullo spazio delle funzioni Y^X prendendo come base la famiglia degli insiemi

$$W_{K,\varepsilon}(f) = \left\{ g \in Y^X : \sup_{x\in K} d(g(x), f(x)) < \varepsilon \right\},$$

dove K varia tra tutti i sottoinsiemi compatti di X e $\varepsilon > 0$.

Esercizio 1.13. Dimostrare che $\tau_{uc} \subseteq \tau_u$ per uno spazio metrico Y.

Esercizio 1.14. Per un insieme $K \subseteq X$ fisso, si consideri la mappa $\rho_K : Y^X \to Y^K$ definita da $\rho_K(f) = f \restriction_K$ per ogni $f \in Y^X$. Dimostrare che τ_{uc} è la topologia meno fine su Y^X che rende continue tutte le funzioni $\rho_K : Y^X \to Y^K$ dove $K \subseteq X$ varia tra tutti i sottoinsiemi compatti di X.

Lemma 1.15. *Le topologie τ_{uc} e τ_{co} coincidono su $C(X, Y)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $f \in C(X, Y)$. Dimostriamo prima che per ogni τ_{co}-intorno prebasico $W(K, U)$ di f in $C(X, Y)$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$W_{K,\varepsilon}(f) \subseteq W(K, U). \tag{1}$$

Poiché K è compatto e $f \in C(X, Y)$, anche $f(K)$ è un sottoinsieme compatto dello spazio metrico Y. Inoltre $f(K) \subseteq U$ dato che $f \in W(K, U)$. Per la compattezza di $f(K)$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(f(K)) \subseteq U$, i.e., se $d(y, f(K)) < \varepsilon$ allora $y \in U$. Sia ora $g \in W_{K,\varepsilon/2}(f) \subseteq W(K, U)$. Allora $d(g(x), f(x)) < \varepsilon/2$ per ogni $x \in K$ e quindi $d(g(x), f(K)) < \varepsilon$. Dunque $g(x) \in U$. Questo prova (1).

Fissiamo nuovamente un sottoinsieme compatto K di X e un $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare dei sottoinsiemi compatti K_i di X e dei sottoinsiemi aperti U_i di Y tali che $f(K_i) \subseteq U_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ e

$$W_{K,\varepsilon}(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, U_i). \tag{2}$$

Siccome $f(K)$ è compatto, esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tali che $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/3}(f(x_i))$. Per $i = 1, 2, \ldots, n$ sia $K_i = K \cap f^{-1}(\overline{B_{\varepsilon/3}(f(x_i))})$. Allora K_i è compatto e $f(K_i) \subseteq U_i := B_{2\varepsilon/3}(f(x_i))$, poiché

$$f(f^{-1}(\overline{B_{\varepsilon/3}(f(x_i))}) \subseteq \overline{B_{\varepsilon/3}(f(x_i))} \subseteq U_i.$$

Quindi $f \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, U_i)$. Rimane da verificare (2). Sia $g \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, U_i)$. Se $x \in K$, allora esiste $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $x \in K_i$, quindi $d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$ e dunque

$$f(x) \in B_{\varepsilon/3}(f(x_i)) \text{ e } d(g(x), f(x_i)) < 2\varepsilon/3,$$

poiché $g \in W(K_i, U_i)$. Di conseguenza concludiamo che $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ per ogni $x \in K$. Questo prova (2). □

Esempio 1.16. Sia X uno spazio localmente compatto. Allora τ_{co} è una topologia compatibile su $C(X, Y)$.

Infatti siano $x \in X$, $f \in C(X, Y)$ e $\varepsilon > 0$. Allora esiste un intorno compatto U di x in X tale che $f(U) \subseteq B_{\varepsilon/3}(f(x))$. Ora $W_{U,\varepsilon}(f)$ è un τ_{co}-intorno di x in X. Allora è sufficiente verificare che $ev(W_{U,\varepsilon}(f) \times U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, che è vero perché per ogni $g \in W_{U,\varepsilon}(f)$ e $u \in U$ si ha $d(g(u), f(x)) \leq d(g(u), f(u)) + d(f(u), f(x)) \leq \varepsilon$.

Proposizione 1.17. *Sia X uno spazio compatto e sia τ una topologia compatibile su $C(X,Y)$. Allora $\tau \supseteq \tau_u$.*

Dimostrazione. Fissiamo $f \in C(X,Y)$ e un $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare un τ-intorno di f contenuto in $W_\varepsilon(f)$. Siccome τ è compatibile, per ogni $x \in X$ esistono un intorno U_x di x in X e un intorno V_x di f in $C(X,Y)$ tali che $ev(V_x \times U_x) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(x))$. Per la compattezza di X esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Sia $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Allora per ogni $g \in V$ e $x \in X$ si ha $g(x) \in B_{\varepsilon/2}(f(x))$. In altre parole $V \subseteq W_\varepsilon(f)$. $\square$

Dall'Esempio 1.16 e dalla Proposizione 1.17 si può dedurre la seguente notevole proprietà della topologia compatta-aperta degli spazi localmente compatti.

Corollario 1.18. *Per spazi localmente compatti X e Y la topologia compatta-aperta τ_{co} di $C(X,Y)$ è la topologia compatibile meno fine su $C(X,Y)$.*

Dimostrazione. Poiché X è localmente compatto, τ_{co} è una topologia compatibile su $C(X,Y)$ per l'Esempio 1.16. Supponiamo che τ sia una topologia compatibile su $C(X,Y)$. Allora è una topologia compatibile su $C(K,Y)$ per ogni sottoinsieme compatto K di X. Per la Proposizione 1.17 $\tau \restriction_{C(K,Y)} \supseteq \tau_u \restriction_{C(K,Y)}$, i.e., $\rho_K : (C(X,Y),\tau) \to (C(K,Y),\tau_u)$ è continua. Siccome τ_{co} è la topologia meno fine su $C(X,Y)$ che rende continua ogni $\rho_K : C(X,Y) \to (C(K,Y),\tau_u)$, concludiamo che $\tau_{uc} \subseteq \tau$. Per finire basta notare che $\tau_{co} = \tau_{uc}$ per il Lemma 1.15. $\square$

È stato provato da Arens che per spazi non localmente compatti X potrebbe non esistere alcuna topologia compatibile su $C(X,Y)$ meno fine di tutte.

1.2 Approssimazione in spazi di funzioni

Qui consideriamo $Y = \mathbb{R}$. In questo contesto è sempre stato di interesse approssimare (in qualche senso appropriato) le funzioni in un dato spazio di funzioni tramite una famiglia (più piccola) di funzioni che sono in un certo senso più semplici. In altre parole discutiamo la densità di appropriati sottospazi di spazi di funzioni.

Cominciamo con un vecchio esempio ben noto.

Esempio 1.19. Il sottospazio $\mathbb{R}[x]$ di tutte le funzioni polinomiali è denso in $C_p(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^\mathbb{R}, \tau_p)$. Effettivamente vale un risultato più forte, cioè $\mathbb{R}[x]$ è denso in $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, \tau_p)$ quando $\mathbb{R}$ è munito della topologia discreta. Infatti, se $F = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$, allora per ogni $n+1$-upla $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ di numeri reali esiste un (unico) polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado al più n tale che $f(a_i) = b_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$ (ciò è noto come interpolazione polinomiale di Lagrange).

Diamo ora una definizione che ci servirà nel seguito. Un anello commutativo unitario $(A, +, \cdot)$ è una $\mathbb{R}$-*algebra* se A ammette una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, tale che per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $a \in A$ si ha $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$. Un sottoinsieme B di una $\mathbb{R}$-algebra A è detto *sottoalgebra* di A se B è simultaneamente un sottospazio e un sottoanello di A.

Esempio 1.20. (a) Per ogni insieme X il prodotto diretto $\mathbb{R}^X$ è una $\mathbb{R}$-algebra.

(b) Se X è uno spazio topologico, allora $C(X)$ è una sottoalgebra di $\mathbb{R}^X$ e $C^*(X)$ è una sottoalgebra di $C(X)$.

(c) $\mathbb{R}[x]$ è una sottoalgebra di $C(\mathbb{R})$.

(d) Denotiamo con S il cerchio $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. In altre parole questo è l'intervallo $[0, 2\pi]$ con le estremità 0 e 2π identificate. Ora $C(S)$ può essere identificato con il sottoinsieme $C_{per}([0, 2\pi])$ di tutte le funzioni f di $C([0, 2\pi])$ tali che $f(0) = f(2\pi)$ (o, equivalentemente, con tutte le funzioni continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π). Notiamo che $C_{per}([0, 2\pi])$ è una sottoalgebra dell'algebra $C([0, 2\pi])$. Siano $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ numeri reali. Una funzione della forma
$$T(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$
è detta *polinomio trigonometrico.* La famiglia $TP[0, 2\pi]$ di tutti i polinomi trigonometrici è una sottoalgebra di $C_{per}([0, 2\pi])$.

Le sottoalgebre dei punti (c) e (d) sono sempre state di interesse rilevante in matematica, a causa dei seguenti teoremi classici, il primo dei quali è dovuto a Weierstraß.

Teorema 1.21. *Per ogni intervallo compatto $[a,b]$ la sottoalgebra $Pol[a,b]$ di tutte le funzioni polinomiali in $[a,b]$ è densa in $(C([a,b]), \tau_u)$.*

In altre parole, per ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione polinomiale $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in [a, b]$.

Il prossimo teorema viene dall'analisi di Fourier, dove effettivamente può essere dimostrato un risultato più forte (comprendente anche le funzioni non continue).

Teorema 1.22. *La sottoalgebra $TP[0, 2\pi]$ di tutti i polinomi trigonometrici è densa in $(C_{per}([0, 2\pi]), \tau_u)$.*

Entrambi i teoremi sono casi particolari di un teorema più generale valido per tutti gli spazi compatti. Quest'ultimo è dovuto a Marshal Stone:

Teorema 1.23 (Stone-Weierstraß). *Sia X uno spazio compatto e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di $C(X)$ contenente tutte le funzioni costanti e che separa i punti di X* [1]*. Allora $\mathcal{A}$ è densa in $C(X)$.*

1.3 Compattezza degli spazi di funzioni ed equicontinuità

1.3.1 Equicontinuità di famiglie di funzioni

Definizione 1.24. Se X è uno spazio topologico e Y è uno spazio metrico, allora un insieme $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ è detto *equicontinuo* se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x in X tale che $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Esempio 1.25. Chiaramente ogni membro di una famiglia equicontinua di funzioni è *continuo.* Viceversa ogni famiglia finita di funzioni è equicontinua.

Esercizio 1.26. Sia $X = Y = [0, 1]$ e per $n \in \mathbb{N}_+$ sia $f_n : X \to X$ la funzione definita da $f_n(x) = x^n$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}_+\}$ non è equicontinuo.

La motivazione per la nozione di equicontinuità, a parte dal suo interesse intrinseco, viene dal seguente fatto importante legato alla compattezza degli spazi di funzioni:

Esempio 1.27. Se $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ è compatto per qualche topologia compatibile τ su $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}$ è equicontinuo.
Infatti fissiamo $x \in X$ e un $\varepsilon > 0$. Per ogni $g \in \mathcal{F}$ esistono un τ-intorno W_g di g in $C(X, Y)$ e un intorno U_g di x in X tali che $ev(W_g \times U_g) \subseteq B_{\varepsilon/2}(g(x))$. Per la compattezza di $\mathcal{F}$ esistono $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathcal{F}$ tali che $U = \bigcup_{i=1}^n U_{g_i}$ è un intorno di x in X che testimonia l'equicontinuità in x. Infatti per $f \in \mathcal{F}$ esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $f \in W_{g_i}$, così che $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ e per ogni $u \in U$

$$d(f(u), f(x)) \leq d(f(u), g_i(x)) + d(g_i(x), f(x)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Proposizione 1.28. *Se $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ è equicontinuo, allora τ_p è compatibile.*

Dimostrazione. Siano $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste un intorno U di x in X tale che $g(U) \subseteq B_{\varepsilon/2}(g(x))$ per ogni $g \in \mathcal{F}$, i.e., $d(g(x), g(u)) < \varepsilon/2$ per ogni $u \in U$. Allora $W := W_{\{x\},\varepsilon/2}(g)$ soddisfa $ev(W \times U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Infatti, se $u \in U$ e $g \in W$, allora $d(g(u), f(x)) \leq d(g(u), g(x)) + d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$. □

Ora con questa proposizione e la Proposizione 1.17 possiamo concludere che:

Corollario 1.29. *Se $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ è equicontinuo per uno spazio compatto X, allora τ_u e τ_p coincidono su $\mathcal{F}$.*

Corollario 1.30. *Se $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme τ_u-compatto di $C(X, Y)$, allora $\mathcal{F}$ è equicontinuo.*

Dimostrazione. Per l'Esempio 1.8 τ_u è compatibile e per l'Esempio 1.27 $\mathcal{F}$ è equicontinuo. □

Proposizione 1.31. *Se $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ è equicontinuo, allora la sua τ_p-chiusura in Y^X è ancora equicontinua.*

Dimostrazione. Siano $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Allora esiste un intorno U di x in X tale che $f(U) \subseteq B_{\varepsilon/3}(f(x))$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. Ora dimostriamo che

$$g(U) \subseteq B_\varepsilon(g(x)) \tag{3}$$

per ogni g appartenente alla τ_p-chiusura di $\mathcal{F}$. Infatti per ogni $u \in U$ si può trovare una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $d(g(u), f(u)) < \varepsilon/3$ e $d(g(x), f(x)) < \varepsilon/3$, così che

$$d(g(u), g(x)) \leq d(g(u), f(u)) + d(f(u), f(x)) + d(f(x), g(x)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Ciò prova (3). □

Come conseguenza di questo risultato deduciamo che la τ_p-chiusura in Y^X di un sottoinsieme equicontinuo $\mathcal{F}$ di $C(X, Y)$ è contenuto in $C(X, Y)$ (i.e., il limite puntuale di una rete di funzioni continue è ancora una funzione continua se la famiglia è equicontinua). Questo può essere confrontato con l'Esercizio 1.26.

[1] i.e., se $x \neq y$ in X esiste una funzione $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

1.3.2 Teorema di Ascoli

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è *relativamente compatto* se $\overline{A}$ è compatto in X. Chiaramente ogni sottoinsieme A di uno spazio compatto X è relativamente compatto. In particolare ogni spazio di Tichonov è relativamente compatto in ogni compattificazione cX di X.

Teorema 1.32 (Ascoli)**.** *Siano X uno spazio compatto, Y uno spazio metrico e $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ un insieme di funzioni continue. Allora $\mathcal{F}$ è τ-compatto (come sottospazio di $C(X, Y)$) se e solo se le seguenti condizioni sono soddisfatte:*

(i) $\mathcal{F}$ è equicontinuo,

(ii) $\mathcal{F}[x]$ è relativamente compatto per ogni $x \in X$,

(iii) $\mathcal{F}$ è τ_p-chiuso.

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ è τ-compatto, allora il Corollario 1.30 implica (i), mentre (ii) e (iii) valgono ovviamente poiché (Y^X, τ_p) è Hausdorff.

Se $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ è equicontinuo, allora la sua τ_p-chiusura C in Y^X è ancora equicontinua. Quindi le due topologie coincidono su C. Pertanto è sufficiente dimostrare che C è τ_p-compatto. Poiché $\mathcal{F} \subseteq \prod_x \mathcal{F}[x]$ e ogni $\mathcal{F}[x]$ è relativamente compatto, (ii) e (iii) implicano che C è contenuto come un sottoinsieme chiuso nel prodotto compatto $\prod_x \overline{\mathcal{F}[x]}$. Questo dimostra che C è τ_p-compatto e dunque la sufficienza. □

2 Dinamica topologica

2.1 Teoremi del punto fisso

Per una trasformazione $T : X \to X$ sia $Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\}$. Allora $Fix(T)$ è un sottoinsieme chiuso di X di grande rilevanza nello studio di T.

Già la prima domanda a proposito di questo insieme, nonostante sembri elementare, risulta essere altamente non elementare:

Domanda 2.1. Quando $Fix(T) \neq \emptyset$?

Chiaramente $Fix(T) \neq \emptyset$ potrebbe dipendere dalle proprietà dello spazio X, come anche dalle proprietà di T. Qualche mappa facilmente definibile (e.g., le mappe identiche o costanti) hanno sicuramente punti fissi indipendentemente dal dominio X. D'altra parte certi domini X impongono che $Fix(T) \neq \emptyset$ *per ogni* trasformazione $T : X \to X$ (e.g., quando X è un singoletto).

Definizione 2.2. Uno spazio X ha *la proprietà del punto fisso* se $Fix(T) \neq \emptyset$ per ogni mappa continua $T : X \to X$.

Come menzionato precedentemente, ogni singoletto ha la proprietà del punto fisso. Ma già ogni insieme di due elementi (o ogni insieme finito X di cardinalità > 1) ammette una mappa $T : X \to X$ con $Fix(T) = \emptyset$ (verificare!). Questi esempi mostrano che la proprietà del punto fisso è altamente non banale anche per spazi compatti.

Esempio 2.3. (a) Lo spazio $X = [0, 1]$ ha la proprietà del punto fisso.

(b) Se X e Y sono omeomorfi e X ha la proprietà del punto fisso, allora anche Y ha la proprietà del punto fisso.

(c) Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ lo spazio $X = [0, 1]^n$ ha la proprietà del punto fisso.

In alcuni casi, specialmente quando K è uno spazio bello (i.e., un poliedro), per ogni mappa continua $T : X \to X$ può essere definito un numero $\Lambda(T)$ (detto *numero di Lefschetz*), tale che $\Lambda(T) \neq 0$ implica $Fix \neq \emptyset$.

2.2 Punti periodici e punti ricorrenti

Per una mappa $T : X \to X$ e $n \in \mathbb{N}_+$ sia $Per_n(T) = Fix(T^n)$, cioè $x \in Per_n(T)$ se e solo se $T^n x = x$. Sia $Per(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} Per_n(T)$. I punti $x \in Per(T)$ sono detti *punti periodici* di T.

Esercizio 2.4. Dimostrare che se X è finito, allora:

(a) $Per(T) \neq \emptyset$,

(b) $Per(T) = X$ se T è una biezione.

Esercizio 2.5. Dimostrare che ogni omeomorfismo $T : [0,1] \cup [2,3] \to [0,1] \cup [2,3]$ ha punti periodici, sebbene esistano omeomorfismi $T : [0,1] \cup [2,3] \to [0,1] \cup [2,3]$ senza punti fissi.

Ci sono esempi semplici di omeomorfismi $T : X \to X$ con X compatto e con $Per(T) = \emptyset$ (e.g., appropriate rotazioni del cerchio). Questo motiva l'introduzione di una proprietà più debole della periodicità e tale che tutte le trasformazioni $T : X \to X$ di uno spazio compatto X abbiano almeno un punto con questa proprietà più debole.

Per una trasformazione $T : X \to X$ di uno spazio topologico X sia $O_T(x) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}_+\}$. Diciamo che $x \in X$ è un *punto ricorrente* di T se $x \in \overline{O_T(x)}$ (i.e., ogni intorno di x in X contiene qualche $T^n x$ con $n \in \mathbb{N}_+$). Se X è uno spazio metrico, questo è equivalente ad avere una successione $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ tale che $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x = x$. Per una trasformazione continua $T : X \to X$ di uno spazio topologico X denotiamo con $R_B(T)$ l'insieme di tutti i punti ricorrenti rispetto a T.

Esercizio 2.6. Dimostrare che:

(a) ogni punto periodico è ricorrente,

(b) ogni punto ricorrente è periodico se lo spazio topologico è finito.

Definizione 2.7. Sia $T : X \to X$ una trasformazione continua dello spazio topologico X. Un punto x di X è *wandering* rispetto a T se esiste un aperto U di X tale che $x \in U$ e tale che gli insiemi $T^{-n}U$ e $T^{-m}U$ siano disgiunti puntualmente.

Esercizio 2.8. Dimostrare che ogni punto ricorrente non è wandering.

Denotiamo con $\Omega(T)$ l'insieme di tutti i punti non wandering rispetto a T, i.e., $x \in \Omega(T)$ se e solo se per ogni aperto U di X contenente x esiste $n \in \mathbb{N}_+$ tale che $U \cap T^{-n}U \neq \emptyset$.

Esempio 2.9. Sia $X = [0,1]$.

(a) Sia $T : X \to X$ definita da $Tx = x^2$ per ogni $x \in X$. Allora $\Omega(T) = \{0,1\}$ coincide con l'insieme dei punti fissi di T. Infatti, se $0 < x < 1$, allora esistono $a, b \in X$ tali che $b^2 < a < x < b$. Quindi l'insieme aperto $U = (a,b)$ contenente x soddisfa $U \cap T^{-n}U = \emptyset$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}_+$, così $x \notin \Omega(T)$.

(b) Consideriamo $T : X \to X$ definita da $Tx = \sqrt{1-x}$ per ogni $x \in X$. Allora $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ è l'unico punto fisso di T e $Per_2(T) = \{0,1\}$ poiché $T0 = 1$ e $T1 = 0$. Ora $\Omega(T) = \{0, \alpha, 1\} = Per_2(T)$.

Si può vedere facilmente che $\Omega(T)$ è un sottoinsieme chiuso T-invariante contenente tutti i punti periodici di T. Più precisamente:

Lemma 2.10. *Sia $T : X \to X$ una trasformazione continua di X. Allora:*

(a) $\Omega(T)$ è un sottoinsieme chiuso T-invariante di X;

(b) se per $x \in X$ si pone $\omega(x) = \{y \in X : y = \lim_{i\to\infty} T^{n_i}x$ per qualche successione strettamente crescente $(n_i)_{i\in\mathbb{N}_+}\}$, allora $\omega(x)$ è un sottoinsieme chiuso T-invariante contenuto in $\Omega(T)$;

(c) $\Omega(T)$ contiene tutti i punti ricorrenti di T.

Dimostrazione. (a) Se $x \notin \Omega(T)$, questo è testimoniato da un aperto U di X tale che $T^{-n}U \cap T^{-m}U = \emptyset$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}_+$ con $n \neq m$. Chiaramente $U \cap \Omega(T) = \emptyset$. Quindi $\Omega(T)$ è chiuso. Siccome da U come prima si ottiene l'insieme aperto $W = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} T^{-n}U$ con $TW \subseteq W$, $T^{-1}W \subseteq W$ e $W \cap \Omega(T) \neq \emptyset$, è chiaro che $T\Omega(T) \subseteq \Omega(T)$.

(b) Per vedere che $\omega(x)$ è chiuso, supponiamo che $z \notin \omega(x)$. Allora z ha un intorno aperto U in X che non contiene alcun elemento della forma $T^n x$ con $n \in \mathbb{N}_+$. Chiaramente $U \cap \omega(x) = \emptyset$ e quindi $\omega(x)$ è chiuso. Assumiamo che $y = \lim_{i\to\infty} T^{n_i}x \in \omega(x)$. Allora per ogni aperto V di X contenente y esistono $n, m \in \mathbb{N}_+$ distinti tali che $T^n x, T^m x \in V$. Allora $x \in T^{-n}V \cap T^{-m}V \neq \emptyset$.

(c) Chiaramente $x \in X$ è ricorrente se e solo se $x \in \omega(x)$. Ora si applica (b). $\square$

Sia $\Omega_1(T) = \Omega(T)$ e per induzione su $n \in \mathbb{N}_+$ definiamo $\Omega_{n+1}(T) = \Omega(\Omega_n(T))$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$. Allora $\Omega_\infty(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} \Omega_n(T)$ è detto *centro* di T.

2.3 Teoremi di ricorrenza

2.3.1 Teorema di ricorrenza di Birkhoff

Teorema 2.11 (Teorema di ricorrenza di Birkhoff)**.** *Ogni mappa continua $T : X \to X$ di uno spazio compatto X ha un punto ricorrente, i.e., $R_B(T) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X : \emptyset \neq Y = \overline{Y}, TY \subseteq Y\}$. Ordiniamo $\mathcal{F}$ per inclusione e dimostriamo che $\mathcal{F}$ ha elementi minimali. Infatti se $\mathcal{C}$ è una catena in $\mathcal{F}$, allora $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$ per la compattezza di X e ovviamente $\bigcap \mathcal{C}$ è chiuso e T-invariante, quindi $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Per il lemma di Zorn esiste un elemento minimale $F \in \mathcal{F}$. Allora $TF_0 \subseteq F_0$ e $TF_0 \in \mathcal{F}$ e quindi $TF_0 = F_0$ per la minimalità di F_0. Ora ogni $x \in F_0$ è un punto ricorrente di T. Infatti sia $x \in F_0$. Allora $O_T(x) \subseteq F_0$ e pertanto anche $\overline{O_T(x)} \subseteq F_0$. Poiché $\overline{O_T(x)} \in \mathcal{F}$, concludiamo che $\overline{O_T(x)} = F_0$. In particolare $x \in \overline{O_T(x)}$. Dunque x è ricorrente. □

2.3.2 Spazi di misura e Teorema di ricorrenza di Poincaré

Sia X un insieme non vuoto. Una *σ-algebra* $\mathfrak{B}$ su X è una sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ contenente X e chiusa per complementi e per unioni numerabili.

Esempio 2.12. (a) Per un insieme non vuoto X la più grande σ-algebra su X è ovviamente $\mathcal{P}(X)$, mentre la più piccola è $\mathfrak{N} = \{X, \emptyset\}$.

(b) Per ogni spazio topologico X denotiamo con $\mathfrak{B}(X)$ la *σ-algebra di Borel* di X (questa è la σ-algebra di X generata dalla topologia di X).

Una *misura* μ su una σ-algebra $\mathfrak{B}$ su X è una funzione $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tale che $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty B_n = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n)$ per ogni famiglia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ di elementi a due a due disgiunti di $\mathfrak{B}$ (σ-additività). Diciamo che la misura μ è:

- una *misura di probabilità* se $\mu(X) = 1$;
- una *misura Boreliana* se X è uno spazio topologico e $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathfrak{B}$.
- una *misura Boreliana regolare* se X è uno spazio topologico e μ è misura di probabilità Boreliana tale che per ogni $B \in \mathcal{B}(X)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto U_ε e un insieme chiuso C_ε tali che $C_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ e $\mu(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Esempio 2.13. Per un insieme non vuoto X e $x \in X$ consideriamo la misura δ_x definita da $\delta_x(A) = 1$ se $x \in A$ e $\delta_x(A) = 0$ se $x \notin A$. Questa è una misura di probabilità detta *misura atomica*.

Diciamo che una misura di probabilità μ su $(X, \mathfrak{B})$ è *concentrata su* qualche $B \in \mathfrak{B}$ se $\mu(B) = 1$. Se μ è concentrata su sottoinsieme finito F di X e $\mathfrak{B} = P(X)$, diciamo che μ è *totalmente atomica*.

Esercizio 2.14. Descrivere le misure totalmente atomiche su un insieme X.

Definizione 2.15. Uno *spazio di misura* è una tripla $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, dove X è un insieme non vuoto, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una σ-algebra su X e μ è una misura su $\mathfrak{B}$. Uno spazio di misura $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ è detto *spazio di probabilità* se μ è una misura di probabilità (i.e., $\mu(X) = 1$).

Definizione 2.16. Se $(X_i, \mathfrak{B}_i, \mu_i)$, con $i = 1, 2$, sono spazi di misura, allora una trasformazione $T : (X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1) \to (X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$:

- è *misurabile* se $T^{-1}(\mathfrak{B}_2) \subseteq \mathfrak{B}_1$;
- *preserva la misura* se T è misurabile e $\mu_1(T^{-1}(A)) = \mu_2(A)$ per ogni $A \in \mathfrak{B}_2$.

Il prossimo teorema garantisce che la maggior parte dei punti di un qualunque insieme E di misura positiva ritorna spesso in E per iterazioni positive di T. Più precisamente poniamo

$$R_P(T, E) = \{x \in E : T^n x \in E \text{ per infiniti } n \in \mathbb{N}_+\},$$

i.e., $R_P(T, E)$ è l'insieme di tutti i punti di E *ricorrenti* rispetto a T.

Teorema 2.17 (Teorema di ricorrenza di Poincaré)**.** *Sia T una trasformazione di uno spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ che preserva la misura. Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}$ con $\mu(E) > 0$ si ha $\mu(R_P(T, E)) = \mu(E)$.*

Dimostrazione. Per ogni $m \in \mathbb{N}_+$ siano $E_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} T^{-n}E$ e $F = \bigcap_{n=m}^{\infty} E_m$. Allora si può facilmente provare che $R_P(T, E) = F \cap E$. Vediamo che

$$\mu(E_0) = \mu(F). \tag{4}$$

Infatti notiamo che

$$E_0 \supseteq F \cup E \text{ e } E_{m+1} = T^{-1}E_m \subseteq E_m \text{ per ogni } m \in \mathbb{N}_+ \tag{5}$$

e $\mu(E_{m+1}) = \mu(E_m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}_+$ poiché T preserva la misura. Allora $\mu(E_m \setminus E_{m+1}) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}_+$. Grazie a (5), questo prova (4). In particolare $\mu(E_0 \setminus F) = \mu(E \setminus F) = 0$. Di conseguenza $\mu(R_P(T, E)) = \mu(E) - \mu(E \setminus F) = \mu(E)$. □

Sottolineiamo i seguenti punti rilevanti:

- la condizione "che preserva la misura" è essenziale (vedi Esempio 2.18);
- lo spazio X è uno "spazio di probabilità" (i.e., $\mu(X) = 1$ è altrettanto importante, infatti la traslazione $T : x \mapsto x + 1$ in $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue è una biezione che preserva la misura; nonostante ciò tutti i punti di T sono wandering rispetto a T);
- la nozione di *punto ricorrente* di una trasformazione T nella struttura del teorema di ricorrenza di Poincaré è definita solo rispetto a un sottoinsieme $E \in \mathfrak{B}$ con $\mu(E) > 0$.

Nel teorema di ricorrenza di Poincaré c'è l'insieme E di misura positiva e il teorema afferma che l'intersezione di $O_T(x)$ con E contiene quasi tutti (nel senso della misura) i punti di E.

Il teorema di Birkhoff è più debole del teorema di ricorrenza di Poincaré poiché ora è possibile avere tutte le orbite convergenti a un singolo punto fissato, quindi un unico punto ricorrente:

Esempio 2.18. Sia $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da $T(x) = x/2$. Se $x \in [0, 1]$ è un punto ricorrente di T, allora x deve essere un punto di accumulazione della successione $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ convergente a 0. Dunque 0 è l'unico punto ricorrente di T. Osserviamo che T non preserva la misura di Lebesgue di X.

2.3.3 Misure invarianti

Per uno spazio topologico X denotiamo con $M(X)$ l'insieme di tutte le misure di probabilità Boreliane su X. Si può immergere X in $M(X)$ tramite l'applicazione $x \mapsto \delta_x$.

Per uno spazio metrico X ogni misura di probabilità Boreliana μ è regolare e quindi μ è completamente determinata dai suoi valori sugli aperti (o sui chiusi):

$$(\forall B \in \mathcal{B}) \;\; \mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \text{ chiuso}, \; C \subseteq B\} = \inf\{\mu(U) : U \text{ aperto}, \; U \supseteq B\}.$$

Se $T : X \to X$ è una trasformazione continua di uno spazio metrico compatto X, allora T è misurabile poiché $T^{-1}(\mathcal{B}(X)) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Sia

$$M(X, T) = \{\mu \in M(X) : T : (X, \mathcal{B}(X), \mu) \to (X, \mathcal{B}(X), \mu) \text{ è una trasformazione che preserva la misura}\}.$$

Il prossimo teorema assicura che ogni trasformazione continua di uno spazio metrico compatto ammette una misura invariante.

Teorema 2.19 (Krylov e Bogolioubov)**.** *Se $T : X \to X$ è una trasformazione continua di uno spazio metrico compatto X, allora $M(X, T) \neq \emptyset$.*

Esercizio 2.20. Sia λ la misura di Lebesgue di $[0, 1]$. Descrivere tutto gli omeomorfismi $T : [0, 1] \to [0, 1]$ che preservano la misura λ.

Esercizio 2.21. Sia $G : (0, 1] \to (0, 1]$ la mappa di Gauss definita da $G(x) = 1/x - [1/x]$ per ogni $x \in (0, 1]$.

(a) La mappa G è continua?

(b) La mappa G preserva la misura di Lebesgue λ di $[0, 1]$?

(c) Calcolare i punti periodici di G.

Il prossimo teorema mostra che l'azione di T è concentrata essenzialmente su $\Omega(T)$.

Teorema 2.22. *Sia $T : X \to X$ una trasformazione continua di uno spazio metrico compatto X.*

(a) Per ogni $\mu \in M(X,T)$ si ha $\mu(\Omega(T)) = 1$.

(b) Se esiste qualche $\mu \in M(X,T)$ con $\mu(U) > 0$ per ogni aperto non vuoto U di X, allora $\Omega(X) = X$.

Dimostrazione. (a) Se $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una base di X, allora

$$X \setminus \Omega(T) = \bigcup \{U_m : U_m \cap T^n U_m = \emptyset \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}_+\} \tag{6}$$

poiché $\Omega(T)$ è chiuso. Chiaramente $\mu(U_m) = 0$ per ogni U_m con le precedenti proprietà (poiché tutte le immagini $T^n U_m$ sono a due a due disgiunte). Per (6) questo dimostra che $\mu(\Omega(T)) = 1$.

(b) Se $x \in X \setminus \Omega(T)$, allora esiste U_m come in (6) contenente x e quindi $\mu(U_m) = 0$ — assurdo. □

Corollario 2.23. *Sia $T : X \to X$ una trasformazione continua di uno spazio metrico compatto X. Allora $\mu(\Omega_\infty(T)) = 1$ per ogni $\mu \in M(X,T)$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente $M(X,T)$ può essere identificato con $M(\Omega(X), T\restriction_{\Omega(X)})$ e $\mu(\Omega_2(T)) = 1$ per ogni $\mu \in M(X,T)$. Per induzione abbiamo che $\mu(\Omega_n(T)) = 1$ per ogni $\mu \in M(X,T)$ e ogni $n \in \mathbb{N}_+$. Siccome $\Omega_\infty(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n(T)$, abbiamo concluso la dimostrazione. □

Questo corollario implica che per le trasformazioni continue considerate nell'Esempio 2.9 ogni $\mu \in M(X,T)$ è atomica, poiché $\Omega_\infty(T)$ è finito (e.g., per il Teorema 2.22(a) $p_0 = \mu(\{0\})$, che è non negativo, e $p_1 = \mu(\{1\})$, con $p_0 + p_1 = 1$, determinano completamente μ; nel Teorema 2.22(b) $p_0 = \mu(\{0\}) = p_1 = \mu(\{1\})$ poiché $T0 = 1$ e $T1 = 0$, e dunque $p_\alpha = \mu(\{\alpha\})$ soddisfa $p_\alpha + 2p_0 = 1$).

3 La mappa di Gauss e le frazioni continue

Abbiamo definito la mappa di Gauss $G : (0,1] \to [0,1]$ ponendo $G(x) = 1/x - [1/x]$ per ogni $x \in (0,1]$.

Esercizio 3.1. Dimostrare che $x \in (0,1]$ è razionale se e solo se $G^n(x) = 0$ per qualche intero $n > 0$.

Questo fatto suggerisce di restringere la mappa G all'insieme $X = (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ di tutti i punti irrazionali di $(0,1)$. Se α è un punto irrazionale di $(0,1)$, allora $G(\alpha) = 1/\alpha - [1/\alpha]$. Quindi, con $a_1 = [1/\alpha]$, possiamo scrivere

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + G(\alpha)}. \tag{7}$$

Sia $\alpha_1 = G(\alpha)$ e si applichi (7) ad α_1 per avere $\alpha_1 = \frac{1}{a_2 + G(\alpha_1)} = \frac{1}{a_2 + G^2(\alpha)}$, dove $a_2 = [1/\alpha_1]$. Allora

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + G(\alpha_1)}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + G^2(\alpha)}}. \tag{8}$$

In questo modo si ottengono due successioni: una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ di interi positivi e una successione $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ di numeri irrazionali in $(0,1)$, tali che

$$a_{n+1} = [1/\alpha_n] \text{ e } \alpha_{n+1} = G(\alpha_n) = G^{n+1}(\alpha).$$

Allora

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + G^n(\alpha)}}}}. \tag{9}$$

Allo scopo di dare un significato più preciso alle frazioni "infinite" in (9), chiamate *frazioni continue*, consideriamo le frazioni

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{10}$$

dette *convergenti* delle frazioni continue. Assumiamo che $(p_n, q_n) = 1$, così che i denominatori dei convergenti sono $q_1 = a_1$, $q_2 = a_1 a_2 + 1, \ldots$, mentre i numeratori sono $p_1 = 1$, $p_2 = a_2, \ldots$. Entrambe le successioni $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ soddisfano la formula ricorsiva

$$u_n = a_n u_{n-1} + u_{n-2} \text{ per ogni intero } n > 2. \tag{11}$$

Allora entrambe le funzioni $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ convergono all'infinito quando $n \to \infty$. Inoltre si può facilmente vedere che

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \ldots < \alpha < \ldots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}. \tag{12}$$

Ora dimostriamo che la successione $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ converge ad α, dando così un senso preciso alla frazione continua

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} =: [0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{13}$$

Per la disuguaglianza in (12), è sufficiente verificare per induzione che

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}_+,$$

quindi $\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$. Questo dimostra che $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

Esempio 3.2. Le successioni definite ricorsivamente in (11) hanno un ruolo rilevante in matematica. Il caso più semplice è quello di una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ tale che la successione dei coefficienti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ è costante. Quando $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si ottiene la celebre successione di Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ definita da $f_1 = f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ con $n > 2$.

3.1 Le frazioni continue e lo spazio di Baire

Lo *spazio di Baire* è l'insieme $\mathbb{B} = \mathbb{N}_+^{\mathbb{N}_+}$ di tutte le successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ di interi positivi, munito della topologia prodotto, dove $\mathbb{N}_+$ ha la topologia discreta. Ora consideriamo la distanza d in $\mathbb{B}$ definita per ogni $x, x' \in \mathbb{B}$ da

$$d(x, x') = 0 \text{ se } x = x', \text{ altrimenti } d(x, x') = 1/\min\{n \in \mathbb{N}_+ : x_n \neq x'_n\}.$$

In particolare, $x_1 = x'_1$ quando $d(x, x') < 1$. Per vedere che la topologia metrica di $\mathbb{B}$ è precisamente la topologia prodotto, notiamo che un intorno basico di $a \in \mathbb{B}$ è dato, per un qualche $m \in \mathbb{N}_+$ dall'insieme $U_m(a)$ di tutti gli $a' \in \mathbb{B}$ tali che $a_n = a'_n$ per ogni $i \leq m$. Ma questo è precisamente l'insieme di tutti gli $a' \in \mathbb{B}$ con $d(a, a') < 1/m$, i.e., il disco aperto di raggio $1/m$ e centro a.

Con $X = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ come prima, consideriamo la mappa $f : X \to \mathbb{B}$ definita da $f(\alpha) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ dove $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ è la frazione continua corrispondente ad α come in (13). Poiché $\alpha = \lim_{n\to\infty} p_n/q_n$, dove $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ sono determinate come in (10), si può immediatamente concludere che la mappa f è iniettiva. Inoltre per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_+} \in \mathbb{B}$ si può definire un $\alpha \in X$ usando (13) (la convergenza della successione $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ può essere stabilita come prima). Questo dimostra che f è una biezione. Proviamo che f è un omeomorfismo. Per vedere che f è aperta prendiamo un $\alpha \in X$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Se $m > 1/\varepsilon$, allora per $a = f(\alpha) \in \mathbb{B}$ si ha $f^{-1}(B_{1/m}(a)) \subseteq (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap X$ (siccome $f(\beta) \in B_{1/m}(a)$ per $\beta \in X$ implica $|\alpha - \beta| < \varepsilon$). Per verificare che f è anche continua fissiamo un $m \in \mathbb{N}_+$ e sia $\varepsilon < |\alpha - p_m/q_m|$. Allora $f((\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap X) \subseteq B_{1/m}(f(\alpha))$.

Questo omeomorfismo permette di costruire sullo spazio X dei numeri irrazionali in $(0, 1)$ una nuova metrica ρ che induce su X la stessa topologia indotta dalla metrica usuale ma tale che (X, ρ) è completo. Poniamo semplicemente $\rho(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta))$. Allora $f : (X, \rho) \to (\mathbb{B}, d)$ è un'isometria e quindi la completezza di (X, ρ) segue dalla completezza di $(\mathbb{B}, d)$ (che è completo poiché è una potenza dello spazio completo $\mathbb{N}_+$).

4 Categorie e funtori

4.1 Le Categorie

Definizione. Una categoria $\mathcal{X}$ consiste di

- una classe $\mathcal{O}b(\mathcal{X})$ di elementi X chiamati *oggetti* della categoria;
- una classe $\mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ unione di insiemi $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$, dove (X_1, X_2) varia tra le coppie ordinate di oggetti della categoria, i cui elementi $\varphi : X_1 \to X_2$ (piú brevemente indicati col solo φ) sono detti *morfismi di dominio* X_1 *e codominio* X_2;

- una legge di composizione associativa

$$\circ : \mathrm{Hom}(X_2, X_3) \times \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \to \mathrm{Hom}(X_1, X_3),$$

per ogni tripla ordinata (X_1, X_2, X_3) di oggetti della categoria, che associa in modo univoco ad una coppia di morfismi (φ, ψ) appartenente a $\mathrm{Hom}(X_2, X_3) \times \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$, un morfismo $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_3)$ detto composizione di φ e ψ.

Devono inoltre essere verificate le seguenti proprietà:

1. gli insiemi $\mathrm{Hom}(X, X')$ e $\mathrm{Hom}(Y, Y')$ sono disgiunti se le coppie di oggetti (X, X') e (Y, Y') non coincidono;
2. per ogni oggetto X esiste un morfismo $1_X : X \to X$ in $\mathrm{Hom}(X, X)$ tale che si abbia $1_X \circ \alpha = \alpha$ e $\beta \circ 1_X = \beta$ per ogni coppia di morfismi $\alpha \in \mathrm{Hom}(X', X)$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(X, X')$.

Esempi 4.1. *Nel seguito faremo uso delle seguenti categorie:*

1. **Set** – *insiemi e applicazioni,*
2. **PoSet** *insiemi parzialmente ordinati $(X, \leq)$ e morfismi di insiemi parzialmente ordinati (applicazioni $f : (X, \leq_1) \to (Y, \leq_2)$ che preservano l'ordine, cioé $f(x) \leq_2 f(y)$ se $x \leq_1 y$).*
3. $\mathbf{Vett}_K$ – *spazi vettoriali sopra il campo K e applicazioni lineari,*
4. **Grp** – *gruppi e omomorfismi gruppali,*
5. **AbGrp** – *gruppi abeliani e omomorfismi gruppali,*
6. **Rng** – *anelli e omomorfismi di anelli,*
7. **Fld** – *campi e omomorfismi di campi,*

Definizione 4.2. *Se la classe $\mathcal{O}b(\mathcal{X})$ è un insieme, la categoria $\mathcal{X}$ viene detta piccola.*

Chiaramente, $\mathcal{X}$ é piccola se e solo se la classe $\mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ é un insieme.

Esempi 4.3. *Diamo qui alcuni esempi di categorie piccole.*

(a) *Sia A un insieme non-vuoto. Sia $\mathfrak{S}_A$ la categoria con oggettu tutti i sottoinsiemi di A e morfismi definiti come segue:*

$$Hom(X, Y) = \begin{cases} \emptyset, & se\ X \not\subseteq Y, \\ \{\iota\}, & se\ X \subseteq Y\ e\ \iota : X \hookrightarrow Y\ \text{é l'inclusione.} \end{cases}$$

$\mathfrak{S}_A$ é piccola perche $\mathcal{O}b(\mathfrak{S}_A) = \mathcal{P}(A)$ é un insieme.

(b) *Sia $(X, \leq)$ un insieme parizalmente ordinato. Consideriamo la categoria $\mathcal{X}$ con $\mathcal{O}b(\mathcal{X}) = X$ e $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, y)| \leq 1$ per ogni $x, y \in X$, con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, y) \neq \emptyset$ precisamente quando $x \leq y$. L'esempio del punto (a) é un caso particolare di questo, con $X = \mathcal{P}(A)$ e l'ordine per inclusione in X.*

(c) *Sia $(M, \cdot, e)$ un monoide. Consideriamo la categoria $\mathcal{X}$ con unico oggetto $\mathcal{O}b(\mathcal{X}) = \{M\}$ e morfismi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(M, M) = M$ con legge di composizione "$\cdot$ e $1_M = e$.*

(d) *Per ogni insieme A la categoria $\mathbf{Set}_A$ con oggetti tutti i sottoinsiemi di A e morfismi gli applicazioni tra loro.*

(c) *Per un campo K la categoria $\mathbf{Matr}_K$ con oggetti $\mathbb{N}$ e per $m, n \in \mathbb{N}$ morfismi $Hom(m, n) := M_{mn}(K)$ l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ su K con composizione la moltiplicazione di matrici riga per colonna.*

4.1.1 Sottocategorie di una categoria

Definizione 4.4. *Sia $\mathcal{X}$ una categoria. Una categoria $\mathcal{Y}$ si dice* sottocategoria *di $\mathcal{X}$, se*

(a) *ogni oggetto Y di $\mathcal{Y}$ è anche un oggetto di $\mathcal{X}$;*

(b) *ogni morfismo di $\mathcal{Y}$ è anche un morfismo di $\mathcal{X}$ (in altre parole, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(Y_1, Y_2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Y_1, Y_2)$ per Y_1, Y_2 oggetti di $\mathcal{Y}$); e*

(c) *per ogni coppia di morfismi componibili f, g in $\mathcal{Y}$ la composizione in $\mathcal{Y}$ di f e g coincide con quella fatta in $\mathcal{X}$.*

La sottocategoria $\mathcal{Y}$ di $\mathcal{X}$ si dice *piena* se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Y_1, Y_2)$ per ogni coppia Y_1, Y_2 di oggetti di $\mathcal{Y}$. Se $\mathcal{Z}$ é una sottocategoria (piena) di $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}$ é una sottocategoria (piena) di $\mathcal{X}$, allora $\mathcal{Z}$ é una sottocategoria (piena) di $\mathcal{X}$.

Esempi 4.5. *Nel seguito daremo esempi di sottocategorie:*

1. *per ogni insieme A la categoria* $\mathbf{Set}_A$ *(vedi Esempio 4.3) é una sottocategoria piena di* **Set**, *mentre* $\mathfrak{S}_A$ *é una sottocategoria non piena di* $\mathbf{Set}_A$ *(e di* **Set***);*
2. **AbGrp** *é sottocategoria piena di* **Grp**,
3. **Fld** *é una sottocategoria piena di* **CRng**,

4.1.2 Le categorie Top, Met e Toph

La categoria **Top** degli spazi topologici ha come classe degli oggetti tutti gli spazi topologici e come classe degli morfismi le applicazioni continue tra gli spazi topologici. Ecco alcuni esempi di sottocategorie piene di **Top**:
- la sottocategoria **Comp** con oggetti tutti gli spazi compatti,
- la sottocategoria **Conn** con oggetti tutti gli spazi connessi,
- la sottocategoria **TSconn** con oggetti tutti gli spazi totalmente sconnessi,
- la sottocategoria **0-dim** con oggetti tutti gli spazi zero-dimensionali,
- la sottocategoria $\mathbf{Top}_i$ con oggetti tutti gli spazi topologici che soddisfanno l'assioma di separazione T_i, dove $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

In nessuno di questi casi abbiamo specificato i *morfismi*, perchè nel caso di sottocategorie piene i morfismi tra due oggetti della sottocategoria restano quelli delle categoria abmiente. In altre parole, in tutti i casi menzionati sopra i morfismi sono semplicemente le applicazione contuinue come nel caso di tutta la categoria **Top**.

La categoria **Met** degli spazi metrici ha come classe degli oggetti la classe di tutti gli spazi metrici e come classe degli morfismi le applicazioni contraenti tra spazi metrici. Considerando uno spazio metrico (X, d) anche come spazio topologico (X, τ_d), possiamo vedere **Met** come sottocategoria di **Top**, essendo uni applicazione contraente tra spazi metrici anche continua rispetto alla topologia generata dalla metrica. Tuttavia, esistono applicazioni contiunue tra due spazi metrici che non risultano contraenti rispetto alle metriche considerato (dare un esempio). Quindi, **Met** non é una sottocategoria piena di **Top**

Per due applicazioni continue $f, g : X \to Y$ in **Top** diciamo che f *é omotopa a* g e scriviamo $f \sim g$ se esiste é un'applicazione continua $H : X \times [0, 1] \to Y$, detta *homotopia*, tale che $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = g(x)$ per ogni $x \in X$. Intuitivamente, la famiglia di applicazioni $H_t : X \to Y$ $(t \in [0, 1])$ definiti con $H_t(x) = (x, t)$ per ogni $x \in X$, presenta una specie di deformazione continua tra gli le applicazioni $f = H_0$ a $g = H_1$.

Esercizio 4.6. *Verificare che $\sim$ é una relazione di equivalenza in $Hom_{\mathbf{Top}}(X, Y)$. Inoltre vale*

$$g \circ f \sim g_1 \circ f_1, \text{ se } g \sim g_1 \text{ e } f \sim f_1. \tag{1}$$

Denotiamo con $[f]$ la classe di equivalenza di f. La proprietà (1) ci da la possibilità di definire correttamente la composizione $[g] \circ [f] := [g \circ f]$. Con questa composizione viene fuori la categoria *omotopica* **Toph**, avente come classe degli oggetti sempre la classe di tutti gli spazi topologici, ma come morfismi tra due spazi X e Y le classi di equivalenza $[f]$ delle applicazioni $f \in Hom(X, Y)$. In altra parole, $Hom_{\mathbf{Toph}}(X, Y) = Hom_{\mathbf{Top}}(X, Y)/\sim$.

Esercizio 4.7. *(a) Siano $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue, dove X é uno spazio topologico. Dimostrare che $f \sim g$.*

(b) Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue, dove X é uno spazio topologico e Y é un sottoinsieme convesso[2] *di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $f \sim g$.*

(c) Siano $f, g : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ due applicazioni continue, dove X é uno spazio topologico e $f(X) \subseteq \mathbb{R}_+ = -\{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, $f(X) \subseteq \mathbb{R}_- = \{r \in \mathbb{R} : r < 0\}$. Dimostrare che $f \not\sim g$.

4.1.3 Insiemi puntati, spazi topologici puntati, la categoria delle coppie

Sia $\mathbf{Set}_*$ la categoria avente come oggetti tutti le coppie (X, x), dove X é un insieme non vuoto e $x \in X$. Come morfismi $(X, x) \to (Y, y)$ di $\mathbf{Set}_*$ si prendono le applicazioni $f : X \to Y$ con $f(x) = y$.

Spazio topologico puntato é una coppia (X, x), dove X é uno spazio topologico e $x \in X$ é un punto. Morfismo tra due spazi topologici puntati (X, x) e (Y, y) é un'applicazione continua $f : X \to Y$ tale che $f(x) = y$. La categoria

[2] cioé se $y_1, y_2 \in Y$, allora anche il segmento che li connette in $\mathbb{R}^n$ sta in Y.

$\mathbf{Top}_*$ degli spazi puntati ha come oggetti gli spazi topologici puntati e come morfismi gli morfismo tra spazi topologici puntati.

In topologia algebrica si usa spesso anche la categoria $\mathbf{Top}^2$ delle copie (X, A), dove X é uno spazio topologico e A un sottospazio di X. I morfismi $(X, A) \to (Y, B)$ in $\mathbf{Top}^2$ sono le applicazioni continue $f : X \to Y$, tali che $f(A) \subseteq B$. Chiaramente, $\mathbf{Top}_*$ é un sottocategoria di $\mathbf{Top}^2$.

4.2 I funtori

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due categorie. Abbiamo considerato sopra il caso quando $\mathcal{Y}$ é sottocategoria di $\mathcal{X}$. Adesso introduciamo un concetto più generale.

Definizione 4.8. *Diciamo funtore covariante (risp. controvariante) tra le categorie $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ una applicazione $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ che ad ogni oggetto $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{X})$ associa un oggetto $T(X) \in \mathcal{O}b(\mathcal{Y})$ e ad ogni morfismo $\alpha : X \to X'$ in $\mathcal{X}$ associa un morfismo $T(\alpha) : T(X) \to T(X')$ (risp. $T(\alpha) : T(X') \to T(X)$) in $\mathcal{Y}$ in modo che siano verificate le seguenti proprietà:*

1. $T(1_X) = 1_{T(X)}$ *per ogni* $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{X})$;
2. $T(\alpha \circ \beta) = T(\alpha) \circ T(\beta)$ *(risp.* $T(\alpha \circ \beta) = T(\beta) \circ T(\alpha)$*).*

Se $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $S : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ sono due funtori, allora la *composizione* $S \cdot T$ di T e S è il funtore $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ che associa ad un oggetto X di $\mathcal{X}$ l'oggetto $S(T(X))$ di $\mathcal{Z}$ e al morfismo $\alpha : X \to X'$ in $\mathcal{X}$ associa il morfismo $S(T(\alpha))$. Non è difficile vedere che $S \cdot T$ è covariante precisamente quando entrambi T e S sono covarianti (o controvarianti), mentre $S \cdot T$ è controvariante se uno dei funtori T, S è covariante e l'altro è controvariante.

Un funtore $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definisce una mappa

$$\mathrm{Hom}(X, X') \to \mathrm{Hom}(T(X), T(X'))$$

per ogni coppia di oggetti della categoria $\mathcal{X}$. Diremo T *fedele* se tali mappe sono iniettive, *pieno* se sono suriettive.

Tornando al caso quando $\mathcal{Y}$ é sottocategoria di $\mathcal{X}$, vediamo subito che l'inclusione $I : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ é un funtore fedele. Inoltre, $\mathcal{Y}$ é una sottocategoria piena precisamenet quando il funtore I é pieno.

4.2.1 Primi esempi

Definizione 4.9. *Una categoria $\mathcal{X}$ si dice* concreta *se ammette un funtore fedele $U : \mathcal{X} \to$* **Set** *(in tal caso il funtore si dice* dimenticante*).*

Esempio 4.10.
- Le categorie (1)-(9) nell'Esempio 1.2 sono tutte concrete.
- La categoria piccola relativa ad un insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$ in esercizio 4.3 (a) è concreta per il funtore U definito come segue. Se $x \in X$, allora $U(x) = \{z \in X : z \leq x\}$. Chiaramente $x \leq y$ implica $U(x) \subseteq U(y)$. Quindi, se $x \leq y$ in X, all'unico morfismo $h_{x,y}$ in $Hom(x, y)$ mettiamo in corrisponenza l'inclusione $U(h_{x,y})$ di $U(x)$ in $U(y)$. Il funtore $U : \mathcal{X} \to \mathbf{Set}$ é fedele (ma non é pieno), pertanto $\mathcal{X}$ risulta concreta.
- Per quanto riguarda l'esempio 4.3 (b), anche quella categoria è concreta, con il funtore dimenticante $U : S \to \mathbf{Set}$ definito come segue. Per ogni $a \in S$ denotiamo con τ_a la traslazione a sinistra in S, ovvero la mappa $x \mapsto ax$. Allora poniamo $U(S) = S$ e $U(a) = \tau_a$) e notiamo che questo definisce un funtore dimenticante $U : S \to \mathbf{Set}$.
- Sia $\mathcal{X}$ una categoria e una $\mathcal{Y}$ sottocategoria di $\mathcal{X}$. Allora l'inclusione $i : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ risulta un funtore e la sottocategoria $\mathcal{Y}$ di $\mathcal{X}$ e piena se e solo se il funtore i è pieno.
- La topologia di Alexandroff-Tucker definisce un funtore **PoSet** $\to$ **Top**.
  Nel verso opposto c'é un funtore **Top** $\to$ **PoSet** determinato dal cosí detto *specialization order* di uno spazio topologico X. Per $x, y \in X$ si pone $x \leq y$ se per $y \in U$ implica $x \in U$ per ogni aperto U di X. Se X é T_0, la relazione $x \leq y$ risulta un ordine parziale su X. Inoltre, se $f : X \to Y$ é un'applicazione continua, allora $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ é monotona (se $x \leq z$ in X, allora per ogni aperto U in Y contenente $f(z)$ l'aperto $f^{-1}(U)$ di X contiene y e quindi anche $x \in f^{-1}(U)$, cioé $f(x) \in U$; questo dimostra che $f(x) \leq f(y)$).

Diamo adesso altri esempi di funtori.

Esempio 4.11. (a) Sia A un insieme non-vuoto.

(a_1) Ponendo $F_A(\emptyset) = \{\emptyset\}$ e $F_A(X) = A^X$ per ogni insieme non-vuoto X definiamo un funtore controvariante $F_A : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ con $F_A(f)$, per un applicazione $f : X \to Y$, definita da $F_A(f)(\xi) = \xi \circ f$ per ogni $\xi \in A^Y$.

(a_2) Ponendo $G_A(\emptyset) = \{\emptyset\}$ e $G_A(X) = X^A$ per ogni insieme non-vuoto X definiamo un funtore covariante $G_A : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ con $G_A(f)$, per un applicazione $f : X \to Y$, definita da $G_A(f)(\eta) = f \circ \eta$ per ogni $\eta \in X^A$.

(b) Ora consideriamo un caso particolare in (a) con $A = \{0, 1\}$. Per (a_1) si ha $F_A = \{0, 1\}^X$ in questo caso (vedrermo nel seguito la relazione di questo funtore con il funtore controvariante definito in (c)). Mentre (a_2) con questo A dà $G_{\{0,1\}}(X) = X^2$ e per un'applicazione $f : X \to Y$ si ha $G_{\{0,1\}}(f) = f \times f : X^2 \to Y^2$.

(c) Ora consideriamo due funtori $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}_*$ definiti entrambi con $X \to (P(X), \{\emptyset\})$ sugli oggetti, ma il primo covariante, con $P_*(f) = f(A)$ for ogni $A \in P(X)$, mentre il secondo controvariante, definito con $P^*(B) = f^{-1}(B)$ per $B \in P(B)$.

(d) Per $V \in \mathbf{V}ett_K$ poniamo $V^* = Hom_K(V, K)$, lo spazio dei funzionali lineari $V \to K$. Per un'applicazione lineare $f : V \to U$ e per un $\xi \in U^*$ poniamo $f^*(\xi) := \xi \circ f$. Allora $* : \mathbf{V}ett_K \to \mathbf{V}ett_K$ é un funtore controvariante.

(e) Per ogni gruppo abeliano A definiamo un funtore controvariante $F_A : \mathbf{AbGrp} \to \mathbf{AbGrp}$ con $F_A(G) = Hom_{\mathbf{AbGrp}}(G, A)$ e con $F_A(f)(\xi) = \xi \circ f$ per ogni $\xi \in A^Y$. Di grande rilevanza é il caso $A = \mathbb{S}$, il gruppo del cerchio unitario.

Gli esempi dei punti (a_1), (d) ed (e) sono casi particolari del cosí detto *funtore presentabile* $F_A : \mathcal{X} \to \mathbf{Set}$ definito per un oggetto A di $\mathcal{X}$ con $F_A(X) = \mathrm{Hom}(X, A)$ e $F_A(f) = \xi \circ f$ per ogni $\xi \in A^Y$. Nei punti (d) ed (e) l'insieme $\mathrm{Hom}(X, A)$ porta una struttura naturale di spazio vettoriale (rispettivamente, gruppo abeliano), per questo risulta $F_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (nel caso degli spazi vettoriali $A = K$).

Analogamente si possono costruire funtori $\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$.

Esempio 4.12. *Sia (Y, d) uno spazio metrico.*

(1) Per ogni spazio topologico X l'assegnazione $X \mapsto (Y^X, \tau_p)$ definisce un funtore controvariante $F_Y : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ (con $F_Y(\varphi) = \varphi \circ f$ per ogni morfismo $f : X \to Z$ in $\mathbf{Top}$ e $\varphi \in Z^X$).

(2) Analogamente, si definisce un funtore controvariante $G_Y : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ ponendo $G_Y(X) = (Y^X, \tau_u)$ e $G_Y(f)(\varphi) = \varphi \circ f$ per ogni morfismo $f : X \to Z$ in $\mathbf{Top}$ e $\varphi \in Z^X$.

Di grande utilità é il funtore $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_0$ costruito come segue. Per uno spazio X denotiamo con FX il quoziente di X rispetto alla relazione di equivalenza $x \sim y$ se e solo se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Se $f : X \to Z$ é un morfismo in $\mathbf{Top}$, allora $x \sim y$ in X implica $f(x) \sim f(y)$ in Y, pertanto questo induce (verificare) un'applicazione continua $Ff : FX \to FY$.

Esercizio 4.13. *Verificare che:*

(a) FX é uno spazio T_0, e $Ff : FX \to FY$ é definita correttamente. Pertanto F risulta un funtore $F : Top \to \mathbf{Top}_0$

(b) Per ogni spazio topologico X e per ogni applicazione continua $g : X \to Y$, dove Y é uno spazio T_0, esiste un'unica applicazioen continua $g' : FX \to Y$ take che $g = g' \circ q_X$, dove $q_X : X \to FX$ é l'applicazione canonica da X al suo quoziente FX.

(c) Per $q_X : X \to FX$ come in (b) dimostrare che

(c_1) Lo spazio topologico X é compatto se e solo se FX é compatto;

(c_2) X é connesso se e solo se FX é connesso.

4.2.2 Il funtore π_1 di Poincaré

Ricordiamo adesso la definizione del *gruppo fondamentale* $\pi_1(X, x_0)$ di uno spazio topologico X rispetto al punto $x_0 \in X$, nozione introdotta da Poincaré circa un secolo fa. Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ ci permetterà di definire un funtore $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ nel modo seguente.

Per uno spazio puntato (X, x_0) si definisce un camino chiuso γ puntato in x_0 come un applicazione continua $\gamma : I \to X$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Denotiamo con $\Gamma_{x_0}(X)$ l'insieme di tutti i camini in X puntati in x_0. La composizione $\gamma_1 * \gamma_2$ di due cammini $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{x_0}(X)$ é definita come segue:

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1), t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

In altre parole, il cammino $\gamma_1 * \gamma_2$ consiste nel percorrere in doppia velocità prima γ_1 e poi γ_2. Purtroppo l'operazione binaria $*$ di $\Gamma_{x_0}(X)$ non ha buone proprietà, per esempio essa non é neanche associativa. Tuttavia, essa é compatibile con l'omotopia nel modo seguente

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ e } \gamma_1' \sim \gamma_2' \text{ implicano } \gamma_1 * \gamma_1' \sim \gamma_2 * \gamma_2'. \tag{$*$}$$

Ora denotiamo con $\pi_1(X, x_0)$ le classi di equivalenza di $\Gamma_{x_0}(X)$ rispetto alla relazione di omotopia $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Grazie a (*) l'operazione $*$ induce un'operazione binaria $\cdot$ in $\pi_1(X, x_0)$, con la quale $\pi_1(X, x_0)$ risulta un gruppo, detto *gruppo fondamentale* (o *gruppo di omotopia*) di X rispetto al punto x_0. Come elemento neutro del gruppo serve il cammino costante x_0 (o più precisamente, la sua classe di omotopia).

Se X é connesso per archi allora $\pi_i(X, x_0) \cong \pi_i(X, x_1)$ per ogni coppia di punti x_0, x_1 di X. In questo caso si scrive semplicemente $\pi_1(X)$ invece di $\pi_1(X, x_0)$.

Per finire la definizione del funtore π_1 abbiamo bisogno di definirlo su ogni morfismo $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ in $\mathbf{Top}_*$. Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{x_0}(X)$ e $\gamma_1 \sim \gamma_2$, allora anche $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_1$ in $\Gamma_{y_0}(Y)$. Cosi si definisce un'applicazione $\pi_1(f) : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ (verificare per esercizio che $\pi_1(f)$ é un omomorfismo di gruppi.

Per la circonferenza $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ si ha $\pi_1(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}$, mentre per il disco $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ si ha $\pi_1(B^2) = 1$ per l'esercizio 4.7.

Come un'applicazione di questo funtore dimostriamo che il disco B^2 soddisfa il teorema del punto fisso. Consideriamo prima un caso facile:

Esempi 4.14. *Siano $a < b$ numeri reali. Allora ogni funzione continua $f : [a, b] \to [a, b]$ ha un punto fisso, cioè, esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = x$. Infatti, supponiamo che $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Allora la funzione $g(x) = f(x) - x$ assume valori $g(a) < 0 < g(b)$. Quindi esiste $x \in [a, b]$ con $g(x) = 0$ e quindi $f(x) = x$.*

Questo teorema si estende anche a $\mathbb{R}^n$: *ogni funzione continua $f : [0, 1]^n \to [0, 1]^n$ ha un punto fisso* (teorema di Brauwer del punto fisso). Per $n > 1$ la dimostrazione è molto più difficile. Ora affrontiamo il caso $n = 2$ notando che $[0, 1]^2$ é omeomorfo al disco B^2.

Teorema 4.15. *Ogni funzione continua $f : B^2 \to B^2$ possiede un punto fisso $x \in B^2$ (cioé $f(x) = x$).*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esiste una funzione continua $f : B^2 \to B^2$ senza punti fissi. Allora possiamo costruire un'applicazione continua (retrazione) $r : B^2 \to \mathbb{S}$ con $r(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{S}$ come segue. Consideriamo per ogni $z \in B^2$ la proiezione $pr_z : B^2 \setminus \{z\} \to \mathbb{S}$ (con centro z) che invia tutti i punti y di $B^2 \setminus \{z\}$ sulla circonferenza $\mathbb{S}$ in modo da trovare la proiezione $pr_z(y) \in \mathbb{S}$ come il punto di intersezione di $\mathbb{S}$ con la rete che passa per i punti z e y (lasciando y un punto interno dell'intervallo determinato da z e $pr_z(y)$). Ovviamente, $pr_z(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{S}$. Definiamo adesso $r : B^2 \to \mathbb{S}$ ponendo $r(x) := pr_x(x)$ per $x \in B^2$. Applicando ora il funtore π_1 alla composizione

$$\mathbb{S} \xhookrightarrow{j} B^2 \xrightarrow{r} \mathbb{S} \tag{$*$}$$

troviamo la composizione

$$\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S}) \xrightarrow{\pi_1(j)} \pi_1(B^2) = 0 \xrightarrow{\pi_1(r)} \pi_1(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}. \tag{$**$}$$

Essendo la composizione (*) l'identità di $\mathbb{S}$, la sua immage tramite π_1 deve essere l'identità di $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S})$. D'altra parte, essa deve coincidere anche con la compositzione degli omomorfismi $\pi_1(j)$ e $\pi_1(r)$ in (**) che é zero perché si fattorizza per il gruppo banale 0. Assurdo. $\square$

Esercizio 4.16. * *Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}^2$.*

Esercizio 4.17. *Dimostrare che il funtore π_1 si può introdurre anche nel modo seguente. Per l'oggetto $(\mathbb{S}, 1)$ di $\mathbf{Top}_*$ e un $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_0$ si consideri nell'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((\mathbb{S}, 1), (X, x_0))$ la relazione di equivalenza $\sim$ definita dalla homotopia. Provare che $\pi_1(X, x_0) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((\mathbb{S}, 1), (X, x_0))/\sim$ come insieme.*