Percorsi di Manhattan

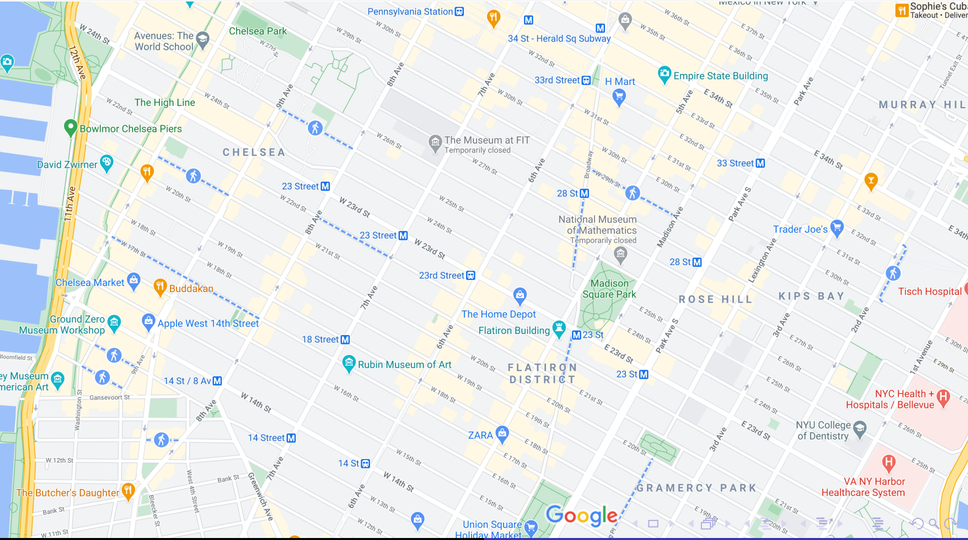
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

Corso di Programmazione

Outline

Girovagare di un flâneur . . . a Manhattan

Manhattan’s Avenues & Streets. . .



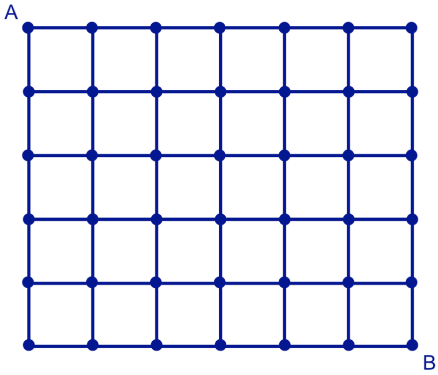
Problema

Considera una rete urbana organizzata nello stile del quartiere "Manhattan" di New York, dove tutte le vie si incrociano perpendicolarmente e tutti gli isolati in cui sorgono gli edifici hanno pianta quadrata con i lati della stessa lunghezza L.
Per semplicità possiamo supporre che le vie siano orientate orizzontalmente o verticalmente in una mappa.

Se A e B individuano due incroci che distano i isolati in direzione verticale e j isolati in direzione orizzontale, allora ogni percorso da A a B che non sia più lungo del necessario misura $(i + j)L$.

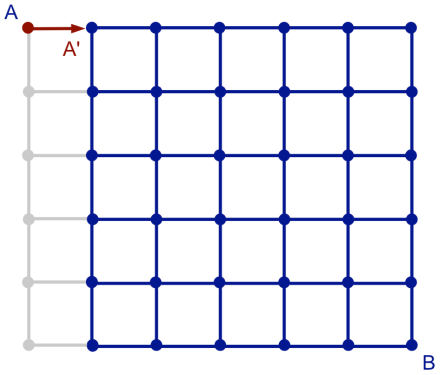
Quanti percorsi alternativi di questo tipo ci sono?
In altri termini, qual è il numero $paths(i, j)$ di percorsi diversi di lunghezza minima dall'incorocio A all'incrocio B?

Esempio



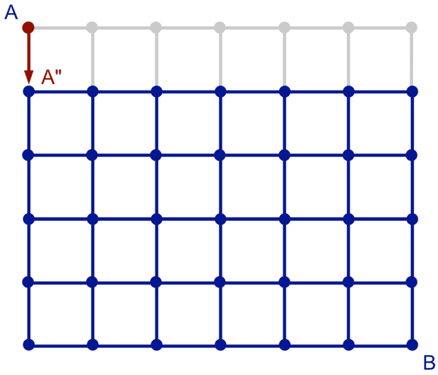
Percorsi da A a B: $paths(i, j)$

Casi ricorsivi: o il primo spostamento è orizzontale



Percorsi da A′ a B: $paths(i, j-1)$

Casi ricorsivi: oppure è verticale



Percorsi da A″ a B: $paths(i-1, j)$

Casi base: A e B si trovano sulla stessa “Avenue”

A e B allineati: $paths(0, j)$

Casi base: A e B si trovano sulla stessa “Street”

A e B allineati: $paths(i, 0)$

Schema ricorsivo

In sintesi:

- $paths(0, j) = paths(i, 0) = 1 \quad$ per $i,\ j \geq 0$
- $paths(i, j) = paths(i, j-1) + paths(i-1, j) \quad$ per $i,\ j > 0$

Schema ricorsivo

In sintesi:

- $paths(0, j) = paths(i, 0) = 1 \quad$ per $i,\ j \geq 0$
- $paths(i, j) = paths(i, j-1) + paths(i-1, j) \quad$ per $i,\ j > 0$

Schema ricorsivo

In sintesi:

- $paths(0, j) = paths(i, 0) = 1 \quad$ per $i,\ j \geq 0$
- $paths(i, j) = paths(i, j-1) + paths(i-1, j) \quad$ per $i,\ j > 0$

Ricorsione ad albero (tree recursion)