ESERCIZIO DI ASD DEL 11 MAGGIO 2009

Minimum Spanning Tree

$L_1 = L_2$**.** Si noti che $L_1 = L_2$ non implica $T_1 = T_2$. Se si considera il grafo $G = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}, W)$, dove W assegna ad ogni arco peso 1, abbiamo che G ha tre minimum spanning tree distinti, ma questi hanno sempre lista dei pesi pari a $L = [1, 1]$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due minimum spanning tree T_1 e T_2 a cui corrispondono le due liste ordinate di pesi L_1 ed L_2 rispettivamente tali che $L_1 \neq L_2$.

Sia i il minimo indice tale che $L_1[i] \neq L_2[i]$. Non è restrittivo supporre che $L_1[i] < L_2[i]$ (se questo non vale basta scambiare il ruolo di L_1 ed L_2). $L_1[i]$ è il peso di un arco $\{x, y\}$ che appartiene a T_1.

Siano $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_m, y_m\}$ gli archi che compaiono in T_1 e che hanno peso $L_1[i]$. Sicuramente almeno uno di questi archi non compare in T_2 perché $L_2[i] > L_1[i]$. Sia $\{x_j, y_j\}$ uno degli archi sopra menzionati che manca in T_2.

In T_2 c'è un cammino che connette x_j ed y_j. Indichiamo tale cammino con $path_{T_2}(x_j, y_j)$.

Se in $path_{T_2}(x_j, y_j)$ c'è un arco di peso maggiore di $\{x_j, y_j\}$, allora T_2 non è un minimum spanning tree (potrei togliere l'arco e sostituirlo con $\{x_j, y_j\}$. Quindi siamo giunti ad un assurdo.

Se in $path_{T_2}(x_j, y_j)$ tutti gli archi hanno peso minore di $\{x_j, y_j\}$, allora T_1 non è un minimum spanning tree (c'è almeno un arco che manca in T_1 quindi potrei togliere $\{x_j, y_j\}$ da T_1 e sostituirlo con questo arco). Quindi siamo giunti ad un assurdo.

Quindi l'unica possibilità che resta aperta è che tutti gli archi che compaiono in $path_{T_2}(x_j, y_j)$ e che non sono in T_1 abbiano peso uguale al peso di $\{x_j, y_j\}$ ed inoltre c'è almeno un arco in $path_{T_2}(x_j, y_j)$ che non compare in T_1 e che ha peso uguale al peso di $\{x_j, y_j\}$. D'altra parte sicuramente questa situazione non può succedere per tutti gli archi della forma $\{x_k, y_k\}$ che compaiono in T_1 e non in T_2, perchè sappiamo che in T_2 ci sono meno archi di peso $L_1[i]$ rispetto a T_1. Quindi anche in questo caso giungiamo ad un assurdo. □

A **Minimum Spanning Tree.** L'affermazione è falsa in quanto non è detto che A sia un albero di copertura. Come controesempio si consideri il grafo $G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{c, d\}\}, W)$, dove W assegna peso 1 ad ogni arco. Un minimum spanning tree di G è $T = \{\{b, c\}, \{c, a\}, \{c, d\}\}$ a cui corrisponde la lista $L = [1, 1, 1]$. Quindi tutti i minimum spanning tree di G avranno lista dei pesi uguale ad L. D'altra parte l'insieme $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$ ha lista dei pesi uguale ad L, ma non è un albero di copertura (ha un ciclo e non connette il vertice d).

Date: 11 Maggio 2009.