Entropia algebrica per gruppi abeliani

Anna Giordano Bruno
(in collaborazione con Dikran Dikranjan)

INdAM
Roma, 25 maggio 2010

G gruppo abeliano, $\phi \in \mathrm{End}(G)$, $\emptyset \neq F \subseteq G$ finito, $n > 0$.

- La *n-esima ϕ-traiettoria* di F è

$$T_n(\phi, F) = F + \phi(F) + \ldots + \phi^{n-1}(F).$$

- L'*entropia algebrica di ϕ rispetto a F* è

$$H(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |T_n(\phi, F)|}{n}.$$

- (Peters) L'entropia algebrica di $\phi : G \to G$ è

$$h(\phi) = \sup\{H(\phi, F) : F \subseteq G \text{ finito, non vuoto}\}.$$

- (Weiss) L'*entropia algebrica* di $\phi : G \to G$ è

$$\mathrm{ent}(\phi) = \sup\{H(\phi, F) : F \leq G \text{ finito}\}.$$

- $T_n(\phi, F) = F + \phi(F) + \ldots + \phi^{n-1}(F)$.
- $H(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |T_n(\phi,F)|}{n}$.
- (Peters) $h(\phi) = \sup\{H(\phi, F) : F \subseteq G$ finito, non vuoto$\}$.
- (Weiss) $\mathrm{ent}(\phi) = \sup\{H(\phi, F) : F \leq G$ finito$\}$.

$$\mathrm{ent}(\phi) = \mathrm{ent}(\phi \restriction_{t(G)}) = h(\phi \restriction_{t(G)})$$

Esempio

Per ogni gruppo abeliano G,

- $\mathrm{ent}(id_G) = 0$;
- $h(id_G) = 0$.

- $T_n(\phi, F) = F + \phi(F) + \ldots + \phi^{n-1}(F)$.
- $H(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|T_n(\phi,F)|}{n}$.
- (Peters) $h(\phi) = \sup\{H(\phi, F) : F \subseteq G \text{ finito, non vuoto}\}$.
- (Weiss) $\mathrm{ent}(\phi) = \sup\{H(\phi, F) : F \leq G \text{ finito}\}$.

$$\mathrm{ent}(\phi) = \mathrm{ent}(\phi\restriction_{t(G)}) = h(\phi\restriction_{t(G)})$$

Esempio

Sia K un gruppo abeliano. Lo shift di Bernoulli destro $\beta_K : K^{(\mathbb{N})} \to K^{(\mathbb{N})}$ è definito da $\beta_K(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$.

(1) $h(\beta_{\mathbb{Z}(p)}) = \mathrm{ent}(\beta_{\mathbb{Z}(p)}) = \log p$ *per ogni primo* p.

(2) $\mathrm{ent}(\beta_{\mathbb{Z}}) = 0$ *e* $h(\beta_{\mathbb{Z}}) = \infty$.

Monotonia: H sottogruppo ϕ-invariante di G, $\overline{\phi} : G/H \to G/H$ indotto da ϕ; allora $h(\phi) \geq \max\{h(\phi\restriction_H), h(\overline{\phi})\}$.

Monotonia: H sottogruppo ϕ-invariante di G, $\overline{\phi} : G/H \to G/H$ indotto da ϕ; allora $h(\phi) \geq \max\{h(\phi \restriction_H), h(\overline{\phi})\}$.

Invarianza per coniugio: Se $\phi = \xi^{-1}\psi\xi$, $\psi : H \to H$ endomorfismo, $\xi : G \to H$ isomorfismo
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\xi"'] & G \arrow[d, "\xi"] \\ H \arrow[r, "\psi"] & H \end{tikzcd},$$
allora $h(\phi) = h(\psi)$.

Legge logaritmica: $h(\phi^k) = k \cdot h(\phi)$ per ogni $k \geq 0$.

Continuità: Se G è limite diretto di sottogruppi ϕ-invarianti $\{G_i : i \in I\}$, allora $h(\phi) = \sup_{i \in I} h(\phi \restriction_{G_i})$.

Additività per prodotti diretti: Se $G = G_1 \times G_2$ e $\phi_i \in \mathrm{End}(G_i)$, $i = 1, 2$, allora $h(\phi_1 \times \phi_2) = h(\phi_1) + h(\phi_2)$.

Teorema (Addition Theorem)

Siano G un gruppo abeliano, $\phi \in \mathrm{End}(G)$, H un sottogruppo ϕ-invariante di G e $\overline{\phi} : G/H \to G/H$ l'endomorfismo indotto da ϕ.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\phi\restriction_H"] \arrow[d, hook] & H \arrow[d, hook] \\
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, two heads] & G \arrow[d, two heads] \\
G/H \arrow[r, "\overline{\phi}"] & G/H
\end{tikzcd}$$

Allora

$$h(\phi) = h(\phi \restriction_H) + h(\overline{\phi}).$$

Riduzioni:

- G gruppo abeliano senza torsione;
- G numerabile;
- G divisibile;
- G di rango finito;
- ϕ iniettivo.

Rimane quindi il caso di un automorfismo

$$\phi : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$$

per $n > 0$.

Teorema (Algebraic Yuzvinski Formula)

Per $n > 0$, un automorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^n$ è descritto da una matrice $A \in GL_n(\mathbb{Q})$. Allora

$$h(\phi) = \log s + \sum_{|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|,$$

dove i λ_i sono gli autovalori di A e s è il minimo comune multiplo dei denominatori dei coefficienti del polinomio caratteristico (monico) di A.

Segue dalla Yuzvinski Formula per l'entropia topologica di automorfismi di $\widehat{\mathbb{Q}}^n$ e dal "Teorema Ponte" di Peters:

Teorema

Per un automorfismo ϕ di un gruppo abeliano numerabile G, $h(\phi) = h_{top}(\widehat{\phi})$.

Unicità: L'entropia algebrica degli endomorfismi dei gruppi abeliani è l'unica collezione

$$h = \{h_G : \mathrm{End}(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} : G \text{ gruppo abeliano}\}$$

che soddisfa:

- Invarianza per coniugio;
- Continuità per limiti diretti;
- Addition Theorem;
- $h_{\mathbb{Z}(p)^{(\mathbb{N})}}(\beta_{\mathbb{Z}(p)}) = \log p$ per ogni primo p;
- Algebraic Yuzvinski Formula.

Siano G un gruppo abeliano e $\phi \in \mathrm{End}(G)$.

Definizione

Il sottogruppo di Pinsker di G è il massimo sottogruppo ϕ-invariante $\mathbf{P}(G,\phi)$ di G tale che $h(\phi\restriction_{\mathbf{P}(G,\phi)}) = 0$.

Motivazione:

- Per una trasformazione che preserva la misura ϕ di uno spazio di misura $(X, \mathcal{B}, \mu)$, la *σ-algebra di Pinsker* $\mathfrak{P}(\phi)$ di ϕ è la massima σ-sottoalgebra di $\mathcal{B}$ tale che ϕ ristretto a $(X, \mathfrak{P}(\phi), \mu\restriction_{\mathcal{B}})$ ha entropia zero. [Pinsker]
- Se $\phi : K \to K$ è un omeomorfismo di uno spazio compatto di Hausdorff K, allora ϕ ammette un fattore massimo con entropia topologica zero; tale fattore è detto *fattore topologico di Pinsker*. [Blanchard e Lacroix]

Siano G un gruppo abeliano e $\phi \in \mathrm{End}(G)$.

Definizione

Il sottogruppo di Pinsker di G è il massimo sottogruppo ϕ-invariante $\mathbf{P}(G, \phi)$ di G tale che $h(\phi \restriction_{\mathbf{P}(G,\phi)}) = 0$.

- $h(\phi) = 0$ se e solo se $\mathbf{P}(G, \phi) = G$;
- $h(\phi) \gg 0$ se e solo se $\mathbf{P}(G, \phi) = 0$.
- $\mathbf{P}(G/\mathbf{P}(G, \phi), \overline{\phi}) = 0$ (i.e., $h(\overline{\phi}) \gg 0$).

($h(\phi) \gg 0$ se $h(\phi \restriction_H) > 0$ per ogni $0 \neq H \leq G$ ϕ-invariante.)

Siano G un gruppo abeliano e $\phi \in \mathrm{End}(G)$.

Definizione

Il sottogruppo di Pinsker di G è il massimo sottogruppo ϕ-invariante $\mathbf{P}(G, \phi)$ di G tale che $h(\phi \restriction_{\mathbf{P}(G,\phi)}) = 0$.

$x \in G$ è *quasi-periodico* se esistono $n > m$ in $\mathbb{N}$, $\phi^n(x) = \phi^m(x)$.

$$Q_1(G, \phi) = \{x \in G : (\exists n > m \text{ in } \mathbb{N})\ (\phi^n - \phi^m)(x) = 0\}.$$

Esempio

Se G è un gruppo abeliano di torsione, allora $\mathbf{P}(G, \phi) = Q_1(G, \phi)$.

$$Q_0(G,\phi) \subseteq \ldots \subseteq Q_n(G,\phi) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{Q}(G,\phi) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(G,\phi)$$

dove:

$Q_0(G,\phi) = 0,$

$Q_1(G,\phi) = \{x \in G : (\exists n > m \text{ in } \mathbb{N})\ (\phi^n - \phi^m)(x) = 0\},$

e per ogni $n > 0$

$Q_{n+1}(G,\phi) = \{x \in G : (\exists n > m \text{ in } \mathbb{N})\ (\phi^n - \phi^m)(x) \in Q_n(G,\phi)\}.$

$(Q_{n+1}(G,\phi)/Q_n(G,\phi) = Q_1(G/Q_n(G,\phi), \overline{\phi}_n))$

- ogni $Q_n(G,\phi)$ è un sottogruppo ϕ-invariante di G;
- $\mathfrak{Q}(G,\phi)$ è un sottogruppo ϕ-invariante di G;
- $\mathfrak{Q}(G/\mathfrak{Q}(G,\phi), \overline{\phi}) = 0.$

$$Q_0(G,\phi) \subseteq \ldots \subseteq Q_n(G,\phi) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{Q}(G,\phi) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(G,\phi)$$

Teorema

Per ogni gruppo abeliano G e $\phi \in \mathrm{End}(G)$,

$$\mathbf{P}(G,\phi) = \mathfrak{Q}(G,\phi).$$

Siano G un gruppo abeliano, $\phi \in \mathrm{End}(G)$ e $\emptyset \neq F \subseteq G$ finito.

Allora $|T_n(\phi, F)| \leq |F|^n$ per ogni $n > 0$.

Per dimostrare $h(id_G) = 0$, abbiamo usato $\forall\ n > 1$ e $F \subseteq G$ finito, $|T_n(id_G, F)| = |\underbrace{F + \ldots + F}_{n}| \leq P_F(n)$, dove $P_F(x) = (x+1)^{|F|}$.

- $\phi \in \mathrm{Exp}_F$ se esiste un numero reale $b > 1$ tale che $|T_n(\phi, F)| \geq b^n$ per ogni $n > 0$;
- $\phi \in \mathrm{Pol}_F$ se esiste $P_F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $|T_n(\phi, F)| \leq P_F(n)$ per ogni $n > 0$;
- $\phi \in \mathrm{Pol}$ se $\phi \in \mathrm{Pol}_F$ per ogni $F \subseteq G$ finito, non vuoto.

Definizione

Sia $\mathrm{Pol}(G, \phi)$ il massimo sottogruppo ϕ-invariante H di G tale che $\phi \restriction_H \in \mathrm{Pol}$.

Siano G un gruppo abeliano, $\phi \in \mathrm{End}(G)$ e $\emptyset \neq F \subseteq G$ finito.

Teorema

Per ogni gruppo abeliano G e $\phi \in \mathrm{End}(G)$,

$$\mathbf{P}(G, \phi) = \mathrm{Pol}(G, \phi) = \mathfrak{Q}(G, \phi).$$

In particolare, $h(\phi) = 0$ se e solo se $\phi \in \mathrm{Pol}$, cioè

$H(\phi, F) = 0$ per ogni F se e solo se $\phi \in \mathrm{Pol}_F$ per ogni F.

Teorema

Per ogni gruppo abeliano G, $\phi \in \mathrm{End}(G)$ e $\emptyset \neq F \subseteq G$ finito,

$$H(\phi, F) \begin{cases} > 0 & \textit{se e solo se } \phi \in \mathrm{Exp}_F, \\ = 0 & \textit{se e solo se } \phi \in \mathrm{Pol}_F. \end{cases}$$

Siano

- $\mathcal{T}_h = \{(G, \phi) : h(\phi) = 0\} = \{(G, \phi) : \mathbf{P}(G, \phi) = G\}$
- $\mathcal{F}_h = \{(G, \phi) : h(\phi) \gg 0\} = \{(G, \phi) : \mathbf{P}(G, \phi) = 0\}$

$\mathbf{AF} = \{(G, \phi) : G \text{ gruppo abeliano}, \phi \in \mathrm{End}(G)\} \cong \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[t]}$.

$\mathbf{P} : \mathbf{AF} \to \mathbf{AF}$ è un radicale ereditario,
e quindi $\mathfrak{t}_h = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)$ è una teoria di torsione ereditaria in $\mathbf{AF}$.

Siano K gruppo compatto abeliano, $\psi : K \to K$ continuo,
$G = \widehat{K}$ e $\phi = \widehat{\psi}$,
$N \leq K$ chiuso ψ-invariante, $H = N^{\perp} \leq G$ ϕ-invariante ($N = H^{\perp}$).

$$\begin{tikzcd}
K/N & K \arrow[l, two heads] & N \arrow[l, hook'] \\
K/N \arrow[u, "\overline{\psi}"] & K \arrow[l, two heads] \arrow[u, "\psi"] & N \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\psi\restriction_N"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi\restriction_H"'] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi"] & G/H \arrow[d, "\overline{\phi}"] \\
H \arrow[r, hook] & G \arrow[r, two heads] & G/H
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{E}(G, \psi) := \mathbf{P}(\widehat{K}, \widehat{\phi})^{\perp}$
(per $N = \mathcal{E}(G, \psi)$ e $H = \mathbf{P}(\widehat{K}, \widehat{\phi})$)

Teorema

Siano K un gruppo abeliano compatto metrizzabile e $\psi : K \to K$ un automorfismo continuo di K. Allora $\overline{\psi} : K/\mathcal{E}(G, \psi) \to K/\mathcal{E}(G, \psi)$ è il fattore topologico di Pinsker di (K, ψ).