Equazioni diofantee

Anna Giordano Bruno
Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Università degli Studi di Udine

6 maggio 2019

Οὑτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἆ μέγα θαῦμα!
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
δωδεκάτην δ' ἐπιθείς μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός
σοῦ γ' ἑκάης δυεροῦ μέτρον ἑλὸν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitae
Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sex tantem juvenic; lanugine malas
Vestire hinc coepit parte duodecima.
Septante uxori post haec sociatur, et anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem aetatis postquam attigit ille paternae,
Infelix subita morte peremptus obit.
Quator aestater genitor lugere superstes
Cogitur, hinc annos illius assequere.

Questa tomba contiene Diofanto e quanto fu il tempo della sua vita con arte mirabile ti illustra.

Giovinetto restò per un sesto, e perché si oscurasse di barba il mento, un altro dodicesimo dovette aspettare.

Dopo questo, un altro settimo trascorse prima che trovasse moglie, e nel quinto anno dell'unione nacque un bel bimbo.

Lo sfortunato erede visse solo la metà dell'età paterna;
cadde di morte crudele e improvvisa.

Il padre lo pianse per i quattro anni che gli sopravvisse,
prima di chiudere infine il conto dei suoi anni.

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$$x = 84$$

Problema

(1) Ci sono 56 alunni del primo anno del liceo matematico e dobbiamo prendere un certo numero di banchi da 6 posti e un certo numero di banchi da 4 posti per disporli tutti in un'aula. Quanti banchi da 6 posti e quanti banchi da 4 posti riusciamo a procurarci in modo che i banchi siano tutti pieni?

(2) E se gli alunni fossero 55?

Definizione

Un'equazione diofantea è un'equazione in una o più incognite con coefficienti interi, di cui si cercano le soluzioni intere.

Convenzione: con soluzioni intendiamo soluzioni intere.

Obiettivo:

risolvere equazioni diofantee lineari in due incognite,
cioè, per $a, b, c \in \mathbb{Z}$, determinare, se esistono, le soluzioni di

$$\boxed{ax + by = c;}$$

inoltre determinare, se esistono, le soluzioni positive.

Esempi:

- $6x + 4y = 56$ ha infinite soluzioni e le sue soluzioni positive sono $(2, 11)$, $(4, 8)$, $(6, 5)$, $(8, 2)$;
- $6x + 4y = 55$ non ha soluzioni;
- $6x + 4y = 2$ ha infinite soluzioni ma non ha soluzioni positive.

Definizione

Un'equazione diofantea è un'equazione in una o più incognite con coefficienti interi, di cui si cercano le soluzioni intere.

Convenzione: con soluzioni intendiamo soluzioni intere.

Esempi "famosi":

- $x^2 + y^2 = z^2$ ha infinite soluzioni: le terne pitagoriche;
- $x^2 - Ny^2 = 1$ equazione di Pell;
- $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$, e l'ultimo teorema di Fermat.

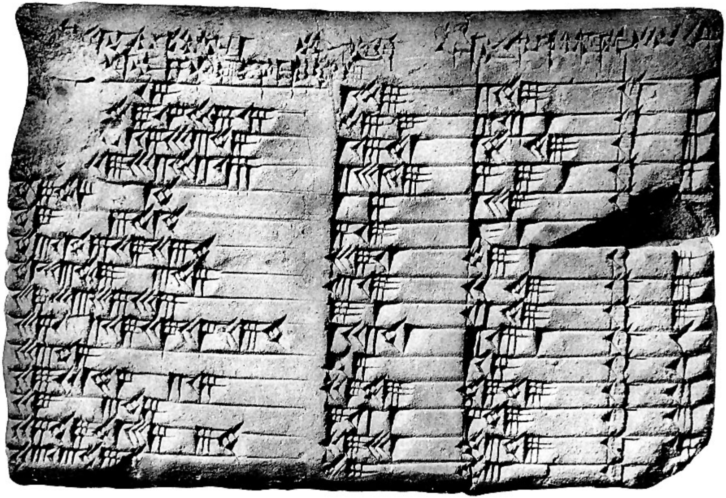
Gli *Elementi* di Euclide (III secolo a.C.)

Algoritmo di Euclide.

Terne pitagoriche:

- formula per generare tutte le terne pitagoriche primitive, cioè $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ con $MCD(a, b, c) = 1$ e $a^2 + b^2 = c^2$: si ottengono da
$$a = m^2 - n^2, \; b = 2mn, \; c = m^2 + n^2$$
al variare di $n < m$ in $\mathbb{N}$ con parità diversa e $MCD(m, n) = 1$;
- se (a, b, c) è una terna pitagorica, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ anche (ka, kb, kc) è una terna pitagorica:
$$a^2 + b^2 = c^2 \; \Rightarrow \; (ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2.$$

Lista di terne pitagoriche nella tavoletta Plimpton 322 del 1800 a.C, proveniente dall'antica città babilonese di Larsa.



L'*Arithmetica* di Diofanto (III secolo d.C.)

Diofanto visse ad Alessandria d'Egitto, centro del pensiero scientifico del mondo ellenico.

Di tredici volumi dell'Arithmetica solo sei sono giunti fino a noi.

Ebbe grande influenza sul pensiero algebrico arabo.

- Simbolismo matematico: uso sistematico delle lettere per abbreviare le incognite.
- Equazioni indeterminate: metodi generali per ottenere le soluzioni di vari tipi di equazioni.

Aritmetica in India (VI-VII secolo d.C.)

Aryabhata: algoritmo per risolvere equazioni diofantee lineari.

Brahmagupta: soluzione generale delle equazioni di Pell

$$x^2 - Ny^2 = 1.$$

Europa XVII-XIX secolo d.C.

Dal 1600 in Europa vari matematici riscoprirono come risolvere l'equazione di Pell, tra cui Pierre de Fermat.

Poi Lagrange con le frazioni continue.

Eulero (Lehonard Euler) pensava erroneamente che la soluzione fosse del matematico inglese John Pell.

Eulero fornì anche un metodo per risolvere le equazioni diofantee lineari.

L'ultimo teorema di Fermat

Nel 1637 Pierre de Fermat scrisse a margine della sua copia dell'*Arithmetica* di Diofanto che

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{con } n \geq 3$$

non ha soluzioni non banali.

Nel 1994 Andrew Wiles dimostrò l'ultimo teorema di Fermat.

Il decimo problema di Hilbert

Nel 1900 David Hilbert nel suo decimo problema chiese se esistesse un algoritmo generale per determinare se un'equazione diofantea arbitraria fosse risolubile.

Nel 1970 Yuri Matiyaševich rispose che tale algoritmo non esiste.

Risolviamo le equazioni diofantee lineari in due incognite

Data l'equazione diofantea lineare

$$\boxed{ax + by = c}$$

in due incognite x, y e con coefficienti $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

(1) determiniamo se ha soluzioni.

In tal caso:

(2) determiniamo tutte le soluzioni;

(3) determiniamo tutte le soluzioni positive.

(1) Determiniamo se $ax + by = c$ ha soluzioni

Teorema

$ax + by = c$ ha soluzione se e solo se $d := MCD(a, b)$ divide c.

Dimostrazione

Supponiamo che (x_0, y_0) sia una soluzione. Allora $ax_0 + by_0 = c$. Poiché d divide sia a sia b, allora d divide $ax_0 + by_0 = c$.

Supponiamo ora che d divida c, cioè esiste $c' \in \mathbb{Z}$ tale che $c = dc'$. Usando l'algoritmo di Euclide si determinano $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che

$$d = au + bv.$$

Allora

$$c = dc' = (au + bv)c' = auc' + bvc' = a(uc') + b(vc');$$

con $x_0 = uc'$ e $y_0 = vc'$, si ottiene che (x_0, y_0) è soluzione.

Esempio 1

Risolvere l'equazione $6x + 4y = 55$.

Algoritmo di Euclide:
$6 = 4 \cdot 1 + 2$;
$4 = 2 \cdot 2 + 0$.
Allora $2 = MCD(6, 4)$.

Poiché 2 non divide 55, non ci sono soluzioni.

Esempio 2

Risolvere l'equazione $6x + 4y = 56$.

Poiché 2 divide $56 = 28 \cdot 2$, ci sono soluzioni.

Da $6 - 4 = 2$ segue che

$$6 \cdot 28 + 4 \cdot (-28) = 2 \cdot 28 = 56.$$

cioè $(28, -28)$ è soluzione.

(2) Determiniamo tutte le soluzioni di $ax + by = c$

Teorema

Se (x_0, y_0) è soluzione di $ax + by = c$ e $d := MCD(a, b)$, allora l'insieme di tutte le soluzioni è $\{(x_0 + \frac{b}{d}k, y_0 - \frac{a}{d}k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dimostrazione

Per $k \in \mathbb{Z}$ si ha
$a(x_0 + \frac{b}{d}k) + b(y_0 - \frac{a}{d}k) = ax_0 + \frac{ab}{d}k + by_0 - \frac{ab}{d}k = ax_0 + by_0 = c$.

Viceversa, se (x, y) è soluzione, allora $ax + by = c = ax_0 + by_0$

Segue che $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{a}{d}x_0 + \frac{b}{d}y_0$, dunque $\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y)$.

Poiché $MCD(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, $\frac{a}{d}$ divide $y_0 - y$ e $\frac{b}{d}$ divide $x - x_0$.

Quindi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $\begin{cases} x - x_0 = k\frac{b}{d} \\ y_0 - y = k\frac{a}{d} \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x = x_0 + k\frac{b}{d} \\ y = y_0 - k\frac{a}{d} \end{cases}$.

Esempio 2

Abbiamo visto che $(28, -28)$ è soluzione di $6x + 4y = 56$.

Tutte le soluzioni sono date da $\begin{cases} x = 28 + 2k \\ y = -28 - 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 3

Una soluzione di $6x + 4y = 2$, poiché $6 - 4 = 2$, è $(1, -1)$.

Tutte le soluzioni sono date da $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(3) Determiniamo le soluzioni positive di $ax + by = c$

Se $ax + by = c$ ha soluzioni, per il teorema precedente, tutte le soluzioni sono (x, y) con $\begin{cases} x = x_0 + k\frac{b}{d} \\ y = y_0 - k\frac{a}{d} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

Per trovare le soluzioni positive determiniamo, se esistono, i $k \in \mathbb{Z}$ per cui $\begin{cases} x = x_0 + k\frac{b}{d} > 0 \\ y = y_0 - k\frac{a}{d} > 0 \end{cases}$, cioè $\frac{d}{b}x_0 < k < \frac{d}{a}y_0$.

Esempio 3

Abbiamo visto che tutte le soluzioni di $6x + 4y = 2$ sono date da

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per trovare le soluzioni positive, cerchiamo i $k \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{cases} 1 + 2k > 0 \\ -1 - 3k > 0 \end{cases}, \text{ cioè } -\tfrac{1}{2} < k < -\tfrac{1}{3}.$$

Poiché non esistono $k \in \mathbb{Z}$ che soddisfino tale condizione, $6x + 4y = 2$ non ha soluzioni positive.

Esempio 2

Abbiamo visto che tutte le soluzioni di $6x + 4y = 56$ sono date da

$$\begin{cases} x = 28 + 2k \\ y = -28 - 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per trovare le soluzioni positive, cerchiamo i $k \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{cases} 28 + 2k > 0 \\ -28 - 3k > 0 \end{cases}, \text{ cioè } -14 < k < -\frac{28}{3}.$$

Troviamo soluzioni positive per $k \in \{-13, -12, -11, -10\}$.

Per $k = -13$ si trova $(2, 11)$.
Per $k = -12$ si trova $(4, 8)$.
Per $k = -11$ si trova $(6, 5)$.
Per $k = -10$ si trova $(8, 2)$.

Le soluzioni positive di $6x+4y=56$ sono $(2, 11), (4, 8), (6, 5), (8, 2)$.

Esercizi:

(a) Determinare se $20x + 12y = 7$ ha soluzioni.

(b) Determinare le soluzioni positive di $20x + 12y = 160$.

(1) Determinare se $351x + 130y = 35$ ha soluzioni.

(2) Determinare le soluzioni positive di $351x + 130y = 741$.

Soluzione degli esercizi (1) e (2)

Algoritmo di Euclide:
$351 = 2 \cdot 130 + 91;$
$130 = 1 \cdot 91 + 39;$
$91 = 2 \cdot 39 + 13;$
$39 = 3 \cdot 13 + 0.$
Allora $13 = MCD(351, 130)$.

(1) Poiché 13 non divide 35, $351x + 130y = 35$ non ha soluzioni.
(2) Poiché 13 divide $741 = 57 \cdot 13$, $351x + 130y = 741$ ha soluzioni.

Determiniamo $3 \cdot 351 - 8 \cdot 130 = 13$.

Moltiplicando per $57 = \frac{741}{13}$, otteniamo
$351 \cdot (3 \cdot 57) + 130 \cdot (-8 \cdot 57) = 13 \cdot 57 = 741$, cioè
$351 \cdot 171 + 130 \cdot (-456) = 741.$

Dunque $(171, -456)$ è una soluzione.

Poiché $(171, -456)$ è una soluzione di $351x + 130y = 741$,
tutte le soluzioni sono date da $\begin{cases} x = 171 + 10k \\ y = -456 - 27k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Per trovare le soluzioni positive, cerchiamo i $k \in \mathbb{Z}$ tali che
$\begin{cases} 171 + 10k > 0 \\ y = -456 - 27k > 0 \end{cases}$, cioè

$$-\frac{171}{10} < k < -\frac{456}{27} = -\frac{152}{9}.$$

Troviamo una sola soluzione positiva $(1, 3)$ per $k = -17$.