ESERCIZI DI BASI DI DATI
Livello Logico
(draft)

prof. Angelo Montanari
Michela Zamparini
Alberto Guglielmetti

13 marzo 2001

Indice

Un utile riferimento bibliografico per lo svolgimento degli esercizi relativi alla teoria della progettazione delle basi di dati è il capitolo 7 del libro *Principles of Databases and Knowledge-Base Systems - Volume I*, J. D. Ullman, Computer Science Press, 1988.

1 Dipendenze funzionali

Esercizio 1.1 Siano dati uno schema relazionale R e un insieme di dipendenze funzionali F sugli attributi di R. Sia $\mathit{soddisfa}(F)$ l'insieme delle istanze r di R che soddisfano ogni dipendenza in F.

E' vero o falso che:

1. $\mathit{soddisfa}(F_1 \cup F_2) = \mathit{soddisfa}(F_1) \cup \mathit{soddisfa}(F_2)$;
2. $\mathit{soddisfa}(F_1 \cup F_2) = \mathit{soddisfa}(F_1) \cap \mathit{soddisfa}(F_2)$;
3. se F_1 implica logicamente tutte le dipendenze in F_2, allora $\mathit{soddisfa}(F_2) \subseteq \mathit{soddisfa}(F_1)$;
4. se F_1 implica logicamente tutte le dipendenze in F_2, allora $\mathit{soddisfa}(F_1) \subseteq \mathit{soddisfa}(F_2)$.

In caso di risposta affermativa, fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

Soluzione.

1. **Falso**. Controesempio: siano $R = (A, B)$, $F_1 = \{A \to B\}$, $F_2 = \{B \to A\}$ e si consideri la seguente istanza r:

A	B
a_1	b
a_2	b

   Questa soddisfa F_1 ma non F_2, e quindi neanche $F_1 \cup F_2$:
   $r \in \mathit{soddisfa}(F_1) \Rightarrow r \in \mathit{soddisfa}(F_1) \cup \mathit{soddisfa}(F_2)$, ma $r \notin \mathit{soddisfa}(F_2) \Rightarrow r \notin \mathit{soddisfa}(F_1 \cup F_2)$.

2. **Vero**. L'uguaglianza può essere provata con la doppia inclusione. A tal fine è sufficiente osservare che $r \in \mathit{soddisfa}(F_1) \cap \mathit{soddisfa}(F_2) \Leftrightarrow r \in \mathit{soddisfa}(F_1) \wedge r \in \mathit{soddisfa}(F_2) \Leftrightarrow r \in \mathit{soddisfa}(F_1 \cup F_2)$.

3. **Falso.** Controesempio: siano $R = (A, B, C)$, $F_1 = \{A \to B, B \to C\}$, $F_2 = \{A \to C\}$ e si consideri l'istanza r:

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_1	b_2	c_1

   $r \in \mathit{soddisfa}(F_2)$ ma $r \notin \mathit{soddisfa}(F_1) \Rightarrow \mathit{soddisfa}(F_2) \supsetneq \mathit{soddisfa}(F_1)$.

4. **Vero**. Infatti $\forall X \to Y \in F_2$ si ha ($r \in \mathit{soddisfa}(F_1) \wedge F_1 \models X \to Y \Rightarrow r$ soddisfa $X \to Y$), da cui $r \in \mathit{soddisfa}(F_2)$, e quindi $\mathit{soddisfa}(F_1) \subseteq \mathit{soddisfa}(F_2)$.

□

Esercizio 1.2 Sia $R(A, B, C, D)$ uno schema di relazione.

(a) È vero o falso che se $A \to B$ e $C \to D$, allora $A \cup (C - B) \to BD$? In caso di risposta affermativa fornire una derivazione di $A \cup (C - B) \to BD$ da $A \to B$ e $C \to D$ usando gli assiomi di Armstrong; altrimenti, fornire un controesempio.

(b) È vero o falso che se $AB \to D$, allora $ABC \to D$? In caso di risposta affermativa fornire una derivazione di $ABC \to D$ da $AB \to D$ usando gli assiomi di Armstrong; altrimenti, fornire un controesempio.

(c) È vero o falso che se $ABC \to D$, allora $AB \to D$? In caso di risposta affermativa fornire una derivazione di $AB \to D$ da $ABC \to D$ usando gli assiomi di Armstrong; altrimenti, fornire un controesempio.

Soluzione.

(a) **Vero**. Siano $C = XY$ e $B = XZ$, con $Y \cap Z = \varnothing$.

1. $A \to XZ$, per ipotesi;
2. $XY \to D$, per ipotesi;
3. $AY \to XYZ$, per aumento di (1);
4. $XYZ \to DZ$, per aumento di (2);
5. $XYZ \to DXZ$, per aumento di (4);
6. $AY \to DXZ$, per transitività da (3) e (5).

(b) **Vero**.

1. $AB \to D$, per ipotesi;
2. $ABC \to AB$, per riflessività;
3. $ABC \to D$, per transitività.

(c) **Falso**. Sia r:

A	B	C	D
a	b	c_1	d_1
a	b	c_2	d_2

$ABC \to D$, ma $AB \nrightarrow D$.

□

2 Insiemi di dipendenze equivalenti e coperture minimali

Esercizio 2.1 Siano dati lo schema di relazione $R(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J)$ ed il relativo insieme di dipendenze $F = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, CJ \to I, G \to H\}$.

(a) Stabilire se F è o meno una copertura minimale. In caso di risposta negativa, determinare una copertura minimale di F.

(b) Determinare l'insieme delle chiavi candidate di R.

Soluzione.

(a) Applichiamo l'algoritmo per determinare una copertura minimale.

1. I membri destri sono già unitarî.
2. Rimuoviamo gli attributi ridondanti da ogni dipendenza.

$ABD \to E$	A?	$E \in BD^+ = BDF$?	No.
	B?	$E \in AD^+ = AD$?	No.
	D?	$E \in AB^+ = ABFGH$?	No.
$AB \to G$	A?	$G \in B^+ = BF$?	No.
	B?	$G \in A^+ = A$?	No.
$CJ \to I$	C?	$I \in J^+ = J$?	No.
	J?	$I \in C^+ = CIJ$?	Sì, allora $C \to I$ sostituisce $CJ \to I$.

L'insieme F' risultante è il seguente:
$F' = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, C \to I, G \to H\}$.

3. Eliminiamo, infine, le dipendenze ridondanti dall'insieme ottenuto al passo precedente. Per ogni dipendenza funzionale $X \to A$, è sufficiente verificare se A appartiene alla chiusura di X rispetto a $F \setminus \{X \to A\}$.

$X \to A$	X^+ wrt $(F \setminus \{X \to A\})$	È ridondante?
$ABD \to E$	$ABD^+ = ABDGFH$	No.
$AB \to G$	$AB^+ = ABF$	No.
$B \to F$	$B^+ = B$	No.
$C \to J$	$C^+ = CI$	No.
$C \to I$	$C^+ = CJ$	No.
$G \to H$	$G^+ = G$	No.

Si noti che ad ogni riga si assume che F designi l'insieme corrente di dipendenze funzionali, ovvero l'insieme F di partenza privato delle eventuali dipendenze ridondanti scoperte in precedenza (ciò consente di rendere più efficiente il calcolo di X^+).

La copertura minimale richiesta è quindi:

$F' = \{ABD \to E, AB \to G, B \to F, C \to J, C \to I, G \to H\}$.

(b) Gli attributi A, B, C e D devono far parte di ogni chiave, perché non comparendo a destra in alcuna dipendenza di F' non possono essere derivati.

$ABCD^+ = ABCDEFGHIJ = R$,

dunque $ABCD$ è una superchiave, inoltre ABC^+, ABD^+, BCD^+ e ACD^+ sono diverse da R, quindi quella trovata è una chiave ed è l'unica.

□

Esercizio 2.2 Siano dati uno schema relazionale $R(A,B,C,D,E,F)$ e un insieme di dipendenze $F = \{AB \to C, C \to A, BC \to D, ACD \to B, BE \to C, CE \to FA, CF \to BD, D \to EF\}$. Stabilire se l'insieme di dipendenze F è o meno minimale. In caso di risposta negativa, determinare una copertura minimale di F.

Soluzione. Chiaramente, l'insieme F non è minimale. Applichiamo l'algoritmo per determinare una copertura minimale.

1. Rendiamo i membri destri unitarî ottenendo il nuovo insieme:

$$F' = \{AB \to C, C \to A, BC \to D, ACD \to B, BE \to C,\\ CE \to F, CE \to A, CF \to B, CF \to D, D \to E, D \to F\}.$$

2. Rimuoviamo gli attributi ridondanti da ogni dipendenza.

$AB \to C$	A?	$C \in B^+ = B$?	No.
	B?	$C \in A^+ = A$?	No.
$BC \to D$	B?	$D \in C^+ = CA$?	No.
	C?	$D \in B^+ = B$?	No.
$ACD \to B$	A?	$B \in CD^+ = CDAEFB$?	Sì, allora $CD \to B$ sostituisce $ACD \to B$.
$CD \to B$	C?	$B \in D^+ = DEF$?	No.
	D?	$B \in C^+ = CA$?	No.
$BE \to C$	B?	$C \in E^+ = E$?	No.
	E?	$C \in B^+ = B$?	No.
$CE \to F$	C?	$F \in E^+ = E$?	No.
	E?	$F \in C^+ = CA$?	No.
$CE \to A$	C?	$A \in E^+ = E$?	No.
	E?	$A \in C^+ = CA$?	Sì, eliminiamo la dipendenza[1].
$CF \to B$	C?	$B \in F^+ = F$?	No.
	F?	$B \in C^+ = CA$?	No.
$CF \to D$	C?	$D \in F^+ = F$?	No.
	F?	$D \in C^+ = CA$?	No.

3. Eliminiamo, infine, le dipendenze ridondanti dall'insieme

$$F'' = \{AB \to C, BC \to D, CD \to B, BE \to C, CE \to F\\ CF \to B, CF \to D, C \to A, D \to E, D \to F\}$$

ottenuto al passo precedente.

[1] La dipendenza $CE \to A$ dovrebbe, infatti, essere sostituita con la dipendenza $C \to A$, già presente nell'insieme corrente di dipendenze.

$X \to A$	X^+ wrt $(F \setminus \{X \to A\})$	È ridondante?
$AB \to C$	$AB^+ = AB$	No.
$BC \to D$	$BC^+ = BCA$	No.
$CD \to B$	$CD^+ = CDAEFB$	Sì
$BE \to C$	$BE^+ = BE$	No.
$CE \to F$	$CE^+ = CEA$	No.
$CF \to B$	$CF^+ = CFDAE$	No.
$CF \to D$	$CF^+ = CFBADE$	Sì.
$C \to A$	$C^+ = C$	No.
$D \to E$	$D^+ = DF$	No.
$D \to F$	$D^+ = DE$	No.

Come osservato in precedenza, a partire dalla quarta riga della tabella il calcolo di X^+ viene fatto rispetto ad un insieme di dipendenze che non contiene più la dipendenza $CD \to B$. A partire dall'ottava riga, non si utilizza più nemmeno la dipendenza $CF \to D$.

La copertura minimale richiesta è:

$F''' = \{AB \to C, BC \to D, BE \to C, CE \to F, CF \to B, C \to A, D \to E, D \to F\}$.

□

Esercizio 2.3 Siano dati lo schema relazionale $R(A, B, C, D, E, F)$ e gli insiemi di dipendenze funzionali $G = \{AB \to C, B \to A, AD \to E, BD \to F\}$ e $H = \{AB \to C, B \to A, AD \to EF\}$.

(a) Trovare una copertura minimale per G e per H.

(b) Stabilire se G e H sono o meno equivalenti.

Soluzione.

(a) Calcoliamo una copertura minimale per G con l'algoritmo apposito.

1. I membri destri sono già unitarî.
2. Rimuoviamo gli attributi ridondanti da ogni dipendenza.

$AB \to C$	A?	$C \in B^+ = BAC$?	Sì, quindi $B \to C$ sostituisce $AB \to C$.
$AD \to E$	A?	$E \in D^+ = D$?	No.
	D?	$E \in A^+ = A$?	No.
$BD \to F$	B?	$F \in D^+ = D$?	No.
	D?	$F \in B^+ = B$?	No.

3. Eliminiamo infine le dipendenze ridondanti dall'insieme $G' = \{B \to C, B \to A, AD \to E, BD \to F\}$.

$X \to A$	X^+ wrt $(F \setminus \{X \to A\})$	È ridondante?
$B \to C$	$B^+ = BA$	No.
$B \to A$	$B^+ = BC$	No.
$AD \to E$	$AD^+ = AD$	No.
$BD \to F$	$BD^+ = BDCAE$	No.

Ne segue che l'insieme
$G' = \{B \to C, B \to A, AD \to E, BD \to F\}$,
è una copertura minimale per G.

Operando analogamente su H, otteniamo la seguente copertura minimale:

$H' = \{B \to C, B \to A, AD \to E, AD \to F\}$.

(b) Verifichiamo ora l'equivalenza di G ed H.

1. Le dipendenze $AB \to C$, $B \to A$ ed $AD \to E$ appartengono anche ad H e quindi anche ad H^+.
   Vediamo se $BD \to F \in H^+$:
   $BD \to F \in H^+ \Leftrightarrow F \in BD^+$ (wrt H) $= BDACEF$ Sì.
   Dunque $G \subseteq H^+ \Rightarrow G^+ \subseteq H^+$.
2. Come per il punto 1, è sufficiente verificare se $AD \to F \in G^+$. In questo caso, però,
   $F \notin AD^+$ (wrt G) $= ADE \Rightarrow H \subsetneq G^+ \Rightarrow H^+ \subsetneq G^+$.
   Ciò consente di concludere che i due insiemi G ed H *non* sono equivalenti.

□

3 Scomposizioni e loro proprietà

Esercizio 3.1 Sia $R(X, Y, Z)$ uno schema di relazione, con X, Y e Z insiemi di attributi.

(a) È vero o falso che, per ogni $r \in R$, se r soddisfa la dipendenza funzionale $X \to Y$, allora $r \subseteq \Pi_{XY}(r) \bowtie \Pi_{XZ}(r)$? In caso di risposta affermativa fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

(b) È vero o falso che, per ogni $r \in R$, se r soddisfa la dipendenza funzionale $X \to Y$, allora $\Pi_{XY}(r) \bowtie \Pi_{XZ}(r) \subseteq r$? In caso di risposta affermativa fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

Soluzione. Trattasi del teorema di Heath.

(a) **Vero**. Sia $r = (x, y, z) \in R$. Allora $r_1 = (x, y) \in R_1 = \pi_{XY}(R)$ e $r_2 = (x, z) \in R_2 = \pi_{XZ}(R)$.
Ma allora $r \in R_1 \bowtie R_2$.

(b) **Vero**. Sia $r = (x, y, z) \in R_1 \bowtie R_2$. Per poter generare con l'operazione di join questa tupla, devono esistere le tuple $r_1 = (x, y) \in R_1$ e $r_2 = (x, z) \in R_2$.
Inoltre deve esistere in R una tupla $r' = (x, y', z)$ che generi r_2.
Poiché R soddisfa $X \to Y$, deve essere $y = y'$, ossia $r = r'$, e quindi $r \in R$.

□

Esercizio 3.2 Siano dati lo schema di relazione $R(T)$, dove T è l'insieme degli attributi di R, ed il relativo insieme di dipendenze F. Sia $\rho = (R_1(T_1), R_2(T_2))$ una scomposizione di R. Si dimostri che se $T_1 \cap T_2 \to T_1 \in F^+$ oppure $T_1 \cap T_2 \to T_2 \in F^+$, allora ρ è una scomposizione lossless join.

Soluzione. Supponiamo che $T_1 \cap T_2 \to T_1 \in F^+$ e sia r un'istanza di R che soddisfa F. Siano inoltre $s = (\pi_{T_1}(r)) \bowtie (\pi_{T_2}(r))$ e $t \in s$, dobbiamo dimostrare che $t \in r$.
Per costruzione di s, in r ci sono due tuple u e v tali che $u[T_1] = t[T_1]$, $v[T_2] = t[T_2]$ e $u[T_1 \cap T_2] = v[T_1 \cap T_2] = t[T_1 \cap T_2]$.
Poiché $T_1 \cap T_2 \to T_1 \in F^+$, ne segue che $u[T_1] = v[T_1]$ e quindi $t = v$.
L'altro caso è analogo. □

Esercizio 3.3 Sia data una relazione $R = (A, B, C)$, con associato l'insieme di dipendenze funzionali $F = \{A \to B, C \to B\}$. Si consideri la scomposizione $\rho = (AB, BC)$.

(a) Si determinino le proiezioni della chiusura di F sulle relazioni componenti.

(b) Si stabilisca se la scomposizione proposta possiede o meno la proprietà di lossless join. In caso negativo, si fornisca un esempio di violazione della proprietà e si proponga (se esiste) una scomposizione alternativa che goda della proprietà di lossless join, determinando le proiezioni della chiusura di F sulle relazioni componenti.

(c) Si determinino (se esistono) due istanze diverse r_1 e r_2 di R, che rispettano le dipendenze funzionali in F, le cui proiezioni sulle relazioni componenti AB e BC coincidano (ossia tali che la proiezione di r_1 su AB è uguale alla proiezione di r_2 su AB, e la proiezione di r_1 su BC è uguale alla proiezione di r_2 su BC).

Soluzione.

(a)
$\pi_{AB}(F) = \{A \to B, A \to AB, \text{dipendenze banali}\}$
$\pi_{BC}(F) = \{C \to B, C \to BC, \text{dipendenze banali}\}$.

(b) No. Infatti:
$AB \cap BC \nrightarrow AB - BC$
$AB \cap BC \nrightarrow BC - AB$
Un esempio di violazione è il seguente, che proviene dall'algoritmo per la verifica del lossless join:

	A	B	C
AB	a_1	a_2	b_{13}
BC	b_{21}	a_2	a_3

Con $R = \{a_1a_2b_{13}, b_{21}a_2a_3\}$, mentre $AB * BC = \{a_1a_2b_{13},\ a_1a_2a_3,\ b_{21}a_2b_{13},\ b_{21}a_2a_3\}$.
Una scomposizione alternativa può essere: $\rho' = (AB, AC)$,
infatti $(AB \cap AC \to AB - AC) \equiv A \to B$.
$\pi_{AB}(F) = \{A \to B, A \to AB, \text{dipendenze banali}\}$
$\pi_{AC}(F) = \{\text{dipendenze banali}\}$.

(c) Una possibile soluzione è la coppia di istanze $r_1 = \{001, 100\}$ e $r_2 = \{000, 101\}$.
Infatti, si ha che:
$\pi_{AB}(r_1) = \{00, 10\} = \pi_{AB}(r_2)$,
$\pi_{BC}(r_1) = \{01, 00\} = \pi_{BC}(r_2)$,
e sono rispettate le dipendenze di F.
Si noti che una coppia (alternativa) di istanze che soddisfano la condizione (c) si ricava immediatamente dalla tabella/controesempio del punto (b):
$r_1 = \{a_1a_2b_{13}, b_{21}a_2a_3\}$ e $r_2 = \{a_1a_2b_{13}, b_{21}a_2a_3, a_1a_2a_3\}$.

□

4 Forme normali

Esercizio 4.1 (a) È vero o falso che, dati una relazione R e un insieme di dipendenze funzionali F, se R non è in BCNF, allora esistono due attributi $A, B \in R$ tali che $R - AB \to A$ (o $R - AB \to B$)? In caso affermativo fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

(b) È vero o falso che, dati una relazione R e un insieme di dipendenze F, se esistono due attributi $A, B \in R$ tali che $R - AB \to A$ (o $R - AB \to B$), allora R non è in BCNF? In caso affermativo fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

Soluzione.

(a) **Vero**. Se non vale la BCNF, allora $\exists X \to A$ tale che $A \notin X$. X non è superchiave, quindi $\exists B (\neq A)$ tale che $B \notin X$. Allora $X \subseteq (R - AB) \Rightarrow (R - AB) \to X$ (proprietà riflessiva), e $X \to A \Rightarrow (R - AB) \to A$ (proprietà transitiva).

(b) **Falso**. Forniamo un controesempio. Siano $R = (A, B, C)$ e $F = \{C \to A, C \to B\}$. La relazione è in BCNF, $(R - AB) \to A \equiv C \to A \in F$, e $(R - AB) \to B \equiv C \to B \in F$.

□

Esercizio 4.2 Si consideri una schema di relazione $R(N, T, V, C, P, G)$, con associato l'insieme di dipendenze funzionali $F = \{N \to T, V \to NC, NG \to PV\}$.

(a) Si determino le chiavi di R.

(b) R è in $3NF$? Se non lo è, fornire una decomposizione di R in $3NF$ che conservi i dati e le dipendenze.

Soluzione.

(a) Determiniamo le chiavi di R. G non compare nella parte destra di alcuna dipendenza. Ne segue che G deve appartenere ad ogni chiave. Al contrario, C, P e T compaiono solo nella parte destra di dipendenze funzionali in F. Ne segue che C, P e T non appartengono ad alcuna chiave di R. Da

- $NG^+ = NGTCPV = R$;
- $VG^+ = VGNCPV = R$;
- $G^+ = G$,

segue che NG e VG sono le uniche due chiavi di R.

(b) R non è in 3NF. Si consideri la dipendenza $N \to T$. Tale dipendenza viola la 3NF in quanto N non è superchiave e T non è primo. Calcoliamo una copertura minimale per F:

$F' = \{N \to T, V \to N, V \to C, NG \to P, NG \to V\}$,

da cui otteniamo la scomposizione:

$\rho = (NT, VN, VC, NGP, NGV)$.

La relazione componente NGP contiene la chiave NG; di conseguenza, non occorre aggiungere alla scomposizione una chiave. È possibile, invece, ridurre il numero di relazioni componenti fondendo insieme VN, VC e NGP, NGV. VN e VC sono infatti state ottenute a partire da dipendenze funzionali con primo membro uguale; lo stesso vale per le relazioni NGP e NGV. In tal modo si ottiene la scomposizione:

$\rho' = (NT, VNC, NGPV)$.

□

Esercizio 4.3 Siano dati lo schema di relazione $R(A, B, C, D, E, G)$ ed il relativo insieme di dipendenze $F = \{E \to D, C \to B, CE \to G, B \to A\}$.

(a) In quale forma normale si trova R?

(b) Se R non è in 3NF, determinare una scomposizione lossless join di R in 3NF che conservi le dipendenze.

(c) Stabilire se la scomposizione $\rho = (DE, BC, CEG, AB)$ di R è o meno lossless join.

(d) Se R non è in BCNF, determinare una scomposizione lossless join di R in BCNF.

Soluzione. Determiniamo innanzitutto le chiavi della relazione. C ed E non compaiono a destra in alcuna dipendenza, quindi devono appartenere ad ogni chiave.

$CE^+ = CEDBGA = R$
$C^+ = CBA$
$E^+ = ED$

Quindi CE è l'unica chiave di R.

(a) $E \to D$ viola la 2NF, quindi R è in 1NF.

(b) Mediante l'algoritmo apposito ci assicuriamo che F sia minimale.

Applicando l'algoritmo banale otteniamo:

$\sigma = (ED, CB, CEG, BA)$.

(c) Sì. Infatti $CE \subseteq CEG$, quindi la scomposizione possiede un lossless join.

(d) La scomposizione ρ proposta conserva i dati e le dipendenze e le sue componenti sono in BCNF, infatti:

- DE, BC e AB sono relazioni binarie e quindi sono in BCNF;
- CEG discende da $CE \to G$, CE è la chiave di CEG (oltre che di R), quindi lo schema CEG rispetta la BCNF.

□

Esercizio 4.4 Sia dato uno schema di relazione $NIND$ con attributi *Nome* (chiave), Via, *Città*, *Nazione* e CAP. Si assuma che CAP identifichi univocamente *Città* e *Nazione* e che ogni tripla (Via, *Città*, *Nazione*) identifichi univocamente CAP.

(a) $NIND$ è in 2NF? Se non lo è, fornire una decomposizione di $NIND$ in 2NF che conservi i dati e le dipendenze.

(b) $NIND$ è in 3NF? Se non lo è, fornire una decomposizione di $NIND$ in 3NF che conservi i dati e le dipendenze.

(c) $NIND$ è in BCNF? Se non lo è, fornire una decomposizione di $NIND$ in BCNF che conservi (se possibile) i dati e le dipendenze.

Soluzione. Dal testo dell'esercizio si vede che l'insieme di dipendenze associato a $NIND$ è

$$\begin{aligned} F = \{&\mathit{Nome} \to \mathit{Via\ Città\ Nazione\ CAP},\\ &\mathit{CAP} \to \mathit{Città\ Nazione},\\ &\mathit{Via\ Città\ Nazione} \to \mathit{CAP}\}. \end{aligned}$$

(a) L'unica chiave è *Nome*, quindi $NIND$ è in 2NF.

(b) Si vede subito che l'insieme F non è minimale, perciò applichiamo l'algoritmo:

1. Rendiamo i membri destri unitarî ottenendo il nuovo insieme:

$$\begin{aligned} F' = \{&\mathit{Nome} \to \mathit{Via},\ \mathit{Nome} \to \mathit{Città},\ \mathit{Nome} \to \mathit{Nazione},\ \mathit{Nome} \to \mathit{CAP},\\ &\mathit{CAP} \to \mathit{Città},\ \mathit{CAP} \to \mathit{Nazione},\\ &\mathit{Via\ Città\ Nazione} \to \mathit{CAP}\}. \end{aligned}$$

2. Rimuoviamo gli attributi ridondanti dalla dipendenza $\mathit{Via\ Città\ Nazione} \to \mathit{CAP}$.

Via?	$\mathit{CAP} \in (\mathit{Città\ Nazione})^+ = \mathit{Città\ Nazione}$?	No.
$\mathit{Città}$?	$\mathit{CAP} \in (\mathit{Via\ Nazione})^+ = \mathit{Via\ Nazione}$?	No.
$\mathit{Nazione}$?	$\mathit{CAP} \in (\mathit{Via\ Città})^+ = \mathit{Via\ Città}$?	No.

3. Eliminiamo infine le dipendenze ridondanti dall'insieme F' con un approccio diverso:
   - $\mathit{Nome} \to \mathit{Città}$ è ridondante perché si ottiene per transitività da $\mathit{Nome} \to \mathit{CAP}$ e da $\mathit{CAP} \to \mathit{Città}$;
   - analogamente $\mathit{Nome} \to \mathit{Nazione}$ è ridondante perché si ottiene da $\mathit{Nome} \to \mathit{CAP}$ e da $\mathit{CAP} \to \mathit{Nazione}$.

   È facile verificare che non ci sono altre dipendenze ridondanti.

$$\begin{aligned} F'' = \{&\mathit{Nome} \to \mathit{Via},\ \mathit{Nome} \to \mathit{CAP},\ \mathit{CAP} \to \mathit{Città},\ \mathit{CAP} \to \mathit{Nazione},\\ &\mathit{Via\ Città\ Nazione} \to \mathit{CAP}\} \end{aligned}$$

Ora possiamo applicare l'algoritmo per la scomposizione:

$\rho = (\mathit{Nome\ Via\ CAP},\ \mathit{Via\ Città\ Nazione\ CAP})$.

ρ conserva le dipendenze e possiede un lossless join (perché contiene la chiave di $NIND$).

(c) La relazione $NIND$ non è in 3NF, quindi non può essere in BCNF. La scomposizione ρ non va bene perché la relazione $R_2 = (Via, Città, Nazione, CAP)$ non è in BCNF, infatti CAP non è superchiave e vale la dipendenza $CAP \rightarrow Città\ Nazione$.

Un'alternativa può essere:

$\rho' = (Nome\ Via\ CAP,\ Città\ Nazione\ CAP)$,

che è in BCNF, conserva i dati, ma non conserva la dipendenza $Via\ Città\ Nazione \rightarrow CAP$.

□

Esercizio 4.5 Si consideri una schema di relazione $T = (N, R, P, C, D)$, con associato l'insieme di dipendenze funzionali $F = \{NP \rightarrow R, NR \rightarrow C, NC \rightarrow D\}$.

(a) Si determino tutte le chiavi di T.

(b) T è in 2NF? Se non lo è, fornire una decomposizione di T in 2NF che conservi i dati e le dipendenze.

(c) T è in 3NF ? Se non lo è, fornire una decomposizione di T in 3NF che conservi i dati e le dipendenze.

(d) T è in BCNF? Se non lo è, fornire una decomposizione di T in BCNF che conservi (se possibile) i dati e le dipendenze.

Soluzione.

(a) Per prima cosa, si osservi che gli attributi N e P non compaiono nella parte destra di alcuna dipendenza. Ne segue che tali attributi dovranno comparire in ogni chiave. Inoltre, si ha che

$NP^+ = NPRCD = T$,

da cui possiamo concludere che NP è una chiave per T ed è l'unica.

(b) T è in 2NF. Ogni attributo non primo di T dipende, infatti, totalmente dall'unica chiave.

(c) T non è in 3NF. Ad esempio, la dipendenza $NR \rightarrow C$ viola la forma perché NR non è superchiave (infatti $NR^+ = NRCD$), né C è attributo primo.

Dopo aver verificato la minimalità di F, calcoliamo la scomposizione

$\rho = (NPR, NRC, NCD)$

che è in 3NF e conserva sia i dati che le dipendenze.

(d) È immediato vedere che ρ è anche una scomposizione in BCNF che rispetta i dati e le dipendenze.

□

Esercizio 4.6 Siano $R(A, B, C, D, E)$ uno schema relazionale ed
$F = \{C \rightarrow BD, AB \rightarrow DE, B \rightarrow CE, AC \rightarrow BE\}$
l'insieme di dipendenze funzionali ad esso associato. Si richiede di:

(a) stabilire se F è o meno un insieme di dipendenze minimale; se non lo è, fornire una copertura minimale per F;

(b) fornire una scomposizione di R in 3NF che conservi le dipendenze;

(c) fornire una scomposizione lossless join di R in 3NF che conservi le dipendenze.

Soluzione.

(a) Applichiamo l'algoritmo per determinare una copertura minimale:

1. rendiamo i membri destri unitarî ottenendo il nuovo insieme:
   $F_1 = \{C \rightarrow B, C \rightarrow D, AB \rightarrow D, AB \rightarrow E, B \rightarrow C, B \rightarrow E, AC \rightarrow B, AC \rightarrow E\}$;

2. rimuoviamo gli attributi ridondanti da ogni dipendenza in F_1, ottenendo l'insieme: $F_2 = \{B \to C, B \to D, B \to E, C \to B, C \to D, C \to E\}$;
3. eliminiamo, infine, le dipendenze ridondanti di F_2.

Una copertura minimale è:
$F_3 = \{B \to C, C \to B, C \to D, C \to E\}$.

(c) Osserviamo preliminarmente che una scomposizione che soddisfa le condizioni imposte al punto c) automaticamente soddisfa anche le condizioni imposte al punto b).

A partire dalla copertura minimale F_3, sostituiamo ogni insieme di dipendenze aventi lo stesso primo membro con un'unica dipendenza ottenendo:

$F_4 = \{B \to C, C \to BDE\}$.

Per ogni dipendenza $X \to Y$ in F_4, inseriamo la relazione XY in ρ. Tale passo ci porta ad inserire in ρ le relazioni BC e $BCDE$. BC può essere eliminata perché contenuta in $BCDE$.

È immediato verificare che $BCDE$ non è una chiave per R ($BCDE^+ = BCDE$). Ne segue che va aggiunta a ρ una chiave per R. A tal fine, è sufficiente osservare che A non appartiene ad alcuna dipendenza e che $C^+ = BCDE$. Ne segue che AC è una chiave per R (non è l'unica).

La scomposizione ρ voluta è:

$\rho = (AC, BCDE)$.

Come già osservato, tale scomposizione soddisfa anche la condizione b). Si noti, invece, che $\rho' = (BC, CD, CE)$ non è una scomposizione di R in $3NF$ che preserva le dipendenze (ogni relazione in ρ' è ovviamente in $3NF$, in quanto costituita da due soli attributi, le dipendenze sono banalmente preservate, ma non è una scomposizione, in quanto $BC \cup CD \cup CE \neq ABCDE$).

□

5 Altri esercizi

Esercizio 5.1 Siano R una schema relazionale ed F l'insieme di dipendenze funzionali ad esso associato.

(a) Siano $\rho = (R_1, \ldots, R_k)$ una scomposizione di R che gode della proprietà di lossless join (rispetto ad F) e $\rho' = (R_{i,1}, R_{i,2})$, con $1 \leq i \leq k$, una scomposizione di R_i che gode della proprietà di lossless join (rispetto ad $\pi_{R_i}(F)$). La scomposizione $\rho'' = (R_1, \ldots, R_{i-1}, R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i+1}, \ldots, R_k)$ gode o meno della proprietà di lossless join (rispetto ad F)? In caso di risposta affermativa fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

(b) Siano $R' \subseteq R$, $F' = \Pi_{R'}(F)$, $R'' \subseteq R'$ e $F'' = \Pi_{R''}(F')$. È vero o falso che $F'' = \Pi_{R''}(F)$? In caso di risposta affermativa fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.

Esercizio 5.2 Sia data una relazione $R(B, U, A, Q, I, D)$ con associato l'insieme di dipendenze funzionali $F = \{A \to D, I \to B, IA \to Q, B \to U\}$.

(a) Stabilire se la scomposizione $\rho = (IAQ, IB, AD, IAU)$ conserva o meno le dipendenze.

(b) Trovare le coperture minimali per la proiezione (della chiusura) di F su ciascuna delle relazioni componenti.

(c) Trovare una copertura minimale per l'unione delle proiezioni.

(d) Sia F' l'insieme delle dipendenze ricavato al punto (c). $\rho = (IAQ, IB, AD, IAU)$ conserva o meno le dipendenze in F'?

Esercizio 5.3 Sia R uno schema di relazione, F l'insieme di dipendenze ad esso associato e A un attributo primo di R rispetto a F. È vero o falso che, data una qualunque scomposizione $\rho = (R_1, \ldots, R_n)$ di R, se $A \in R_i$, con $1 \leq i \leq n$, allora A è un attributo primo di R_i rispetto a $\Pi_{R_i}(F)$? In caso di risposta positiva, fornire una dimostrazione; altrimenti, fornire un controesempio.