Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 luglio 2009

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg q \vee r \equiv (p \to (q \to r)) \wedge (q \wedge \neg r \to p)$. **V** **F** 1pt

2. Se $F \vee G$ è valida e F è soddisfacibile allora G è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

3. $(p \wedge \neg r) \vee ((q \vee s) \wedge \neg w)$ è in forma normale disgiuntiva. **V** **F** 1pt

4. Sia Γ un insieme di Hintikka di formule proposizionali tale che $p \wedge q \to r \in \Gamma$ e $\neg r \in \Gamma$. Allora $\neg p \in \Gamma$. **V** **F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$ con $c^I = 1$, $f^I(0) = f^I(2) = f^I(3) = 0$, $f^I(1) = 2$, $p^I = \{0, 3\}$, e $r^I = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 1)\}$. Allora $I \models \forall x(p(f(x)) \to r(x, c))$. **V** **F** 1pt

6. Se z non è libera in F e $I, \sigma \models F$ allora $I, \sigma[z/d] \models F$ per ogni $d \in D^I$. **V** **F** 1pt

7. $\exists x\, p(x) \to \forall y\, q(y) \equiv \forall x\, \forall y(p(x) \to q(y))$. **V** **F** 1pt

8. Quante delle seguenti formule sono γ-formule? $\forall x\, p(x) \to q(a)$, $\neg\exists x\, p(x) \wedge \forall y\, \neg q(y)$, $\neg\exists x(p(x) \wedge \forall y\, \neg q(y))$, $\neg\forall x\, p(x)$ **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

9. Se un tableau sistematico per la formula predicativa F ha un ramo infinito, allora F è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che l'enunciato $\exists x(\neg p(x) \wedge p(f(x)))$ è conseguenza logica dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \exists y(r(x, f(y)) \wedge \neg p(y))), \exists x\, p(x), \forall x(\exists y\, r(y, x) \to p(x))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'enunciato 4pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y))) \wedge \forall x(\neg p(x) \to \exists y(r(y, x) \wedge p(y))) \to$$
$$\to \forall x\, \forall y(p(x) \wedge \neg p(y) \to r(x, y)).$$

non è valido.

12. Sia $\{c, d, p, b, a\}$ un linguaggio dove c e d sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, e b e a sono simboli di relazione binari. Interpretando c come "Chiara", d come "Davide", $p(x)$ come "il padre di x", $b(x, y)$ come "x è più basso di y" e $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) se Davide non è amico di Chiara, il padre di Davide non è amico del nonno paterno di Chiara; 3pt

(ii) gli amici di Davide più bassi di Chiara sono più bassi del padre di qualche amico di Chiara. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(\neg p \to q) \wedge \neg(s \to r) \to (p \wedge s) \vee (q \wedge \neg(\neg r \to \neg s))$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrate che l'enunciato 5pt

$$\neg(\forall y\, p(y) \to \forall x\, \exists y\, r(x, y)) \wedge \forall x(\neg r(x, x) \to \neg p(x) \vee \exists y\, r(x, y))$$

è insoddisfacibile. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \to q) \vee \neg(r \vee s) \to (t \wedge (u \vee v)) \vee w.$$

Soluzioni

1. **V** come si verifica ad esempio con le tavole di verità.

2. **F** Siano ad esempio $F = p$ e $G = \neg p$: $F \vee G$ è valida e F è soddisfacibile, ma G è pure soddisfacibile.

3. **F** Il primo congiunto del secondo disgiunto non è un letterale.

4. **F** $\Gamma = \{p \wedge q \to r, \neg(p \wedge q), \neg q, \neg r\}$ è un insieme di Hintikka.

5. **V** Per ogni $d \in D^I$, $I, \sigma[x/d] \models p(f(x)) \to r(x, c)$.

6. **V** Gli stati σ e $\sigma[z/d]$ coincidono sulle variabili che occorrono libere in F. Pertanto l'affermazione segue dal Lemma 6.10 delle dispense.

7. **V** L'equivalenza logica si ottiene applicando due volte il Lemma 6.43 delle dispense.

8. **1** La prima formula è una β-formula, la seconda una α-formula, la terza una γ-formula, e la quarta una δ-formula.

9. **F** Il tableau sistematico in questione è aperto (Definizione 8.26 delle dispense) e quindi F è soddisfacibile per il Teorema di Completezza (Teorema 8.35 delle dispense).

10. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione soddisfa i tre enunciati dell'insieme, che indichiamo con F, G e H, allora soddisfa anche il primo enunciato, che indichiamo con K. Supponiamo dunque che I sia un'interpretazione che soddisfa F, G e H.

Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$. Da $I \models F$ segue allora immediatamente $I, \sigma[x/d_0] \models \exists y(r(x, f(y)) \wedge \neg p(y))$. Sia dunque $d_1 \in D^I$ tale che $(d_0, f^I(d_1)) \in r^I$ e $d_1 \notin p^I$.

Dato che $I \models H$ si ha in particolare che $I, \sigma[x/f^I(d_1)] \models \exists y\, r(y, x) \to p(x)$. Da $(d_0, f^I(d_1)) \in r^I$ discende immediatamente $I, \sigma[x/f^I(d_1)] \models \exists y\, r(y, x)$ e quindi deve essere $f^I(d_1) \in p^I$.

Abbiamo dunque mostrato che $I, \sigma[x/d_1] \models \neg p(x) \wedge p(f(x))$, che implica $I \models K$.

11. Bisogna trovare un'interpretazione che non soddisfa l'enunciato. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 3\}, \quad r^I = \{(0, 2), (3, 1)\}$$

ha questa caratteristica, come pure l'interpretazione J definita da

$$D^J = \mathbb{Z}, \quad p^J = \{\, n \,:\, n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (2n, 2n+1) \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}.$$

12. (i) $\neg a(d, c) \to \neg a(p(d), p(p(c)))$;
(ii) $\forall x(a(x, d) \wedge b(x, c) \to \exists y(a(y, c) \wedge b(x, p(y))))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$\underline{\neg\big((\neg p \to q) \land \neg(s \to r) \to (p \land s) \lor (q \land \neg(\neg r \to \neg s))\big)}$$

$$\underline{(\neg p \to q) \land \neg(s \to r)}, \neg\big((p \land s) \lor (q \land \neg(\neg r \to \neg s))\big)$$

$$\neg p \to q, \underline{\neg(s \to r)}, \neg\big((p \land s) \lor (q \land \neg(\neg r \to \neg s))\big)$$

$$\neg p \to q, s, \neg r, \underline{\neg\big((p \land s) \lor (q \land \neg(\neg r \to \neg s))\big)}$$

$$\neg p \to q, s, \neg r, \underline{\neg(p \land s)}, \neg(q \land \neg(\neg r \to \neg s))$$

$$\underline{\neg p \to q}, s, \neg r, \neg p, \neg(q \land \neg(\neg r \to \neg s)) \qquad \neg p \to q, s, \neg r, \neg s, \neg(q \land \neg(\neg r \to \neg s))$$

$$\otimes$$

$$p, s, \neg r, \neg p, \neg(q \land \neg(\neg r \to \neg s)) \qquad q, s, \neg r, \neg p, \underline{\neg(q \land \neg(\neg r \to \neg s))}$$

$$\otimes$$

$$q, s, \neg r, \neg p, \neg q \qquad q, s, \neg r, \neg p, \underline{\neg r \to \neg s}$$

$$\otimes$$

$$q, s, \neg r, \neg p, r \qquad q, s, \neg r, \neg p, \neg s$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare l'insoddisfacibilità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per esso. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall y\, p(y)$, $\forall x(\neg r(x,x) \to \neg p(x) \vee \exists y\, r(x,y))$ e $\neg\exists y\, r(a,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(F \to \forall x\, \exists y\, r(x,y)) \wedge G}$$

$$\underline{\neg(F \to \forall x\, \exists y\, r(x,y))}, G$$

$$F, \underline{\neg\forall x\, \exists y\, r(x,y)}, G$$

$$F, \underline{H}, G$$

$$F, H, \neg r(a,a), \underline{G}$$

$$F, H, \neg r(a,a), G, \underline{\neg r(a,a) \to \neg p(a) \vee \exists y\, r(a,y)}$$

$$F, H, \neg r(a,a), G, r(a,a) \qquad F, H, \neg r(a,a), G, \underline{\neg p(a) \vee \exists y\, r(a,y)}$$

$$\otimes$$

$$\underline{F}, H, \neg r(a,a), G, \neg p(a) \qquad F, H, \neg r(a,a), G, \underline{\exists y\, r(a,y)}$$

$$F, p(a), H, \neg r(a,a), G, \neg p(a) \qquad F, \underline{H}, \neg r(a,a), G, r(a,b)$$

$$\otimes$$

$$F, H, \neg r(a,b), \neg r(a,a), G, r(a,b)$$

$$\otimes$$

15.

$$\langle[(p \to q) \vee \neg(r \vee s) \to (t \wedge (u \vee v)) \vee w]\rangle$$
$$\langle[\neg((p \to q) \vee \neg(r \vee s)), (t \wedge (u \vee v)) \vee w]\rangle$$
$$\langle[\neg((p \to q) \vee \neg(r \vee s)), t \wedge (u \vee v), w]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to q), t \wedge (u \vee v), w], [r \vee s, t \wedge (u \vee v), w]\rangle$$
$$\langle[p, t \wedge (u \vee v), w], [\neg q, t \wedge (u \vee v), w], [r, s, t \wedge (u \vee v), w]\rangle$$
$$\langle[p, t, w], [p, u \vee v, w], [\neg q, t, w], [\neg q, u \vee v, w], [r, s, t, w], [r, s, u \vee v, w]\rangle$$
$$\langle[p, t, w], [p, u, v, w], [\neg q, t, w], [\neg q, u, v, w], [r, s, t, w], [r, s, u, v, w]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee t \vee w) \wedge (p \vee u \vee v \vee w) \wedge (\neg q \vee t \vee w) \wedge (\neg q \vee u \vee v \vee w) \wedge (r \vee s \vee t \vee w) \wedge (r \vee s \vee u \vee v \vee w).$$