Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
22 luglio 2008

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \to q \land r) \equiv (q \to \neg r) \land p$. **V** **F** 1pt

2. L'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva non ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

3. Se $F \land G$ è valida allora $\neg F$ è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

4. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con $c^I = 2$, $p^I = \{0, 1, 3, 4\}$ e $r^I = \{(0, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$. Allora $I \models \forall x(p(x) \to r(x, c) \lor \exists y(p(y) \land r(y, x)))$. **V** **F** 1pt

5. Quante delle seguenti formule sono enunciati? $\exists x(p(x) \land \forall y\, r(x, f(y)))$, $\exists x(\forall y\, r(x, y) \land r(x, f(y)))$, $\exists x(\forall y\, r(x, y) \land r(x, f(x)))$, $\exists x\, \forall y\, r(x, y) \land r(x, f(y))$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

6. $\exists x(p(x) \land \neg q(x)) \lor \exists y(\neg p(y) \land q(y))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α β γ δ 1pt

7. $\exists y\, p(y) \to \forall y\, r(y, y) \equiv \forall y(p(y) \to r(y, y))$. **V** **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule predicative tale che $\forall x\, r(x, x) \in \Gamma$, $\forall x(p(x) \to \neg r(x, c)) \in \Gamma$ e $\forall x(p(x) \lor \neg r(c, x)) \in \Gamma$. **V** **F** 1pt

9. Il metodo dei tableaux è una procedura di decisione per l'insoddisfacibilità nella logica predicativa. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che l'insieme di formule 4pt

$$\{\forall x\, \forall y(r(x, y) \lor r(y, x)), \forall x\, \exists y\, \neg r(y, x)\}$$

è soddisfacibile.

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'insieme di formule 4pt

$$\{\forall x\, \forall y(r(x, y) \lor r(y, x)), \exists x\, \neg\forall y\, r(x, y), \forall x\, \forall y(r(x, y) \to r(y, x))\}$$

è insoddisfacibile.

12. Sia $\{c, d, p, b, a\}$ un linguaggio dove c e d sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, e b e a sono simboli di relazione binari. Interpretando c come "Carla", d come "Dario", $p(x)$ come "il padre di x", $b(x, y)$ come "x è più basso di y" e $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) il padre di Carla è più basso del padre di Dario, che a sua volta è più basso di Dario; 3pt

(ii) se qualcuno è più basso di qualche amico del padre di Dario, allora non è amico di Carla. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \to \neg q \wedge r) \wedge (\neg s \vee \neg t) \to (t \wedge \neg(s \vee p)) \vee (r \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \to t)$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrate la validità di 5pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg r(y, x))) \wedge p(a) \to \exists x \neg \forall y\, r(x, y).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \wedge \neg q \to \neg r \wedge s) \to \neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w)\big).$$

Soluzioni

1. V Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che le due formule sono soddisfatte dalle stesse valutazioni.

2. F Si veda il Lemma 3.24 delle dispense.

3. V Dato che $F \wedge G$ è valida in ogni interpretazione F è vera e quindi $\neg F$ è falsa. Percio $\neg F$ è insoddisfacibile.

4. V Assegnando ad x qualsiasi elemento di D^I l'implicazione risulta vera: per 2 risulta falso l'antecedente, per 0 e 4 è vero il primo congiunto del conseguente, per 1 e 3 il secondo congiunto del conseguente.

5. 2 La prima e la terza formula sono gli unici enunciati. Nella seconda formula la variabile y è libera, mentre nella quarta formula sono libere sia x che y.

6. β La formula in esame è una disgiunzione.

7. F Vedere l'Esercizio 6.48 e la Nota 6.49 delle dispense.

8. F Supponiamo per assurdo che Γ sia un insieme di Hintikka che contiene le formule indicate. Da $\forall x\, r(x,x) \in \Gamma$ segue $r(c,c) \in \Gamma$. Da $\forall x(p(x) \rightarrow \neg r(x,c)) \in \Gamma$ segue $\neg p(c) \in \Gamma$ oppure $\neg r(c,c) \in \Gamma$. Visto che la seconda alternativa non è possibile, deve essere $\neg p(c) \in \Gamma$. D'altro canto, da $\forall x(p(x) \vee \neg r(c,x)) \in \Gamma$ segue $p(c) \in \Gamma$ oppure $\neg r(c,c) \in \Gamma$, che sono entrambe impossibili.

9. F Si veda la Nota 8.43 delle dispense.

10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati dell'insieme. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad r^I = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(2,0)\}$$

ha queste caratteristiche, come pure l'interpretazione J definita da

$$D^J = \mathbb{N}, \quad r^J = \left\{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, n \leq m \right\}.$$

11. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione soddisfa i tre enunciati dell'insieme, che indichiamo con F, G e H. Per assurdo sia I un'interpretazione tale che $I \models F, G, H$.

$I \models G$ implica l'esistenza di $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \neg\forall y\, r(x,y)$. Quindi esiste $d_1 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0, y/d_1] \models \neg r(x,y)$, cioè $(d_0,d_1) \notin r^I$.

Da $I \models F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0, y/d_1] \models r(x,y) \vee r(y,x)$, cioè $(d_0,d_1) \in r^I$ oppure $(d_1,d_0) \in r^I$. Alla luce di quanto ottenuto in precedenza, deve essere $(d_1,d_0) \in r^I$.

Visto che $I \models H$, vale in particolare $I, \sigma[x/d_1, y/d_0] \models r(x,y) \rightarrow r(y,x)$. Per quanto ottenuto, $I, \sigma[x/d_1, y/d_0] \models r(x,y)$ e quindi deve essere anche $I, \sigma[x/d_1, y/d_0] \models r(y,x)$, che significa $(d_0,d_1) \in r^I$ ed è una contraddizione.

12. (i) $b(p(c), p(d)) \wedge b(p(d), d)$;
(ii) $\forall x(\exists y(b(x, y) \wedge a(y, p(d))) \to \neg a(x, c))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

Dopo i primi passaggi in cui si lavora solo su α-formule otteniamo un nodo etichettato con $p \to \neg q \wedge r, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg(r \wedge \neg q), \neg p \to t$. Agendo sulla β-formula $p \to \neg q \wedge r$ otteniamo due nodi. Dal nodo di sinistra inizia il seguente tableau:

$$\neg p, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg(r \wedge \neg q), \underline{\neg p \to t}$$

$$\neg p, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg(r \wedge \neg q), p \qquad \otimes$$

$$\neg p, \underline{\neg s \vee \neg t}, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg(r \wedge \neg q), t$$

$$\neg p, \neg s, \underline{\neg(t \wedge \neg(s \vee p))}, \neg(r \wedge \neg q), t \qquad \neg p, \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg(r \wedge \neg q), t \quad \otimes$$

$$\neg p, \neg s, \neg t, \neg(r \wedge \neg q), t \quad \otimes \qquad \neg p, \neg s, \underline{s \vee p}, \neg(r \wedge \neg q), t$$

$$\neg p, \neg s, s, \neg(r \wedge \neg q), t \quad \otimes \qquad \neg p, \neg s, p, \neg(r \wedge \neg q), t \quad \otimes$$

Dal nodo di destra inizia invece il seguente tableau:

$$\underline{\neg q \wedge r}, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg(r \wedge \neg q), \neg p \to t$$

$$\neg q, r, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \underline{\neg(r \wedge \neg q)}, \neg p \to t$$

$$\neg q, r, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), \neg r, \neg p \to t \quad \otimes$$

$$\neg q, r, \neg s \vee \neg t, \neg(t \wedge \neg(s \vee p)), q, \neg p \to t \quad \otimes$$

Dato che il tableau è chiuso la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare l'insoddisfacibilità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice l'enunciato. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(p(x) \to \exists y(r(x,y) \wedge \neg r(y,x)))$, $\neg\exists x\, \neg\forall y\, r(x,y)$ e $\forall y\, r(c,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(F \wedge p(a) \to \exists x\, \neg\forall y\, r(x,y))}$$

$$\underline{F \wedge p(a)}, G$$

$$\underline{F}, p(a), G$$

$$F, p(a) \to \exists y(r(a,y) \wedge \neg r(y,a)), p(a), G$$

$$\begin{array}{cc}
F, \neg p(a), p(a), G & F, \underline{\exists y(r(a,y) \wedge \neg r(y,a))}, p(a), G \\
\otimes & F, \underline{r(a,c) \wedge \neg r(c,a)}, p(a), G \\
 & F, r(a,c), \neg r(c,a), p(a), \underline{G} \\
 & F, r(a,c), \neg r(c,a), p(a), G, \underline{H} \\
 & F, r(a,c), \neg r(c,a), p(a), G, H, r(c,a) \\
 & \otimes
\end{array}$$

15.

$$[\langle \neg\big((p \wedge \neg q \to \neg r \wedge s) \to \neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w)\big)\rangle]$$
$$[\langle p \wedge \neg q \to \neg r \wedge s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \wedge \neg q), \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle, \langle \neg r \wedge s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \wedge \neg q), \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle, \langle \neg r, s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle, \langle q, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle, \langle \neg r, s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg w))\rangle]$$
$$[\langle \neg p, t\rangle, \langle \neg p, u \wedge \neg w\rangle, \langle q, t\rangle, \langle q, u \wedge \neg w\rangle, \langle \neg r, s, t\rangle, \langle \neg r, s, u \wedge \neg w\rangle]$$
$$[\langle \neg p, t\rangle, \langle \neg p, u, \neg w\rangle, \langle q, t\rangle, \langle q, u, \neg w\rangle, \langle \neg r, s, t\rangle, \langle \neg r, s, u, \neg w\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge t) \vee (\neg p \wedge u \wedge \neg w) \vee (q \wedge t) \vee (q \wedge u \wedge \neg w) \vee (\neg r \wedge s \wedge t) \vee (\neg r \wedge s \wedge u \wedge \neg w).$$