Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
9 gennaio 2008

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \to \neg(q \to r) \models (\neg p \to r) \to q$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \models G$ e $G \models H$ allora $\neg H \wedge F$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. Quante delle seguenti formule sono in forma normale congiuntiva?
$\neg p \vee q$, $p \wedge \neg q$, $p \wedge (q \vee \neg r)$, $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\forall x \forall y(r(x,y) \to r(y,x))$, $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \exists y\, r(y,x))$,
$\forall x(\exists y\, r(x,y) \vee p(x))$, $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to r(y,x))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Se F è una formula predicativa soddisfacibile allora nessun tableaux (sistematico o meno) per F sarà chiuso. **V** | **F** 1pt

6. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule predicative tale che
$\forall x \neg(q(x) \to r(x,x)) \in \Gamma$, $\neg\exists x(p(x) \wedge q(x)) \in \Gamma$ e $p(a) \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

7. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0,1,2,3\}$
con $a^I = 1$, $p^I = \{0,3\}$ e $r^I = \{(0,0),(0,1),(1,1),(3,0),(3,1)\}$.
Allora $I \models \forall x(r(x,a) \to p(x) \vee \exists y\, r(y,x))$. **V** | **F** 1pt

8. $\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \models \exists x(p(x) \wedge q(x))$. **V** | **F** 1pt

9. Se F è uno dei ridotti dell'α-formula G allora $F \models G$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare l'insoddisfacibilità di 4pt

$$\forall x \neg p(f(x)) \wedge \forall x(\neg p(x) \to \exists y\, r(x, f(y))) \wedge \forall z(\exists x\, r(x,z) \to p(z)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare che 4pt

$$\forall x \exists y(r(x,y) \wedge r(y,x)), \forall x \neg r(x,x) \not\models \forall x \forall y(r(x,y) \to r(y,x)).$$

12. Sia $\{a, p, m, c, s\}$ un linguaggio dove a è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, m è un simbolo di relazione unario e c e s sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Andrea", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "x è un medico", $c(x, y)$ come "x cura y" e $s(x, y)$ come "x stima y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Andrea è un medico che non cura il proprio padre; 3pt

(ii) qualche medico stima il proprio padre e chiunque lo curi (il padre). 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$\big(p \to ((q \to r) \land \neg(\neg s \to r))\big) \land \neg(q \lor s \to t) \land (\neg p \to t)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\forall x(\forall y\, r(x, y) \to \neg r(x, x)) \to \forall x\, \exists y\, \neg r(x, y).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg(p \lor \neg q \to \neg r) \land (s \land \neg t \to u \land w).$$

Soluzioni

1. **F** Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che esistono valutazioni che soddisfano la formula a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quella a destra.
2. **V** Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa $\neg H \wedge F$. Dato che $I \models F$ per la prima ipotesi si ha $I \models G$. Usando la seconda ipotesi si ha $I \models H$ e di conseguenza $I \not\models \neg H$, che contraddice $I \models \neg H \wedge F$.
3. **4** Tutte le formule sono in forma normale congiuntiva. La prima ha un solo congiunto, che è la disgiunzione di due letterali. Ognuna delle altre tre ha due congiunti, alcuni dei quali sono disgiunzione di un solo letterale.
4. **3** L'ultima formula è l'unica a non essere un enunciato, perché l'ultima occorrenza di y è libera.
5. **V** L'affermazione è una conseguenza immediata del teorema di correttezza (teorema 8.27 delle dispense).
6. **F** Se Γ è un insieme di Hintikka che contiene le formule indicate allora $\neg(q(a) \to r(a,a)) \in \Gamma$ e perciò in particolare $q(a) \in \Gamma$. Inoltre deve essere anche $\neg(p(a) \wedge q(a)) \in \Gamma$, che implica $\neg p(a) \in \Gamma$ oppure $\neg q(a) \in \Gamma$. Nessuna di queste due possibilità può avvenire, visto che $p(a) \in \Gamma$ e $q(a) \in \Gamma$.
7. **V** Si verifica assegnando ad x i quattro elementi del dominio.
8. **F** L'interpretazione data da $D^I = \{0,1\}$, $p^I = \{0\}$ e $q^I = \{1\}$ soddisfa la formula a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quella a destra. Vedere l'esercizio 6.48 delle dispense.
9. **F** Se H è l'altro ridotto di G allora $G \equiv F \wedge H$, e in generale $F \not\models F \wedge H$. Si consideri ad esempio $F = p$ e $G = p \wedge q$.
10. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione soddisfa l'enunciato in esame, che è la congiunzione di tre enunciati che indichiamo con F, G e H. Per assurdo sia I un'interpretazione tale che $I \models F, G, H$.

    $I \models F$ implica $I, \sigma[x/d] \models \neg p(f(x))$ (cioè $f^I(d) \notin p^I$) per ogni $d \in D^I$. Fissiamo un $d_0 \in D^I$: in particolare $f^I(d_0) \notin p^I$.

    Dato che $I \models G$ si ha $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \neg p(x) \to \exists y\, r(x, f(y))$. Per quanto ottenuto in precedenza si ha $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(x, f(y))$ ed esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_0), f^I(d_1)) \in r^I$.

    Dato che $I \models H$ si ha $I, \sigma[z/f^I(d_1)] \models \exists x\, r(x,z) \to p(z)$. Per quanto ottenuto in precedenza $I, \sigma[z/f^I(d_1), x/f^I(d_0)] \models r(x,z)$ e perciò $I, \sigma[z/f^I(d_1)] \models \exists x\, r(x,z)$. Quindi $I, \sigma[z/f^I(d_1)] \models p(z)$, che significa $f^I(d_1) \in p^I$ e contraddice quanto ottenuto nel secondo paragrafo.
11. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica ma non soddisfi l'enunciato sulla destra.

    L'interpretazione I definita da

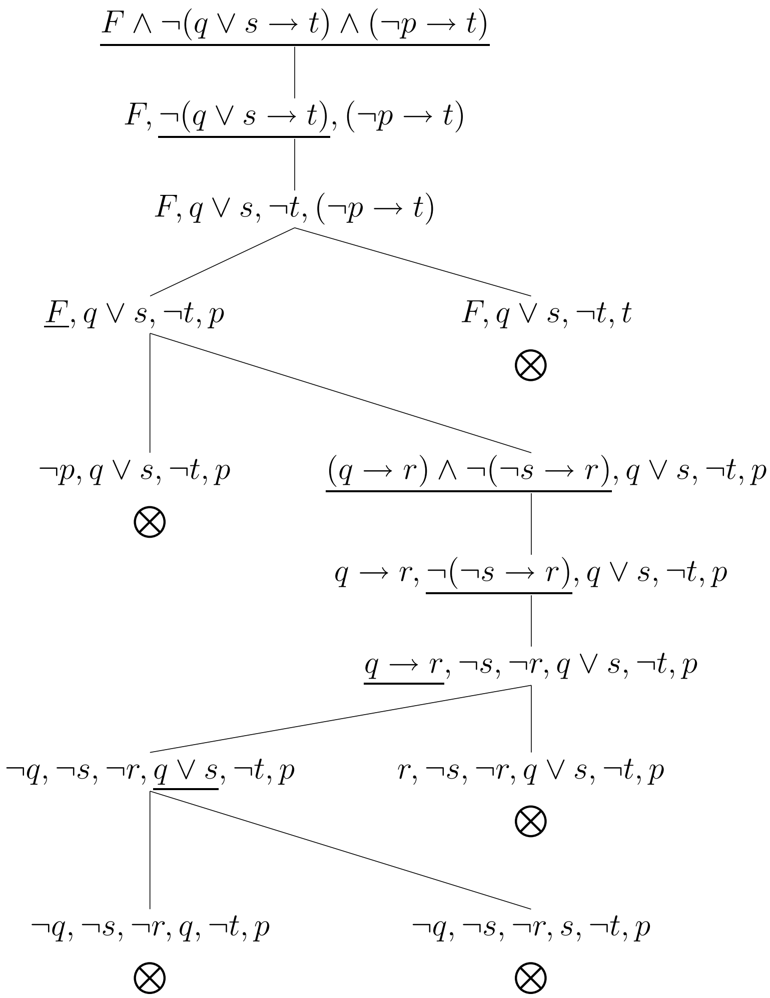
    $$D^I = \{0,1,2\}, \qquad r^I = \{(0,1),(1,0),(0,2),(1,2),(2,1)\}$$

    ha questa caratteristica.

12. (i) $m(a) \wedge \neg c(a, p(a))$;

(ii) $\exists x(m(x) \wedge s(x, p(x)) \wedge \forall y(c(y, p(x)) \to s(x, y)))$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per essa. Indichiamo con F la formula $p \to ((q \to r) \wedge \neg(\neg s \to r))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Dato che il tableau è chiuso la formula di partenza è insoddisfacibile.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice la negazione dell'enunciato. Indichiamo con F e G le γ-formule $\forall x(\forall y\, r(x,y) \to \neg r(x,x))$ e $\neg\exists y\, \neg r(a,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(F \to \forall x\, \exists y\, \neg r(x,y))}$$

$$F, \underline{\neg\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y)}$$

$$F, \underline{G}$$

$$\underline{F}, G, r(a,a)$$

$$F, \forall y\, r(a,y) \to \neg r(a,a), G, r(a,a)$$

$$\begin{array}{cc}
F, \underline{\neg\forall y\, r(a,y)}, G, r(a,a) & F, \neg r(a,a), G, r(a,a) \\
 & \otimes \\
F, \neg r(a,b), \underline{G}, r(a,a) & \\
F, \neg r(a,b), G, r(a,b), r(a,a) & \\
\otimes &
\end{array}$$

15.

$$[\langle \neg(p \vee \neg q \to \neg r) \wedge (s \wedge \neg t \to u \wedge w)\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee \neg q \to \neg r), s \wedge \neg t \to u \wedge w\rangle]$$
$$[\langle p \vee \neg q, r, s \wedge \neg t \to u \wedge w\rangle]$$
$$[\langle p, r, s \wedge \neg t \to u \wedge w\rangle, \langle \neg q, r, s \wedge \neg t \to u \wedge w\rangle]$$
$$[\langle p, r, \neg(s \wedge \neg t)\rangle, \langle p, r, u \wedge w\rangle, \langle \neg q, r, \neg(s \wedge \neg t)\rangle, \langle \neg q, r, u \wedge w\rangle]$$
$$[\langle p, r, \neg s\rangle, \langle p, r, t\rangle, \langle p, r, u, w\rangle, \langle \neg q, r, \neg s\rangle, \langle \neg q, r, t\rangle, \langle \neg q, r, u, w\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p\wedge r\wedge\neg s)\vee(p\wedge r\wedge t)\vee(p\wedge r\wedge u\wedge w)\vee(\neg q\wedge r\wedge\neg s)\vee(\neg q\wedge r\wedge t)\vee(\neg q\wedge r\wedge u\wedge w).$$