Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
11 settembre 2008

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \to q \wedge r) \equiv (q \to \neg r) \wedge p$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \wedge G$ è insoddisfacibile e F è soddisfacibile allora G è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. La negazione di una α-formula è una β-formula. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono in forma normale disgiuntiva?
$(p \wedge \neg s) \vee (r \wedge \neg q)$, $p \to \neg r$, $\neg(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s)$, $p \vee (q \wedge r)$ **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Se Γ è un insieme di Hintikka di formule proposizionali tale che $p \to q \wedge \neg r \in \Gamma$ allora $r \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

6. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$ con $p^I = \{1, 3\}$ e $r^I = \{\, (n_0, n_1, n_2) \,:\, n_0 \text{ e } n_2 \text{ sono dispari e } n_1 \text{ è pari} \,\}$.
Allora $I \models \forall x\, \forall y\, \forall z\, (p(x) \wedge p(y) \wedge \neg p(z) \to r(x, z, y))$. **V** | **F** 1pt

7. $\neg\forall x\, \neg\forall y\, r(x, y) \equiv \forall y\, \exists x\, r(x, y)$. **V** | **F** 1pt

8. Quante delle seguenti formule sono δ-formule?
$\neg\forall x\, p(x)$, $\exists x\, \neg p(x)$, $\neg\exists x\, p(x)$, $\exists x\, p(x) \to q(c)$ **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

9. Se un tableau costruito sistematicamente per la formula predicativa F è infinito, allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \forall y (r(x, y) \vee r(y, x)), \exists x\, \forall y\, r(x, y) \not\models \exists y\, \forall x\, r(x, y).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x, y), \forall x(\neg r(x, x) \to p(x)), \exists x\, \forall y(r(x, y) \to \neg p(y)) \models \exists x\, r(x, x).$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{e, m, s, sr, r, c\}$ un linguaggio dove e è un simbolo di costante, m un simbolo di funzione unari, s e sr sono simboli di relazione unari e r e c sono simboli di relazione binari. Interpretando e come "Einstein", $m(x)$ come "il miglior articolo di x", $s(x)$ come "x è uno scienziato", $sr(x)$ come "x è uno scrittore", $r(x, y)$ come "x è più rigoroso di y", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi:

(i) chi non conosce il miglior articolo di Einstein non conosce Einstein; 3pt

(ii) ogni scienziato conosce uno scrittore il cui miglior articolo è più rigoroso del suo miglior articolo. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \to q \vee \neg(\neg r \to s)) \wedge (\neg q \vee \neg r \to p) \wedge \neg((p \wedge \neg s) \vee \neg(r \to \neg s)) \wedge (\neg q \vee s)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrate che l'insieme di enunciati 5pt

$$\{\forall x(q(x) \to \exists y\, r(x, y)), \exists x\, \forall y\, \neg r(x, y), \forall x(\neg r(x, x) \to q(x))\}$$

è insoddisfacibile. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\big((\neg p \to q \wedge \neg r) \wedge \neg s\big) \to \neg(t \to u \vee \neg v).$$

Soluzioni

1. V Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che le due formule sono soddisfatte dalle stesse valutazioni.

2. F Ad esempio se F è p e G è $\neg p$ si hanno le ipotesi ma non la conclusione.

3. F La negazione di una α-formula del tipo $\neg(F \vee G)$ oppure $\neg(F \to G)$ è una doppia negazione.

4. 2 La prima e la quarta formula sono in forma normale disgiuntiva. La seconda formula è un implicazione e nella terza formula il primo disgiunto non è una congiunzione.

5. F $\{p \to q \wedge \neg r, \neg p, r\}$ è un insieme di Hintikka.

6. V Assegnando ad x, y e z qualsiasi elemento di D^I l'implicazione risulta vera.

7. F La formula a sinistra dell'equivalenza logica è logicamente equivalente a $\exists x \forall y\, r(x, y)$, che non è conseguenza logica della formula sulla destra.

8. 2 Le prime due formule sono δ-formule. La terza formula è una γ-formula e la quarta formula è una β-formula.

9. V Se il tableau è infinito allora ha un ramo infinito per il Lemma di König (Lemma 4.13 delle dispense), e quindi è aperto per la Definizione 8.26 delle dispense. Per il teorema di completezza (Teorema 8.35 delle dispense), F è soddisfacibile.

10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello sulla destra. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\},$$
$$r^I = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

ha queste caratteristiche, come pure l'interpretazione J definita da

$$D^J = \mathbb{N}, \quad r^J = \left\{ (n, m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, n \leq m \right\}.$$

11. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con F, G e H, allora soddisfa anche l'enunciato a destra. Sia dunque I un'interpretazione tale che $I \models F, G, H$.

$I \models H$ implica l'esistenza di un elemento $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y(r(x, y) \to \neg p(y))$. Dato che $I \models F$ si ha $I, \sigma[x/d_0] \models \exists y\, r(x, y)$ e quindi esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(d_0, d_1) \in r^I$.

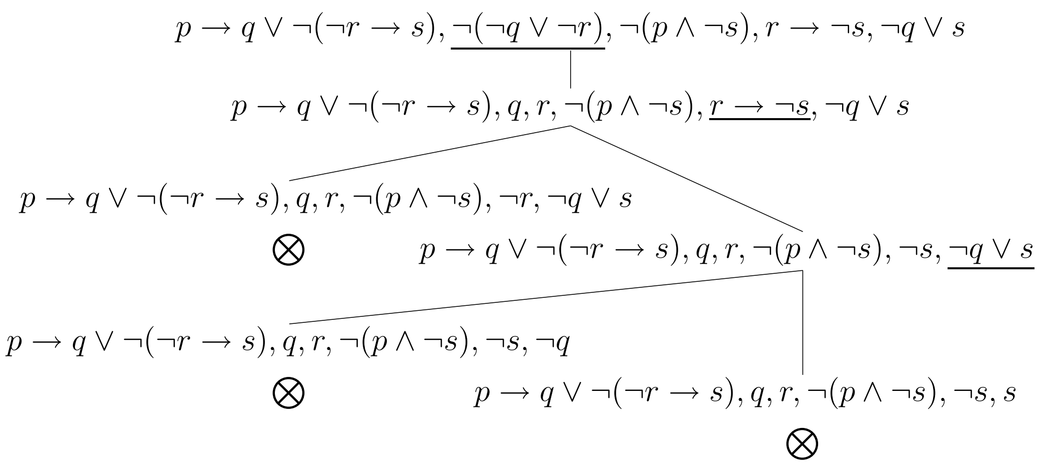
Dato che, per quanto ottenuto in precedenza, abbiamo in particolare che $I, \sigma[x/d_0, y/d_1] \models r(x, y) \to \neg p(y)$, deve essere $d_1 \notin p^I$.

Da $I \models G$ segue $I, \sigma[x/d_1] \models \neg r(x, x) \to p(x)$. Visto che $d_1 \notin p^I$ deve essere $I, \sigma[x/d_1] \not\models \neg r(x, x)$, cioè $(d_1, d_1) \notin r^I$. Perciò $I \models \exists x\, r(x, x)$, come desiderato.

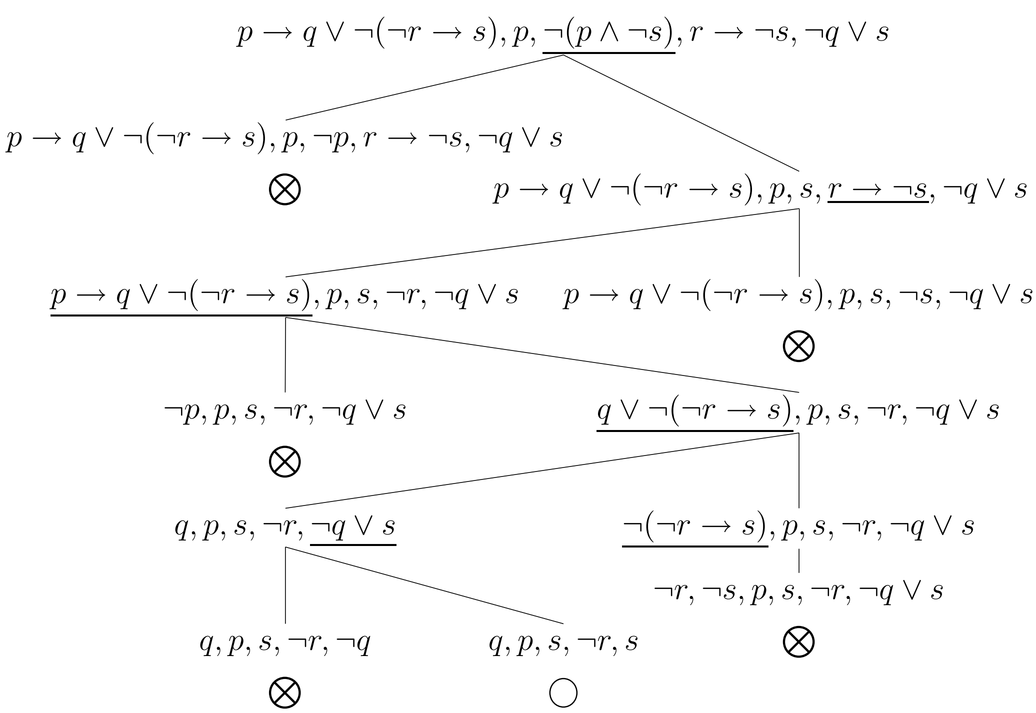
12. (i) $\forall x(\neg c(x, m(e)) \to \neg c(x, e))$;
(ii) $\forall x(s(x) \to \exists y(sr(y) \wedge c(x, y) \wedge r(m(y), m(x))))$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per la formula stessa. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

Dopo i primi passaggi in cui si agisce solo su α-formule otteniamo un nodo etichettato con le β-formule $p \to q \vee \neg(\neg r \to s)$, $\neg q \vee \neg r \to p$, $\neg(p \wedge \neg s)$, $r \to \neg s$ e $\neg q \vee s$. Agendo su $\neg q \vee \neg r \to p$ otteniamo due nodi. Dal nodo di sinistra inizia il seguente tableau chiuso:



Dal nodo di destra inizia invece il seguente tableau:



Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza è soddisfacibile. Un'interpretazione che soddisfa la formula è definita da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Per dimostrare l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice l'insieme stesso. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(q(x) \to \exists y\, r(x, y))$, $\forall x(\neg r(x, x) \to q(x))$ e $\forall y\, \neg r(a, y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$F, \underline{\exists x\, \forall y\, \neg r(x, y)}, G$$

$$F, \underline{H}, G$$

$$F, H, \neg r(a, a), \underline{G}$$

$$F, H, \neg r(a, a), G, \underline{\neg r(a, a) \to q(a)}$$

$$F, H, \neg r(a, a), G, r(a, a) \qquad \underline{F}, H, \neg r(a, a), G, q(a)$$

$$\otimes$$

$$F, q(a) \to \exists y\, r(a, y), H, \neg r(a, a), G, q(a)$$

$$F, \neg q(a), H, \neg r(a, a), G, q(a) \qquad F, \underline{\exists y\, r(a, y)}, H, \neg r(a, a), G, q(a)$$

$$\otimes$$

$$F, r(a, b), \underline{H}, \neg r(a, a), G, q(a)$$

$$F, r(a, b), H, \neg r(a, b), \neg r(a, a), G, q(a)$$

$$\otimes$$

15.

$$\langle [\big((\neg p \to q \wedge \neg r) \wedge \neg s\big) \to \neg(t \to u \vee \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg\big((\neg p \to q \wedge \neg r) \wedge \neg s\big), \neg(t \to u \vee \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \to q \wedge \neg r), s, \neg(t \to u \vee \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s, \neg(t \to u \vee \neg v)], [\neg(q \wedge \neg r), s, \neg(t \to u \vee \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s, t], [\neg p, s, \neg(u \vee \neg v)], [\neg q, r, s, \neg(t \to u \vee \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s, t], [\neg p, s, \neg u], [\neg p, s, v], [\neg q, r, s, t], [\neg q, r, s, \neg(u \vee \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s, t], [\neg p, s, \neg u], [\neg p, s, v], [\neg q, r, s, t], [\neg q, r, s, \neg u], [\neg q, r, s, v] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee \neg u) \wedge (\neg p \vee s \vee v) \wedge (\neg q \vee r \vee s \vee t) \wedge (\neg q \vee r \vee s \vee \neg u) \wedge (\neg q \vee r \vee s \vee v).$$