Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
4 dicembre 2007

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \vee q) \wedge (r \rightarrow p) \models \neg(\neg r \rightarrow q)$. **V** **F** 1pt

2. L'algoritmo di Fitting per la forma normale disgiuntiva non ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

3. Il metodo dei tableaux è una procedura di decisione per la insoddisfacibilità nella logica proposizionale. **V** **F** 1pt

4. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule proposizionali tale che $\neg(p \rightarrow \neg q) \in \Gamma$ e $p \rightarrow q \in \Gamma$. **V** **F** 1pt

5. Se $F \wedge G$ è valida allora F e G sono valide. **V** **F** 1pt

6. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ con $p^I = \{0, 2, 4\}$ e $r^I = \{(0, 4), (4, 2), (5, 4), (5, 5)\}$. Allora $I \models \exists x \forall y (p(y) \rightarrow r(x, y) \vee r(y, x))$. **V** **F** 1pt

7. Quante sono le variabili libere nella formula $\exists x(\forall y\, r(x, y) \rightarrow \neg r(f(y), x) \wedge \exists z(p(f(z)) \wedge \neg r(z, x)))$? **0** **1** **2** **3** 1pt

8. Quante delle seguenti sono δ-formule? $\forall x\, p(x) \rightarrow q(x)$, $\neg\forall x\, p(x)$, $\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$, $\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x, y))$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

9. $\neg(\forall x\, F \wedge \exists y(G \rightarrow H)) \equiv \exists x \neg F \vee \forall y(G \wedge \neg H)$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare la soddisfacibilità di 4pt

$$\exists x\big(\forall y(r(x, y) \vee r(y, x)) \wedge \exists z\, \neg r(x, z) \wedge \exists z\, \neg r(z, x)\big).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare che l'insieme di formule 4pt

$$\{r(a, a), \forall x(r(x, x) \rightarrow \forall y\, r(y, x)), \forall x(\exists y\, r(x, y) \rightarrow \neg r(f(x), x))\}$$

è insoddisfacibile.

12. Sia $\{c, p, b, v, a\}$ un linguaggio dove c è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, b e v sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando c come "Claudio", $p(x)$ come "il padre di x", $b(x)$ come "x ama la birra", $v(x)$ come "x ama il vino" e $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) il padre di Claudio ama il vino ma non la birra, e ogni amico di Claudio ama almeno uno dei due; 3pt

(ii) chi ama la birra ha almeno un amico che non ama né il vino né la birra. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \wedge \neg q \rightarrow r) \wedge (p \vee \neg s) \wedge s \rightarrow (t \wedge r) \vee \neg(q \rightarrow \neg s)$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare che 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \rightarrow p(x)), \forall x(\neg p(x) \rightarrow \exists y\, r(y, x)) \models \exists x\, \neg p(x) \rightarrow \exists x\, p(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg(p \rightarrow q \wedge \neg r) \vee (s \vee \neg t \rightarrow u).$$

Soluzioni

1. **V** Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che qualsiasi valutazione che soddisfa la formula a sinistra del simbolo di conseguenza logica, soddisfa anche quella a destra.
2. **F** Vedere il lemma 3.24 delle dispense.
3. **V** Per sapere se F è soddisfacibile costruiamo un tableau per F: siamo nel caso proposizionale e la costruzione terminerà (proprietà della terminazione forte, teorema 4.14 delle dispense). Se il tableau è chiuso allora F è insoddisfacibile (teorema di correttezza), se il tableau è aperto allora F è soddisfacibile (teorema di completezza).
4. **V** $\{\neg(p \to \neg q), p \to q, p, \neg\neg q, q\}$ è un insieme di Hintikka.
5. **V** Sia I un'interpretazione qualsiasi: dato che $F \wedge G$ è valida si ha $I \models F \wedge G$ e quindi $I \models F$ e $I \models G$.
6. **F** L'unico $d \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d, y/0] \models p(y) \to r(x,y) \vee r(y,x)$ è 4. Dato che $I, \sigma[x/4, y/4] \not\models p(y) \to r(x,y) \vee r(y,x)$, I non soddisfa l'enunciato in questione.
7. **1** L'ultima occorrenza di y è libera e tutte le altre occorrenze di variabili sono legate.
8. **2** La seconda e la quarta formula sono δ-formule, mentre le altre due sono γ-formule.
9. **V**

$$\begin{aligned}\neg(\forall x\, F \wedge \exists y(G \to H)) &\equiv \neg\forall x\, F \vee \neg\exists y(G \to H)\\ &\equiv \exists x\, \neg F \vee \forall y \neg(G \to H)\\ &\equiv \exists x\, \neg F \vee \forall y(G \wedge \neg H).\end{aligned}$$

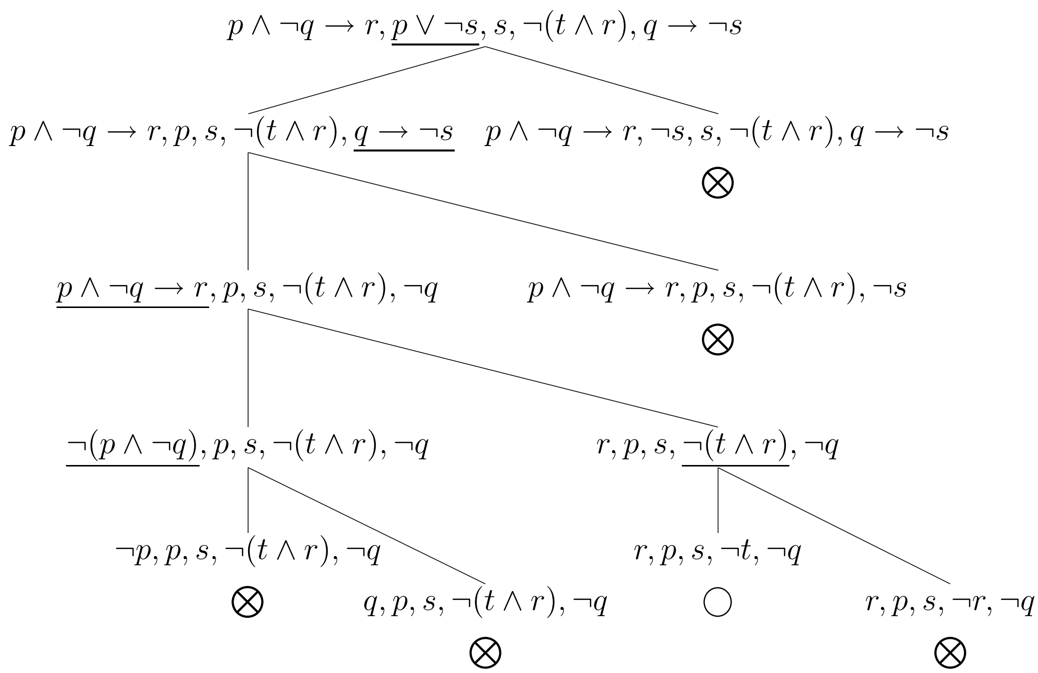
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi l'enunciato. L'interpretazione I definita da $D^I = \{0,1,2\}$, $r^I = \{(0,0),(1,0),(0,2)\}$ ha questa caratteristica. Infatti $I, \sigma[x/0] \models \forall y(r(x,y) \vee r(y,x))$, $I, \sigma[x/0, z/1] \models \neg r(x,z)$ e $I, \sigma[x/0, z/2] \models \neg r(z,x)$.
11. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione soddisfa gli enunciati, che indichiamo con F, G e H, dell'insieme considerato. Per assurdo sia I un'interpretazione tale che $I \models F, G, H$.

    $I \models H$ implica $I, \sigma[x/a^I] \models \exists y\, r(x,y) \to \neg r(f(x), x)$. Dato che $I \models F$ si ha $I, \sigma[x/a^I] \models \exists y\, r(x,y)$ e quindi deve essere $I, \sigma[x/a^I] \models \neg r(f(x), x)$, cioè $(f^I(a^I), a^I) \notin r^I$.

    Da $I \models G$ segue $I, \sigma[x/a^I] \models r(x,x) \to \forall y\, r(y,x)$. Dato che $I \models F$ si ha $I, \sigma[x/a^I] \models \forall y\, r(y,x)$. In particolare $I, \sigma[x/a^I, y/f^I(a^I)] \models r(y,x)$, cioè $(f^I(a^I), a^I) \in r^I$, che contraddice quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $v(p(c)) \land \neg b(p(c)) \land \forall x(a(x,c) \to v(x) \lor b(x))$;
(ii) $\forall x(b(x) \to \exists y(a(y,x) \land \neg v(y) \land \neg b(y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare. Saltiamo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α formule e doppie negazioni.



Dato che il tableau è aperto la formula di partenza non è valida. La foglia aperta del tableau ci fornisce un'interpretazione che non soddisfa la formula: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{V}$, $v(t) = \mathbf{F}$.

14. Per dimostrare la conseguenza logica richiesta costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice le formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e la negazione della formula a destra del simbolo stesso (algoritmo 8.47 delle dispense). Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to p(x))$, $\forall x(\neg p(x) \to \exists y\, r(y,x))$, $\neg\exists x\, p(x)$ e $\neg\exists y\, r(a,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$F, G, \underline{\neg(\exists x\, \neg p(x) \to \exists x\, p(x))}$$

$$F, G, \underline{\exists x\, \neg p(x)}, H$$

$$F, \underline{G}, \neg p(c), H$$

$$F, G, \underline{\neg p(c) \to \exists y\, r(y,c)}, \neg p(c), H$$

$$\begin{array}{cc} F, G, p(c), \neg p(c), H & F, G, \underline{\exists y\, r(y,c)}, \neg p(c), H \\ \otimes & \end{array}$$

$$\underline{F}, G, r(a,c), \neg p(c), H$$

$$F, \exists y\, r(a,y) \to p(a), G, r(a,c), \neg p(c), H$$

$$\begin{array}{cc} F, \underline{K}, G, r(a,c), \neg p(c), H & F, p(a), G, r(a,c), \neg p(c), \underline{H} \\ F, K, \neg r(a,c), G, r(a,c), \neg p(c), H & F, p(a), G, r(a,c), \neg p(c), H, \neg p(a) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

15.

$$\langle[\neg(p \to q \wedge \neg r) \vee (s \vee \neg t \to u)]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to q \wedge \neg r), s \vee \neg t \to u]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to q \wedge \neg r), \neg(s \vee \neg t), u]\rangle$$
$$\langle[p, \neg(s \vee \neg t), u], [\neg(q \wedge \neg r), \neg(s \vee \neg t), u]\rangle$$
$$\langle[p, \neg s, u], [p, t, u], [\neg q, r, \neg(s \vee \neg t), u]\rangle$$
$$\langle[p, \neg s, u], [p, t, u], [\neg q, r, \neg s, u], [\neg q, r, t, u]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee \neg s \vee u) \wedge (p \vee t \vee u) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg q \vee r \vee t \vee u).$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
4 dicembre 2007

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se F e G sono soddisfacibili allora $F \wedge G$ è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

2. $(p \to q) \wedge \neg(q \vee r) \models \neg(\neg r \to p)$. **V** | **F** 1pt

3. L'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva ha la proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti sono γ-formule? $\forall x\, p(x) \to q(x)$, $\neg\forall x\, p(x)$, $\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$, $\neg(\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0,1,2,3,4,5\}$ con $p^I = \{0,1,2\}$ e $r^I = \{(0,1),(1,2),(3,1)\}$. Allora $I \models \exists x\, \forall y(p(y) \to r(x,y) \vee r(y,x))$. **V** | **F** 1pt

6. $\neg(\exists x\, F \vee \forall y(G \to H)) \equiv \forall x\, \neg F \wedge \exists y(G \wedge \neg H)$. **V** | **F** 1pt

7. Il metodo dei tableaux è una procedura di decisione per la insoddisfacibilità nella logica predicativa. **V** | **F** 1pt

8. Quante sono le variabili libere nella formula $\exists x(\forall y\, r(x,y) \to \neg r(x, f(y))) \wedge \exists z(p(f(z)) \wedge \neg r(z,x))$? **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule proposizionali tale che $p \to \neg q \in \Gamma$ e $\neg(p \to q) \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare che l'insieme di formule 4pt

$$\{\forall x(\exists y\, \neg r(x,y) \to r(f(x),x)), \forall x(\neg r(x,x) \to \forall y\, \neg r(y,x)), \neg r(c,c)\}$$

è insoddisfacibile.

11. Sul retro del foglio dimostrare la soddisfacibilità di 4pt

$$\exists x\big(\exists y\, r(x,y) \wedge \exists y\, r(y,x) \wedge \forall z(\neg r(x,z) \vee \neg r(z,x))\big).$$

12. Sia $\{a, m, t, c, p\}$ un linguaggio dove a è un simbolo di costante, m è un simbolo di funzione unario, t e c sono simboli di relazione unari e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Anna", $m(x)$ come "la madre di x", $t(x)$ come "x ama il teatro", $c(x)$ come "x ama il cinema" e $p(x, y)$ come "x è un parente di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) la madre di Anna ama il teatro ma non il cinema, e ogni parente di Anna ama almeno uno dei due; 3pt

(ii) chi ama il cinema ha almeno un parente che non ama né il cinema né il teatro. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge (q \wedge \neg r \rightarrow s) \rightarrow \neg(r \rightarrow p) \vee (t \wedge s)$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare che 5pt

$$\forall x(p(x) \rightarrow \exists y\, r(x, y)), \forall x(\exists y\, r(y, x) \rightarrow \neg p(x)) \models \exists x\, p(x) \rightarrow \exists x\, \neg p(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \vee q \rightarrow r) \vee \neg(s \rightarrow \neg t \wedge u).$$

Soluzioni

1. **F** Se F è p e G è $\neg p$ chiaramente ciascuna delle due formule è soddisfacibile, ma la loro congiunzione non lo è.
2. **V** Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che qualsiasi valutazione che soddisfa la formula a sinistra del simbolo di conseguenza logica, soddisfa anche quella a destra.
3. **V** Vedere il lemma 3.24 delle dispense.
4. **1** La terza formula è una γ-formula, mentre la prima è una β-formula, la seconda una δ-formula, e la quarta una α-formula.
5. **F** L'unico $d \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d, y/2] \models p(y) \rightarrow r(x,y) \vee r(y,x)$ è 1. Dato che $I, \sigma[x/1, y/1] \not\models p(y) \rightarrow r(x,y) \vee r(y,x)$, I non soddisfa l'enunciato in questione.
6. **V**

$$\begin{aligned}
\neg(\exists x\, F \vee \forall y(G \rightarrow H)) &\equiv \neg\exists x\, F \wedge \neg\forall y(G \rightarrow H) \\
&\equiv \forall x\, \neg F \wedge \exists y \neg(G \rightarrow H) \\
&\equiv \forall x\, \neg F \wedge \exists y(G \wedge \neg H).
\end{aligned}$$

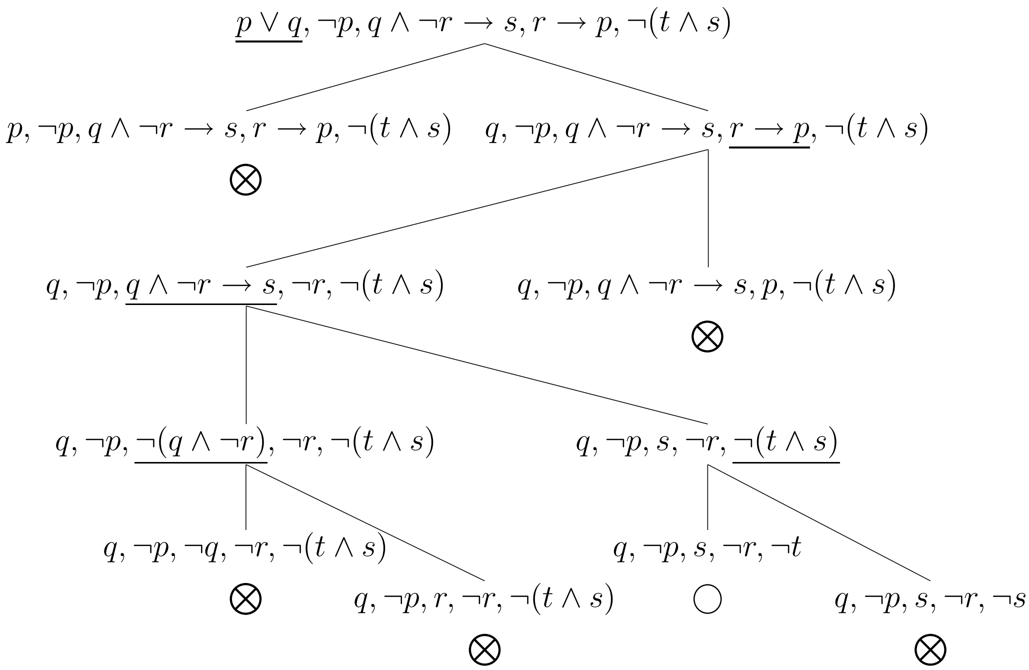
7. **F** Il metodo dei tableaux per la logica predicativa non ha la proprietà della terminazione forte (nota 8.13 delle dispense: i tableaux possono essere infiniti) e quindi non è una procedura di decisione. Si vedano anche le note 8.43 e 8.44 delle dispense.
8. **2** L'ultima occorrenza di y è libera e così pure l'ultima occorrenza di x. Tutte le altre occorrenze di variabili sono legate.
9. **V** $\{p \rightarrow \neg q, \neg(p \rightarrow q), \neg p, \neg q\}$ è un insieme di Hintikka.
10. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione soddisfa gli enunciati, che indichiamo con F, G e H, dell'insieme considerato. Per assurdo sia I un'interpretazione tale che $I \models F, G, H$.

    $I \models F$ implica $I, \sigma[x/c^I] \models \exists y\, \neg r(x,y) \rightarrow r(f(x), x)$. Dato che $I \models H$ si ha $I, \sigma[x/c^I] \models \exists y\, \neg r(x,y)$ e quindi deve essere $I, \sigma[x/c^I] \models r(f(x), x)$, cioè $(f^I(c^I), c^I) \in r^I$.

    Da $I \models G$ segue $I, \sigma[x/c^I] \models \neg r(x,x) \rightarrow \forall y\, \neg r(y,x)$. Dato che $I \models H$ si ha $I, \sigma[x/c^I] \models \forall y\, \neg r(y,x)$. In particolare $I, \sigma[x/c^I, y/f^I(c^I)] \models \neg r(y,x)$, cioè $(f^I(c^I), c^I) \notin r^I$, che contraddice quanto ottenuto in precedenza.
11. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi l'enunciato. L'interpretazione I definita da $D^I = \{0,1,2\}$, $r^I = \{(0,1),(2,0)\}$ ha questa caratteristica. Infatti $I, \sigma[x/0, y/1] \models r(x,y)$, $I, \sigma[x/0, y/2] \models r(y,x)$ e $I, \sigma[x/0] \models \forall z(\neg r(x,z) \vee \neg r(z,x))$.

12. (i) $t(m(a)) \wedge \neg c(m(a)) \wedge \forall x(p(x,a) \to t(x) \vee c(x))$;
(ii) $\forall x(c(x) \to \exists y(p(y,x) \wedge \neg c(y) \wedge \neg t(y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare. Saltiamo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α formule e doppie negazioni.



Dato che il tableau è aperto la formula di partenza non è valida. La foglia aperta del tableau ci fornisce un'interpretazione che non soddisfa la formula: $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$, $v(t) = \mathbf{F}$.

14. Per dimostrare la conseguenza logica richiesta costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice le formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e la negazione della formula a destra del simbolo stesso (algoritmo 8.47 delle dispense). Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,y))$, $\forall x(\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x))$, $\neg\exists x\, \neg p(x)$ e $\neg\exists y\, r(y,b)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,y)), \forall x(\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x)) \models \exists x\, p(x) \to \exists x\, \neg p(x).$$

$$F, G, \underline{\neg(\exists x\, p(x) \to \exists x\, \neg p(x))}$$

$$F, G, \underline{\exists x\, p(x)}, H$$

$$\underline{F}, G, p(a), H$$

$$F, \underline{p(a) \to \exists y\, r(a,y)}, G, p(a), H$$

$$F, \neg p(a), G, p(a), H \qquad\qquad F, \underline{\exists y\, r(a,y)}, G, p(a), H$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$F, r(a,b), \underline{G}, p(a), H$$

$$F, r(a,b), G, \underline{\exists y\, r(y,b) \to \neg p(b)}, p(a), H$$

$$F, r(a,b), G, \underline{K}, p(a), H \qquad\qquad F, r(a,b), G, \neg p(b), p(a), \underline{H}$$

$$F, r(a,b), G, K, \neg r(a,b), p(a), H \qquad\qquad F, r(a,b), G, \neg p(b), p(a), H, p(b)$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

15.

$$\langle [(\neg p \lor q \to r) \lor \neg(s \to \neg t \land u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p \lor q \to r, \neg(s \to \neg t \land u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \lor q), r, \neg(s \to \neg t \land u)] \rangle$$
$$\langle [p, r, \neg(s \to \neg t \land u)], [\neg q, r, \neg(s \to \neg t \land u)] \rangle$$
$$\langle [p, r, s], [p, r, \neg(\neg t \land u)], [\neg q, r, s], [\neg q, r, \neg(\neg t \land u)] \rangle$$
$$\langle [p, r, s], [p, r, t, \neg u], [\neg q, r, s], [\neg q, r, t, \neg u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \lor r \lor s) \land (p \lor r \lor t \lor \neg u) \land (\neg q \lor r \lor s) \land (\neg q \lor r \lor t \lor \neg u).$$