Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
11 aprile 2008

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \to (q \to \neg p \vee r) \equiv \neg r \to \neg q \vee \neg p$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \vee G$ è valida e $\neg F$ è soddisfacibile allora G è valida. **V** | **F** 1pt

3. Se F è uno dei ridotti della β-formula G allora $F \models G$. **V** | **F** 1pt

4. Se esiste un tableaux chiuso con la radice etichettata con le formule proposizionali $F, \neg G$ allora $F \models G$. **V** | **F** 1pt

5. Quante variabili libere ha la formula $\exists y\, \forall x\, r(x,y) \to \exists y(r(x, f(y,z)) \wedge \neg \forall z\, r(z,y))$? **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

6. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0,1,2,3,4\}$ con $f^I(0) = f^I(2) = f^I(4) = 3$, $f^I(1) = 1$, $f^I(3) = 0$, $p^I = \{2,3\}$, $q^I = \{1,2,4\}$ e $r^I = \{(0,3),(1,1),(3,3),(4,4)\}$. Allora $I \models \forall x(p(f(x)) \vee \exists y(r(y,x) \wedge q(y)))$. **V** | **F** 1pt

7. $\forall x(p(x) \to q(x)) \to \exists x(p(x) \wedge q(x))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

8. $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y) \equiv \exists y(\forall x\, p(x) \wedge q(y))$. **V** | **F** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule predicative tale che $\forall x(p(x) \vee q(x)) \in \Gamma$, $\neg p(c) \in \Gamma$ e $\forall x(r(x,x) \to \neg q(x)) \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare che 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \to r(f(x),x)), \neg r(c,a) \to r(c,f(c)) \models \exists z\, r(z,c).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare che l'enunciato 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \to r(f(x),x)) \wedge r(c,c) \to \exists z\, r(z,f(c))$$

non è valido.

12. Sia $\{b, c, p, a, o\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, c è un simbolo di funzione unario, p è un simbolo di relazione unario e a e o sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bruno", $c(x)$ come "il capolavoro di x", $p(x)$ come "x è un pittore", $a(x, y)$ come "x apprezza y" e $o(x, y)$ come "x odia y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bruno è un pittore che apprezza il proprio capolavoro; 3pt

(ii) ogni pittore che non odia il proprio capolavoro è apprezzato da qualcuno che apprezza quel capolavoro. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$((p \wedge q) \vee s) \wedge (q \vee r \to \neg p) \wedge (t \to r) \to s \wedge \neg p$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare l'insoddisfacibilità di 5pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y))) \wedge \forall x \, \forall y(r(x, y) \to p(y) \vee r(x, x)) \wedge \exists x(p(x) \wedge \neg r(x, x)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \wedge q \to r \wedge w) \to s \wedge \neg(t \wedge u).$$

Soluzioni

1. **V** Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che le due formule sono soddisfatte dalle stesse valutazioni.
2. **F** Ad esempio se $F = p$ e $G = \neg p$ si ha che le ipotesi sono soddisfatte, ma la conclusione è falsa.
3. **V** Se H è l'altro ridotto di G allora $G \equiv F \vee H$. Dato che $F \models F \vee H$ la conclusione è immediata.
4. **V** Si veda l'algoritmo 4.42 delle dispense, oppure utilizzare il fatto che $F \models G$ è equivalente alla validità di $F \to G$.
5. **2** L'ultima occorrenza di x e la prima di z sono le uniche occorrenze libere di variabili nella formula in esame.
6. **F** Assegnando ad x l'elemento 3 nessuno dei due disgiunti risulta verificato.
7. β La formula in esame è un'implicazione.
8. **V** L'affermazione è un esempio di uso del lemma 6.41 delle dispense.
9. **V** $\Gamma = \{\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(c), \forall x(r(x,x) \to \neg q(x)), p(c) \vee q(c), q(c), r(c,c) \to \neg q(c), \neg r(c,c)\}$ è un insieme di Hintikka che contiene le formule indicate.
10. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione soddisfa le formule, che indichiamo con F e G, a sinistra del simbolo di conseguenza logica allora soddisfa anche la formula H alla destra dello stesso simbolo. Sia I un'interpretazione tale che $I \models F, G$.

    $I \models G$ implica $I \models r(c,a)$ oppure $I \models r(c, f(c))$. In entrambi i casi $I, \sigma[x/c^I] \models \exists y\, r(x,y)$. Dato che $I \models F$ si ha $I, \sigma[x/c^I] \models \exists y\, r(x,y) \to r(f(x), x)$ e quindi $I, \sigma[x/c^I] \models r(f(x), x)$, cioè $(f^I(c^I), c^I) \in r^I$. Da quest'ultima affermazione segue $I, \sigma[z/f^I(c^I)] \models r(z,c)$ e quindi $I \models H$.
11. **ATTENZIONE** Questo esercizio è formulato in maniera errata: l'enunciato in questione è infatti valido. In sede di correzione è stato assegnato il punteggio massimo agli studenti che hanno analizzato correttamente il problema e definito un'interpretazione (che inevitabilmente soddisfa l'enunciato).

12. (i) $p(b) \wedge a(b, c(b))$;

(ii) $\forall x(p(x) \wedge \neg o(x, c(x)) \rightarrow \exists y(a(y, x) \wedge a(y, c(x))))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

Per ragioni di spazio lasciamo un nodo in sospeso e riprendiamo più sotto il tableau da quel nodo.

$$\underline{\neg(((p \wedge q) \vee s) \wedge (q \vee r \rightarrow \neg p) \wedge (t \rightarrow r) \rightarrow s \wedge \neg p)}$$

$$\underline{((p \wedge q) \vee s) \wedge (q \vee r \rightarrow \neg p) \wedge (t \rightarrow r)}, \neg(s \wedge \neg p)$$

$$\underline{(p \wedge q) \vee s}, q \vee r \rightarrow \neg p, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p)$$

$$\begin{array}{cc}
\underline{p \wedge q}, q \vee r \rightarrow \neg p, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p) & \boxed{s, q \vee r \rightarrow \neg p, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p)} \\
p, q, \underline{q \vee r \rightarrow \neg p}, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
p, q, \underline{\neg(q \vee r)}, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p) & p, q, \neg p, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p) \\
 & \otimes \\
p, q, \neg q, \neg r, t \rightarrow r, \neg(s \wedge \neg p) & \\
\otimes &
\end{array}$$

$$\boxed{s, q \vee r \rightarrow \neg p, t \rightarrow r, \underline{\neg(s \wedge \neg p)}}$$

$$\begin{array}{cc}
s, q \vee r \rightarrow \neg p, t \rightarrow r, \neg s & s, \underline{q \vee r \rightarrow \neg p}, t \rightarrow r, p \\
\otimes &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
s, \underline{\neg(q \vee r)}, t \rightarrow r, p & s, \neg p, t \rightarrow r, p \\
 & \otimes \\
s, \neg q, \neg r, \underline{t \rightarrow r}, p &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
s, \neg q, \neg r, \neg t, p & s, \neg q, \neg r, r, p \\
\bigcirc & \otimes
\end{array}$$

Dato che il tableau è aperto la formula di partenza non è valida. La foglia etichettata con un insieme di letterali che non contiene coppie complementari permette di definire una valutazione che non soddisfa la formula: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$, $v(t) = \mathbf{F}$.

14. Per dimostrare l'insoddisfacibilità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice l'enunciato. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(x,y) \wedge \neg p(y)))$, $\forall x \forall y(r(x,y) \rightarrow p(y) \vee r(x,x))$ e $\forall y(r(a,y) \rightarrow p(y) \vee r(a,a))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{F \wedge G \wedge \exists x(p(x) \wedge \neg r(x,x))}$$

$$F, G, \underline{\exists x(p(x) \wedge \neg r(x,x))}$$

$$F, G, \underline{p(a) \wedge \neg r(a,a)}$$

$$\underline{F}, G, p(a), \neg r(a,a)$$

$$F, \underline{p(a) \rightarrow \exists y(r(a,y) \wedge \neg p(y))}, G, p(a), \neg r(a,a)$$

$$\begin{array}{cc} F, \neg p(a), G, p(a), \neg r(a,a) & F, \underline{\exists y(r(a,y) \wedge \neg p(y))}, G, p(a), \neg r(a,a) \\ \otimes & \\ & F, \underline{r(a,b) \wedge \neg p(b)}, G, p(a), \neg r(a,a) \end{array}$$

$$F, r(a,b), \neg p(b), \underline{G}, p(a), \neg r(a,a)$$

$$F, r(a,b), \neg p(b), G, \underline{H}, p(a), \neg r(a,a)$$

$$F, r(a,b), \neg p(b), G, H, \underline{r(a,b) \rightarrow p(b) \vee r(a,a)}, p(a), \neg r(a,a)$$

$$\begin{array}{cc} F, r(a,b), \neg p(b), G, H, \neg r(a,b), p(a), \neg r(a,a) & \\ \otimes & F, r(a,b), \neg p(b), G, H, \underline{p(b) \vee r(a,a)}, p(a), \neg r(a,a) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} F, r(a,b), \neg p(b), G, H, p(b), p(a), \neg r(a,a) & F, r(a,b), \neg p(b), G, H, r(a,a), p(a), \neg r(a,a) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

15.

$$\langle [(p \wedge q \rightarrow r \wedge w) \rightarrow s \wedge \neg(t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \wedge q \rightarrow r \wedge w), s \wedge \neg(t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [p \wedge q, s \wedge \neg(t \wedge u)], [\neg(r \wedge w), s \wedge \neg(t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [p, s \wedge \neg(t \wedge u)], [q, s \wedge \neg(t \wedge u)], [\neg r, \neg w, s \wedge \neg(t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [p, s], [p, \neg(t \wedge u)], [q, s], [q, \neg(t \wedge u)], [\neg r, \neg w, s], [\neg r, \neg w, \neg(t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [p, s], [p, \neg t, \neg u], [q, s], [q, \neg t, \neg u], [\neg r, \neg w, s], [\neg r, \neg w, \neg t, \neg u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee s) \wedge (p \vee \neg t \vee \neg u) \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee \neg t \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee \neg w \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg w \vee \neg t \vee \neg u).$$