Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
7 dicembre 2006

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $q \wedge \neg r \equiv (\neg q \to p) \wedge (\neg p \to \neg r) \wedge \neg(q \to r)$. **V** | **F** — 1pt

2. $\forall x(p(x) \vee \neg r(x, f(x))) \wedge \exists y\, r(a, y)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ — 1pt

3. La formula $s \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg p) \vee p$ è in forma normale disgiuntiva. **V** | **F** — 1pt

4. Se $F \models G \to \neg F$ allora $F \models \neg G$. **V** | **F** — 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka di formule proposizionali Γ tale che $\neg(p \to q \wedge r) \in \Gamma$ e $p \to r \in \Gamma$. **V** | **F** — 1pt

6. L'algoritmo di costruzione dei tableaux per la logica proposizionale non gode della proprietà della terminazione forte. **V** | **F** — 1pt

7. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\neg p(c)$, $\forall x\, p(x) \to p(c)$, $\forall x\, p(x) \to p(x)$ **0** | **1** | **2** | **3** — 1pt

8. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0, 1, 2, 3\}$ con $c^I = 2$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 2), (3, 3)\}$ allora $I \models \forall x(\neg r(c, x) \to \neg r(x, c))$. **V** | **F** — 1pt

9. $\forall x\, p(x) \wedge \neg\exists x\, q(x) \equiv \forall x(\neg q(x) \wedge p(x))$. **V** | **F** — 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrare che l'insieme — 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to r(x, f(x)) \vee p(f(x))), \forall x\, \neg\exists y\, r(y, x), \exists x(p(x) \wedge \neg p(f(x)))\}$$

è insoddisfacibile. (Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrare che — 4pt

$$\forall x\, \neg r(x, x), \forall x(\neg q(x) \to \exists y(q(y) \wedge r(x, y))) \not\models \forall x \forall y(\neg q(x) \wedge \neg q(y) \to \neg r(x, y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{B, m, t, g, a\}$ un linguaggio dove B è un simbolo di costante, m è un simbolo di funzione unario, t e g sono simboli di relazione unari, e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando B come "Bruna", $m(x)$ come "la madre di x", $t(x)$ come "x viaggia in treno", $g(x)$ come "x guida", $a(x, y)$ come "x accompagna y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) se la madre di Bruna viaggia in treno, Bruna la accompagna; 3pt

(ii) chi non guida e non è accompagnato da qualcuno che guida, viaggia in treno. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \to q \vee r) \wedge (\neg r \vee (s \wedge \neg p)) \to \neg p \vee q$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\forall x \forall y (r(x, y) \vee r(y, x)) \wedge \forall x (\exists y\, r(y, x) \to \neg p(x)) \to \forall x\, \neg p(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(p \wedge (q \to r)) \to \neg((\neg s \to t) \to u)\big).$$

Soluzioni

1. **V** Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.
2. α È una congiunzione.
3. **V** È una disgiunzione di tre congiunzioni di letterali, di cui la prima e la terza hanno un solo congiunto.
4. **V** Se $v(F) = \mathbf{V}$ non può essere $v(G) = \mathbf{V}$: infatti in questo caso da $v(G \to \neg F) = \mathbf{V}$ seguirebbe $v(\neg F) = \mathbf{V}$, cioè $v(F) = \mathbf{F}$.
5. **V** $\{\neg(p \to q \wedge r), p \to r, p, \neg(q \wedge r), r, \neg q\}$ è un insieme di Hintikka.
6. **F** Questa affermazione contraddice il Teorema 4.14 delle dispense.
7. **2** Le prime due formule sono enunciati, mentre nella terza l'ultima occorrenza di x è libera.
8. **F** Si verifica direttamente: il caso in cui a x viene assegnato 3 è quello in cui l'implicazione non risulta verificata.
9. **V** L'equivalenza logica in questione discende da alcune delle equivalenze logiche fondamentali:

$$\begin{aligned} \forall x\, p(x) \wedge \neg\exists x\, q(x) &\equiv \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, \neg q(x) \\ &\equiv \forall x(p(x) \wedge \neg q(x)) \\ &\equiv \forall x(\neg q(x) \wedge p(x)). \end{aligned}$$

10. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati: vogliamo ottenere una contraddizione.

    Dato che $I \models \exists x(p(x) \wedge \neg p(f(x)))$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin p^I$.

    Usando $d_0 \in p^I$ e $I \models \forall x(p(x) \to r(x, f(x)) \vee p(f(x)))$ si ottiene che $I, \sigma[x/d_0] \models r(x, f(x)) \vee p(f(x))$, cioè che almeno una tra $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$ vale. Visto che la seconda alternativa contraddice quanto ottenuto in precedenza si ha $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$.

    Abbiamo quindi che $I, \sigma[x/f^I(d_0)][y/d_0] \models r(y, x)$ e di conseguenza $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(y, x)$. Perciò $I \not\models \forall x\, \neg\exists y\, r(y, x)$, contro la nostra ipotesi.
11. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfa i primi due enunciati, ma non quello a destra di $\not\models$. La seguente interpretazione ha queste caratteristiche:

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \qquad q^I = \{2\}, \qquad r^I = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}.$$

12. (i) $t(m(B)) \to a(B, m(B))$;

(ii) La traduzione che avevo in mente (se chi non guida non è accompagnato da nessun guidatore allora viaggerà in treno) è
$\forall x(\neg g(x) \wedge \neg \exists y(a(y, x) \wedge g(y)) \to t(x))$ (o qualche formula logicamente equivalente ad essa).
Diversi studenti hanno tradotto
$\forall x(\neg g(x) \wedge \exists y(\neg a(y, x) \wedge g(y)) \to t(x))$, cioè “chi non guida e qualcuno che guida non lo accompagna, viaggia in treno”. Nel mondo reale questo è insensato (il non guidatore che non vuole prendere il treno deve essere accompagnato da tutti coloro che guidano, cioè da centinaia di milioni di persone), ma la frase italiana ammette anche questa interpretazione. Perciò anche questa traduzione è stata valutata positivamente.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Nel ramo più a sinistra applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare, ma si sarebbe potuto proseguire fino a ottenere nodi etichettati da insiemi di letterali.

$$\underline{\neg\big((p \to q \vee r) \wedge (\neg r \vee (s \wedge \neg p)) \to \neg p \vee q\big)}$$

$$\underline{(p \to q \vee r) \wedge (\neg r \vee (s \wedge \neg p))}, \neg(\neg p \vee q)$$

$$p \to q \vee r, \neg r \vee (s \wedge \neg p), \underline{\neg(\neg p \vee q)}$$

$$\underline{p \to q \vee r}, \neg r \vee (s \wedge \neg p), p, \neg q$$

$$\neg p, \neg r \vee (s \wedge \neg p), p, \neg q \qquad \underline{q \vee r}, \neg r \vee (s \wedge \neg p), p, \neg q$$

$$\otimes$$

$$q, \neg r \vee (s \wedge \neg p), p, \neg q \qquad r, \underline{\neg r \vee (s \wedge \neg p)}, p, \neg q$$

$$\otimes$$

$$r, \neg r, p, \neg q \qquad r, \underline{s \wedge \neg p}, p, \neg q$$

$$\otimes$$

$$r, s, \neg p, p, \neg q$$

$$\otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F, G e H le γ-formule $\forall x \forall y (r(x,y) \lor r(y,x))$, $\forall x (\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x))$ e $\neg \exists y\, r(y,c)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo, e al nodo in cui agiamo su F condensiamo due passaggi in uno.

$$\underline{\neg(F \land G \to \forall x\, \neg p(x))}$$

$$\underline{F \land G}, \neg \forall x\, \neg p(x)$$

$$F, G, \underline{\neg \forall x\, \neg p(x)}$$

$$F, \underline{G}, p(c)$$

$$F, G, \exists y\, r(y,c) \to \neg p(c), p(c)$$

$$F, G, \underline{H}, p(c) \qquad\qquad F, G, \neg p(c), p(c)$$

$$\otimes$$

$$\underline{F}, G, H, \neg r(c,c), p(c)$$

$$F, \underline{r(c,c) \lor r(c,c)}, G, H, \neg r(c,c), p(c)$$

$$F, r(c,c), G, H, \neg r(c,c), p(c) \qquad\qquad F, r(c,c), G, H, \neg r(c,c), p(c)$$

$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

15.

$$[\big\langle \neg\big(\neg(p \land (q \to r)) \to \neg((\neg s \to t) \to u)\big)\big\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \land (q \to r)), (\neg s \to t) \to u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, (\neg s \to t) \to u \rangle, \langle \neg(q \to r), (\neg s \to t) \to u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, (\neg s \to t) \to u \rangle, \langle q, \neg r, (\neg s \to t) \to u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg(\neg s \to t) \rangle, \langle \neg p, u \rangle, \langle q, \neg r, \neg(\neg s \to t) \rangle, \langle q, \neg r, u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg s, \neg t \rangle, \langle \neg p, u \rangle, \langle q, \neg r, \neg s, \neg t \rangle, \langle q, \neg r, u \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \land \neg s \land \neg t) \lor (\neg p \land u) \lor (q \land \neg r \land \neg s \land \neg t) \lor (q \land \neg r \land u).$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
7 dicembre 2006

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $p \wedge r \equiv \neg(r \to \neg p) \wedge (\neg q \to p) \wedge (\neg r \to q)$. **V** **F** 1pt

2. La formula $(p \vee q \vee \neg p) \wedge s \wedge \neg p$ è in forma normale congiuntiva. **V** **F** 1pt

3. Se $F \models F \to \neg G$ allora $G \models \neg F$. **V** **F** 1pt

4. $\forall x(p(x) \wedge \neg r(x, f(x))) \to \exists y\, r(a, y)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α β γ δ 1pt

5. L'algoritmo di costruzione dei tableaux per la logica predicativa gode della proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

6. $\exists x\, p(x) \vee \neg\forall x\, q(x) \equiv \exists x(\neg q(x) \vee p(x))$. **V** **F** 1pt

7. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\neg p(y)$, $p(c) \to \exists x\, p(x)$, $\forall x\, p(x) \to p(x)$ **0** **1** **2** **3** 1pt

8. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0, 1, 2, 3\}$ con $c^I = 2$ e $r^I = \{(0, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 2), (3, 3)\}$ allora $I \models \forall x(r(x, c) \to \neg r(c, x))$. **V** **F** 1pt

9. Non esiste un insieme di Hintikka di formule proposizionali Γ tale che $\neg(p \vee r \to q) \in \Gamma$ e $r \to q \in \Gamma$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrare che 4pt

$$\forall x\, \neg r(x, x), \forall x(p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y))) \not\models \forall x \forall y(p(x) \wedge p(y) \to \neg r(x, y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrare che l'insieme 4pt

$$\{\forall x\, \neg\exists y\, r(x, y), \exists x(p(x) \wedge p(f(x))), \forall x(p(x) \to \neg p(f(x)) \vee r(f(x), x))\}$$

è insoddisfacibile. (Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{C, p, m, g, a\}$ un linguaggio dove C è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, m e g sono simboli di relazione unari, e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando C come "Carlo", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "x viaggia in macchina", $g(x)$ come "x guida", $a(x, y)$ come "x accompagna y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) se Carlo viaggio in macchina suo padre lo accompagna; 3pt

(ii) chi non guida e non è accompagnato da qualcuno che guida, non viaggia in macchina. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(s \vee (r \wedge q)) \wedge (\neg q \rightarrow p \vee \neg s) \rightarrow p \vee q$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \rightarrow p(x)) \wedge \forall x \forall y(\neg r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \rightarrow \forall x\, p(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(\neg q \wedge (p \rightarrow u)) \rightarrow \neg((r \rightarrow \neg s) \rightarrow \neg t)\big).$$

Soluzioni

1. **V** Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.
2. **V** È una congiunzione di tre disgiunzioni di letterali, di cui la seconda e la terza hanno un solo disgiunto.
3. **V** Se $v(G) = \mathbf{V}$ non può essere $v(F) = \mathbf{V}$: infatti in questo caso da $v(F \rightarrow \neg G) = \mathbf{V}$ seguirebbe $v(\neg G) = \mathbf{V}$, cioè $v(G) = \mathbf{F}$.
4. β È una implicazione.
5. **F** Questa affermazione contraddice la Nota 8.20 delle dispense.
6. **V** L'equivalenza logica in questione discende da alcune delle equivalenze logiche fondamentali:
$$\begin{aligned} \exists x\, p(x) \vee \neg \forall x\, q(x) &\equiv \exists x\, p(x) \vee \exists x\, \neg q(x) \\ &\equiv \exists x (p(x) \vee \neg q(x)) \\ &\equiv \exists x (\neg q(x) \vee p(x)). \end{aligned}$$
7. **1** La seconda formula è un enunciato, mentre nella prima y è libera, e nella terza l'ultima occorrenza di x è libera.
8. **F** Si verifica direttamente: il caso in cui a x viene assegnato 2 è quello in cui l'implicazione non risulta verificata.
9. **F** $\{\neg(p \vee r \rightarrow q), r \rightarrow q, p \vee r, \neg q, \neg r, p\}$ è un insieme di Hintikka.
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfa i primi due enunciati, ma non quello a destra di $\not\models$. La seguente interpretazione ha queste caratteristiche:
$$D^I = \{0, 1, 2\}, \qquad p^I = \{0, 1\}, \qquad r^I = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}.$$
11. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati: vogliamo ottenere una contraddizione.

    Dato che $I \models \exists x (p(x) \wedge p(f(x)))$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$.

    Usando $d_0 \in p^I$ e $I \models \forall x (p(x) \rightarrow \neg p(f(x)) \vee r(f(x), x))$ si ottiene che $I, \sigma[x/d_0] \models \neg p(f(x)) \vee r(f(x), x)$, cioè che almeno una tra $f^I(d_0) \notin p^I$ e $(f^I(d_0), d_0) \in r^I$ vale. Visto che la prima alternativa contraddice quanto ottenuto in precedenza si ha $(f^I(d_0), d_0) \in r^I$.

    Abbiamo quindi che $I, \sigma[x/f^I(d_0)][y/d_0] \models r(x, y)$ e di conseguenza $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(x, y)$. Perciò $I \not\models \forall x\, \neg \exists y\, r(x, y)$, contro la nostra ipotesi.

12. (i) $m(C) \to a(p(C), C)$;

(ii) La traduzione che avevo in mente (se chi non guida non è accompagnato da nessun guidatore allora non andrà in macchina) è
$\forall x(\neg g(x) \wedge \neg\exists y(a(y,x) \wedge g(y)) \to \neg m(x))$ (o qualche formula logicamente equivalente ad essa).
Diversi studenti hanno tradotto
$\forall x(\neg g(x) \wedge \exists y(\neg a(y,x) \wedge g(y)) \to \neg m(x))$, cioè "chi non guida e qualcuno che guida non lo accompagna, viaggia in macchina". Nel mondo reale questo è insensato (il non guidatore che vuole viaggiare in macchina deve essere accompagnato da tutti coloro che guidano, cioè da centinaia di milioni di persone), ma la frase italiana ammette anche questa interpretazione. Perciò anche questa traduzione è stata valutata positivamente.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Nel ramo più a sinistra applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare, ma si sarebbe potuto proseguire fino a ottenere nodi etichettati da insiemi di letterali.

$$\underline{\neg\big((s \vee (r \wedge q)) \wedge (\neg q \to p \vee \neg s) \to p \vee q\big)}$$

$$\underline{(s \vee (r \wedge q)) \wedge (\neg q \to p \vee \neg s)}, \neg(p \vee q)$$

$$s \vee (r \wedge q), \neg q \to p \vee \neg s, \underline{\neg(p \vee q)}$$

$$s \vee (r \wedge q), \underline{\neg q \to p \vee \neg s}, \neg p, \neg q$$

$$s \vee (r \wedge q), q, \neg p, \neg q \qquad s \vee (r \wedge q), \underline{p \vee \neg s}, \neg p, \neg q$$

$$\otimes$$

$$s \vee (r \wedge q), p, \neg p, \neg q \qquad \underline{s \vee (r \wedge q)}, \neg s, \neg p, \neg q$$

$$\otimes$$

$$s, \neg s, \neg p, \neg q \qquad \underline{r \wedge q}, \neg s, \neg p, \neg q$$

$$\otimes$$

$$r, q, \neg s, \neg p, \neg q$$

$$\otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F, G e H le γ-formule $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to p(x))$, $\forall x \forall y(\neg r(x,y) \to r(y,x))$ e $\neg\exists y\, r(a,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo, e al nodo in cui agiamo su G condensiamo due passaggi in uno.

$$\underline{\neg(F \wedge G \to \forall x\, p(x))}$$

$$\underline{F \wedge G}, \neg\forall x\, p(x)$$

$$F, G, \underline{\neg\forall x\, p(x)}$$

$$\underline{F}, G, \neg p(a)$$

$$F, \underline{\exists y\, r(a,y) \to p(a)}, G, \neg p(a)$$

$$F, G, \underline{H}, \neg p(a) \qquad\qquad F, G, p(a), \neg p(a)$$

$$\otimes$$

$$F, \underline{G}, H, \neg r(a,a), \neg p(a)$$

$$F, G, \underline{\neg r(a,a) \to r(a,a)}, H, \neg r(a,a), \neg p(a)$$

$$F, G, r(a,a), H, \neg r(a,a), \neg p(a) \qquad\qquad F, G, r(a,a), H, \neg r(a,a), \neg p(a)$$

$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

15.

$$[\big\langle \neg\big(\neg(\neg q \wedge (p \to u)) \to \neg((r \to \neg s) \to \neg t)\big)\big\rangle]$$

$$[\langle \neg(\neg q \wedge (p \to u)), (r \to \neg s) \to \neg t \rangle]$$

$$[\langle q, (r \to \neg s) \to \neg t \rangle, \langle \neg(p \to u), (r \to \neg s) \to \neg t \rangle]$$

$$[\langle q, (r \to \neg s) \to \neg t \rangle, \langle p, \neg u, (r \to \neg s) \to \neg t \rangle]$$

$$[\langle q, \neg(r \to \neg s) \rangle, \langle q, \neg t \rangle, \langle p, \neg u, \neg(r \to \neg s) \rangle, \langle p, \neg u, \neg t \rangle]$$

$$[\langle q, r, s \rangle, \langle q, \neg t \rangle, \langle p, \neg u, r, s \rangle, \langle p, \neg u, \neg t \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(q \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg u \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg u \wedge \neg t).$$