Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 marzo 2007

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models G$ e $\neg F \models H$ allora $G \vee H$ è valida. **V** **F** 1pt

2. $(p \to q) \to (q \to r) \equiv \neg(\neg r \wedge q)$. **V** **F** 1pt

3. I ridotti di una α-formula proposizionale sono letterali. **V** **F** 1pt

4. Sia I l'interpretazione di dominio $\{0, 1, 2, 3\}$ con $f^I(0) = f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 0$ e $p^I = \{0, 3\}$. Allora $I \models \forall x(p(x) \vee \neg p(f(x)))$. **V** **F** 1pt

5. $\forall x\, \exists y\, r(x, y) \models \exists y\, \forall x\, r(x, y)$. **V** **F** 1pt

6. Quante delle seguenti formule sono δ-formule?
$\neg\forall x\, p(x), \forall x\, p(x), \exists x\, p(x) \wedge \neg p(c), \exists x\, \neg p(x)$ **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

7. Se la formula predicativa F ha un tableau sistematico con un ramo infinito allora F è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule predicative tale che $\exists x\, p(x) \to \forall x\, r(x, a) \in \Gamma$, $p(a) \in \Gamma$ e $r(a, a) \notin \Gamma$. **V** **F** 1pt

9. La formula seguente è in forma normale congiuntiva, forma normale disgiuntiva, entrambe, o nessuna?
$\neg p \wedge (q \vee \neg r)$ **FNC** **FND** **entrambe** **nessuna** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, y)), \exists x(p(x) \wedge \neg r(x, x)) \not\models \exists x\, \exists y(r(x, y) \wedge \neg r(y, x)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare l'insoddisfacibilità di 4pt

$$\exists x(\forall y\, \neg r(y, x) \wedge r(x, f(x))) \wedge \forall x\, \forall y(r(y, x) \vee \neg r(x, y)).$$

12. Sia $\{C, O, a, m, b, s, p\}$ un linguaggio dove C e O sono simboli di costante, a è un simbolo di funzione unario, m, b e s sono simboli di relazione unari e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando C come "Chiara", O come "Opel", $a(x)$ come "l'auto di x", $m(x)$ come "x è una marca automobilistica", $b(x)$ come "x è una berlina", $s(x)$ come "x è una station wagon" e $p(x, y)$ come "x produce y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) la Opel è la marca automobilistica che ha prodotto l'auto di Chiara; 3pt

(ii) ogni marca automobilistica produce una station wagon e una berlina. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \to (q \to \neg r)) \wedge (q \vee s) \wedge (r \to p \vee s) \to s \vee \neg r$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, y)) \wedge \forall x(\neg p(x) \to \forall y\, \neg r(y, x)) \wedge p(c) \to \exists y\, (p(y) \wedge r(c, y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(p \wedge q \to \neg r \wedge s) \to t \wedge \neg(u \wedge v).$$

Soluzioni

1. **V** Sia I un'interpretazione qualunque. Se $I \models F$, dalla prima ipotesi segue $I \models G$. Se $I \not\models F$ si ha $I \models \neg F$, da cui per la seconda ipotesi segue $I \models H$. In entrambi i casi $I \models G \vee H$. Quindi $G \vee H$ è valida.
2. **V** Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.
3. **F** Data una formula proposizionale F esiste una α-formula G (ad esempio $F \wedge p$) tale che F è un ridotto di G. Quindi qualsiasi formula, anche se non è un letterale, è un ridotto di una α-formula.
4. **V** Nel caso in cui a x viene assegnato 0 oppure 3 vale il primo disgiunto, negli altri due casi vale il secondo disgiunto.
5. **F** Se per ogni x esiste un y non è detto che lo stesso y vada bene per tutti gli x (ad esempio ognuno ha una madre, ma non c'è una madre di tutti).
6. **2** La prima e l'ultima formula sono δ-formule; la seconda è una γ-formula, e la terza è una α-formula.
7. **F** Un tableau con un ramo infinito è aperto (definizione 8.26 delle dispense). Per il teorema di completezza F è soddisfacibile, e quindi certamente non insoddisfacibile.
8. **F** Se Γ è un insieme di Hintikka tale che $\exists x\, p(x) \rightarrow \forall x\, r(x,a) \in \Gamma$ allora $\neg\exists x\, p(x) \in \Gamma$ oppure $\forall x\, r(x,a) \in \Gamma$. Nel primo caso deve essere $\neg p(a) \in \Gamma$ e quindi non può essere $p(a) \in \Gamma$. Nel secondo caso si avrebbe $r(a,a) \in \Gamma$.
9. **FNC** La formula è la congiunzione di due disgiunzioni: una di un solo letterale, l'altra di due letterali.
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati alla sinistra di $\models$, ma non soddisfi quello sulla destra. L'interpretazione I tale che
$$D^I = \{0,1\}, \qquad p^I = \{0\}, \qquad r^I = \{(0,1),(1,0)\}$$
ha queste caratteristiche.
11. L'enunciato da considerare è della forma $F \wedge G$. Sia I un'interpretazione arbitraria: vogliamo mostrare che non soddisfa $F \wedge G$. A questo scopo è sufficiente mostrare che se $I \models F$ allora $I \not\models G$.

    Dato che $I \models F$ esiste un elemento $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, \neg r(y,x) \wedge r(x, f(x))$. Quindi $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, \neg r(y,x)$, da cui in particolare $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$, e $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$.

    Allora $I, \sigma[x/d_0][y/f^I(d_0)] \not\models r(y,x) \vee \neg r(x,y)$ e di conseguenza $I \not\models G$.

12. (i) $m(O) \wedge p(O, a(C))$;

(ii) $\forall x(m(x) \to \exists y(s(y) \wedge p(x,y)) \wedge \exists y(b(y) \wedge p(x,y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. In diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare. Per ragioni di spazio condensiamo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α-formule.

- $\underline{\neg((p \to (q \to \neg r)) \wedge (q \vee s) \wedge (r \to p \vee s) \to s \vee \neg r)}$
  - $p \to (q \to \neg r), q \vee s, \underline{r \to p \vee s}, \neg s, r$
    - $p \to (q \to \neg r), q \vee s, \neg r, \neg s, r$ $\quad\otimes$
    - $p \to (q \to \neg r), q \vee s, \underline{p \vee s}, \neg s, r$
      - $\underline{p \to (q \to \neg r)}, q \vee s, p, \neg s, r$
        - $\neg p, q \vee s, p, \neg s, r$ $\quad\otimes$
        - $\underline{q \to \neg r}, q \vee s, p, \neg s, r$
          - $\neg q, \underline{q \vee s}, p, \neg s, r$
            - $\neg q, q, p, \neg s, r$ $\quad\otimes$
            - $\neg q, s, p, \neg s, r$ $\quad\otimes$
          - $\neg r, q \vee s, p, \neg s, r$ $\quad\otimes$
      - $p \to (q \to \neg r), q \vee s, s, \neg s, r$ $\quad\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,y))$, $\forall x(\neg p(x) \to \forall y\, \neg r(y,x))$, $\neg\exists y\,(p(y) \wedge r(c,y))$ e $\forall y\, \neg r(y,a)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Per ragioni di spazio condensiamo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α-formule.

$$\underline{\neg(F \wedge G \wedge p(c) \to \exists y\,(p(y) \wedge r(c,y)))}$$

$$\underline{F}, G, p(c), H$$

$$F, \underline{p(c) \to \exists y\, r(c,y)}, G, p(c), H$$

$$F, G, \neg p(c), p(c), H \qquad\qquad F, G, \underline{\exists y\, r(c,y)}, p(c), H$$

$$\otimes$$

$$F, r(c,a), G, p(c), \underline{H}$$

$$F, r(c,a), G, p(c), H, \underline{\neg(p(a) \wedge r(c,a))}$$

$$F, r(c,a), \underline{G}, p(c), H, \neg p(a) \qquad\qquad F, r(c,a), G, p(c), H, \neg r(c,a)$$

$$\otimes$$

$$F, r(c,a), G, \underline{\neg p(a) \to K}, p(c), H, \neg p(a)$$

$$F, r(c,a), G, p(a), p(c), H, \neg p(a) \qquad\qquad F, r(c,a), G, \underline{K}, p(c), H, \neg p(a)$$

$$\otimes$$

$$F, r(c,a), G, K, \neg r(c,a), p(c), H, \neg p(a)$$

$$\otimes$$

15.

$$[\langle (p \wedge q \to \neg r \wedge s) \to t \wedge \neg(u \wedge v)\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \wedge q \to \neg r \wedge s)\rangle, \langle t \wedge \neg(u \wedge v)\rangle]$$
$$[\langle p \wedge q, \neg(\neg r \wedge s)\rangle, \langle t, \neg(u \wedge v)\rangle]$$
$$[\langle p, q, \neg(\neg r \wedge s)\rangle, \langle t, \neg u\rangle, \langle t, \neg v\rangle]$$
$$[\langle p, q, r\rangle, \langle p, q, \neg s\rangle, \langle t, \neg u\rangle, \langle t, \neg v\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (t \wedge \neg u) \vee (t \wedge \neg v).$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 marzo 2007

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. La formula seguente è in forma normale congiuntiva, forma normale disgiuntiva, entrambe, o nessuna?
$(p \land \neg q) \lor \neg r$ **FNC** | **FND** | **entrambe** | **nessuna** 1pt

2. Se $F \models G$ e $H \models \neg G$ allora $F \land H$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. $(p \to q) \to (r \to p) \equiv \neg(r \land \neg p)$. **V** | **F** 1pt

4. I ridotti di una β-formula proposizionale sono letterali. **V** | **F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione di dominio $\{0, 1, 2, 3\}$ con $f^I(0) = f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 0$ e $p^I = \{0, 3\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \lor \neg p(f(x)))$. **V** | **F** 1pt

6. $\exists y\, \forall x\, r(x, y) \models \forall x\, \exists y\, r(x, y)$. **V** | **F** 1pt

7. Quante delle seguenti formule sono γ-formule?
$\forall x\, p(x), \neg\forall x\, p(x), \exists x\, \neg p(x), \forall x\, p(x) \to p(c)$ **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule predicative tale che $\exists x\, r(x, a) \to \forall x\, p(x) \in \Gamma$, $\neg p(a) \in \Gamma$ e $r(a, a) \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

9. Se la formula predicativa F ha un tableau sistematico con un ramo infinito allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \forall y\, \neg r(y, x)), \exists x\, p(x) \not\models \forall x\, \exists y\, \neg r(y, x).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare l'insoddisfacibilità di 4pt

$$\exists x(\forall y\, r(x, y) \land \neg r(f(x), x)) \land \forall x\, \forall y(r(x, y) \to r(y, x)).$$

12. Sia $\{D, F, a, m, b, c, p\}$ un linguaggio dove D e F sono simboli di costante, a è un simbolo di funzione unario, m, b e c sono simboli di relazione unari e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando D come "Dario", F come "Fiat", $a(x)$ come "l'auto di x", $m(x)$ come "x è una marca automobilistica", $b(x)$ come "x è una berlina", $c(x)$ come "x è un'auto compatta" e $p(x, y)$ come "x produce y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) la Fiat è la marca automobilistica che ha prodotto l'auto di Dario; 3pt

(ii) ogni marca automobilistica produce un'auto compatta e una berlina. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \to q \vee r) \wedge (q \to (s \to \neg p)) \wedge (s \vee r) \to r \vee \neg p$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\forall x(\neg p(x) \to \exists y\, \neg r(x, y)) \wedge \forall x(p(x) \to \forall y\, r(y, x)) \wedge \neg p(c) \to \exists y\, (\neg p(y) \wedge \neg r(c, y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(p \wedge \neg q \to r \wedge \neg s) \to t \wedge \neg(u \wedge \neg v).$$

Soluzioni

1. **FND** La formula è la disgiunzione di due congiunzioni: una di due letterali, l'altra di un solo letterale.
2. **V** Supponiamo esista un'interpretazione I tale che $I \models F \wedge H$. Allora $I \models F$, da cui per la prima ipotesi segue $I \models G$, e $I \models H$, da cui per la seconda ipotesi segue $I \models \neg G$. Ma nessuna interpretazione può soddisfare sia G che $\neg G$. Quindi $F \wedge H$ è insoddisfacibile.
3. **V** Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.
4. **F** Data una formula proposizionale F esiste una β-formula G (ad esempio $F \vee p$) tale che F è un ridotto di G. Quindi qualsiasi formula, anche se non è un letterale, è un ridotto di una β-formula.
5. **F** Nel caso in cui a x viene assegnato 2 non vale nessuno dei due disgiunti.
6. **V** Se esiste un y che va bene per tutti gli x allora per ogni x esiste un y (sempre lo stesso).
7. **1** Soltanto la prima formula è una γ-formula; la seconda e la terza sono δ-formule, e l'ultima è una β-formula.
8. **F** Se Γ è un insieme di Hintikka tale che $\exists x\, r(x,a) \rightarrow \forall x\, p(x) \in \Gamma$ allora $\neg\exists x\, r(x,a) \in \Gamma$ oppure $\forall x\, p(x) \in \Gamma$. Nel primo caso deve essere $\neg r(a,a) \in \Gamma$ e quindi non può essere $r(a,a) \in \Gamma$. Nel secondo caso si avrebbe $p(a) \in \Gamma$ e quindi non può essere $\neg p(a) \in \Gamma$.
9. **V** Un tableau con un ramo infinito è aperto (definizione 8.26 delle dispense). Per il teorema di completezza F è soddisfacibile.
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati alla sinistra di $\models$, ma non soddisfi quello sulla destra. L'interpretazione I tale che

$$D^I = \{0,1\}, \qquad p^I = \{0\}, \qquad r^I = \{(0,1),(1,1)\}$$

ha queste caratteristiche.

11. L'enunciato da considerare è della forma $F \wedge G$. Sia I un'interpretazione arbitraria: vogliamo mostrare che non soddisfa $F \wedge G$. A questo scopo è sufficiente mostrare che se $I \models F$ allora $I \not\models G$.

Da $I \models F$ segue l'esistenza di un elemento $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x,y) \wedge \neg r(f(x),x)$. Quindi $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x,y)$, da cui segue in particolare $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$, e $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$.

Allora $I, \sigma[x/d_0][y/f^I(d_0)] \not\models r(x,y) \rightarrow r(y,x)$ e di conseguenza $I \not\models G$.

12. (i) $m(F) \wedge p(F, a(D))$;
(ii) $\forall x(m(x) \to \exists y(c(y) \wedge p(x,y)) \wedge \exists y(b(y) \wedge p(x,y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. In diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare. Per ragioni di spazio condensiamo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α-formule.

$$\underline{\neg((p \to q \vee r) \wedge (q \to (s \to \neg p)) \wedge (s \vee r) \to r \vee \neg p)}$$

$$\underline{p \to q \vee r}, q \to (s \to \neg p), s \vee r, \neg r, p$$

$$\neg p, q \to (s \to \neg p), s \vee r, \neg r, p \qquad \underline{q \vee r}, q \to (s \to \neg p), s \vee r, \neg r, p$$
$$\otimes$$

$$q, \underline{q \to (s \to \neg p)}, s \vee r, \neg r, p \qquad r, q \to (s \to \neg p), s \vee r, \neg r, p$$
$$\otimes$$

$$q, \neg q, s \vee r, \neg r, p \qquad q, \underline{s \to \neg p}, s \vee r, \neg r, p$$
$$\otimes$$

$$q, \neg s, \underline{s \vee r}, \neg r, p \qquad q, \neg p, s \vee r, \neg r, p$$
$$\otimes$$

$$q, \neg s, s, \neg r, p \qquad q, \neg s, r, \neg r, p$$
$$\otimes \qquad \otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F, G, H e K le γ-formule $\forall x(\neg p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y))$, $\forall x(p(x) \to \forall y\, r(y,x))$, $\neg\exists y\,(\neg p(y) \wedge \neg r(c,y))$ e $\forall y\, r(y,a)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Per ragioni di spazio condensiamo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α-formule.

$$\underline{\neg(F \wedge G \wedge \neg p(c) \to \exists y\,(\neg p(y) \wedge \neg r(c,y)))}$$

$$\underline{F}, G, \neg p(c), H$$

$$F, \underline{\neg p(c) \to \exists y\, \neg r(c,y)}, G, \neg p(c), H$$

$$F, p(c), G, \neg p(c), H \qquad\qquad F, \underline{\exists y\, \neg r(c,y)}, G, \neg p(c), H$$

$$\otimes$$

$$F, \neg r(c,a), G, \neg p(c), \underline{H}$$

$$F, \neg r(c,a), G, \neg p(c), H, \underline{\neg(\neg p(a) \wedge \neg r(c,a))}$$

$$F, \neg r(c,a), \underline{G}, \neg p(c), H, p(a) \qquad\qquad F, \neg r(c,a), G, \neg p(c), H, r(c,a)$$

$$\otimes$$

$$F, \neg r(c,a), G, \underline{p(a) \to K}, \neg p(c), H, p(a)$$

$$F, \neg r(c,a), G, \neg p(a), \neg p(c), H, p(a) \qquad\qquad F, \neg r(c,a), G, \underline{K}, \neg p(c), H, p(a)$$

$$\otimes$$

$$F, \neg r(c,a), G, K, r(c,a), \neg p(c), H, p(a)$$

$$\otimes$$

15.

$$[\langle (p \wedge \neg q \to r \wedge \neg s) \to t \wedge \neg(u \wedge \neg v) \rangle]$$
$$[\langle \neg(p \wedge \neg q \to r \wedge \neg s) \rangle, \langle t \wedge \neg(u \wedge \neg v) \rangle]$$
$$[\langle p \wedge \neg q, \neg(r \wedge \neg s) \rangle, \langle t, \neg(u \wedge \neg v) \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, \neg(r \wedge \neg s) \rangle, \langle t, \neg u \rangle, \langle t, v \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, \neg r \rangle, \langle p, \neg q, s \rangle, \langle t, \neg u \rangle, \langle t, v \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge s) \vee (t \wedge \neg u) \vee (t \wedge v).$$