Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
10 gennaio 2007

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \wedge G \models H$ allora $F \models H$ e $G \models H$. **V** | **F** 1pt

2. $(p \to (p \to q)) \to (\neg q \to \neg p)$ è valida. **V** | **F** 1pt

3. Ogni β-formula è logicamente equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti. **V** | **F** 1pt

4. Se una formula proposizionale ha un tableau aperto allora tutti i suoi tableaux sono aperti. **V** | **F** 1pt

5. Quante sono le variabili libere nella formula $\exists x(\forall y(r(x,y) \to \neg r(f(y),x)) \wedge \exists z(p(f(z)) \wedge \neg r(z,x)))$? **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

6. Se I è l'interpretazione di dominio $\mathbb{N}$ con $f^I(n) = n+2$ e $p^I = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è multiplo di } 3 \,\}$ allora $I \models \forall x(\neg p(x) \to p(f(x)))$. **V** | **F** 1pt

7. Se x non è libera in F allora $\forall x\, p(x) \to F \equiv \exists x(\neg p(x) \vee F)$. **V** | **F** 1pt

8. $\neg \exists x\, \forall y(r(x,y) \wedge \neg r(y,x))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

9. Sia Γ un insieme di Hintikka di formule predicative tale che $\forall x(p(x) \to q(x)) \in \Gamma$ e $p(c) \in \Gamma$; allora $\neg q(c) \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrare che l'insieme 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \neg r(f(x),x)), \exists x\, \exists y(p(x) \wedge r(y,x))\}$$

è soddisfacibile. (Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrare che 4pt

$$\neg \exists x\, \exists y(p(x) \wedge r(x,y)) \models \forall x(p(x) \to \neg r(x, f(x))).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{c, g, u, s, p, v\}$ un linguaggio dove c e g sono simboli di costante, u è un simbolo di funzione unario, s e p sono simboli di relazione unari e v è un simbolo di relazione binario. Interpretando c come "Camilleri", g come "Grisham", $u(x)$ come "l'ultimo libro di x", $s(x)$ come "x è uno scrittore", $p(x)$ come "x è un poeta" e $v(x, y)$ come "x vende più copie di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Camilleri e Grisham sono scrittori, e l'ultimo libro di Camilleri vende più copie dell'ultimo libro di Grisham; 3pt

(ii) l'ultimo libro di qualche scrittore vende più copie dell'ultimo libro di qualsiasi poeta. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(\neg p \to q \wedge r) \wedge (r \to \neg p \vee \neg s) \to (q \to p) \vee (\neg s \wedge r)$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\exists x(\forall y\, r(x, y) \wedge \neg r(a, x)) \to \neg\forall x\, \forall y(r(x, y) \to r(y, x)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(s \to u) \vee (\neg r \wedge p) \to \neg(\neg q \to \neg t \wedge w).$$

Soluzioni

1. F Ad esempio se $F = p$, $G = q$, $H = p \wedge q$ si ha $F \wedge G \models H$, ma $F \not\models H$ e $G \not\models H$.

2. V Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.

3. V Lemma 3.7 delle dispense.

4. V È una conseguenza dei teoremi di correttezza e completezza: si veda l'osservazione dopo il Teorema 4.21 delle dispense.

5. 0 La formula è un enunciato.

6. F Ad esempio nel caso in cui a x viene assegnato 2 l'implicazione non risulta verificata.

7. V L'equivalenza logica in questione discende da alcune delle equivalenze logiche fondamentali: $\forall x\, p(x) \rightarrow F \equiv \exists x(p(x) \rightarrow F) \equiv \exists x(\neg p(x) \vee F)$.

8. γ È la negazione di una quantificazione esistenziale.

9. V Deve essere $p(c) \rightarrow q(c) \in \Gamma$ e quindi $\neg p(c) \in \Gamma$ oppure $q(c) \in \Gamma$: dato che la prima alternativa è impossibile (perché $p(c) \in \Gamma$) si ha $q(c) \in \Gamma$ e quindi $\neg q(c) \notin \Gamma$.

10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati. Un'interpretazione I tale che

$$D^I = \{0,1\}, \qquad p^I = \{0\}, \qquad f^I(0) = 1, \qquad r^I = \{(0,0)\}$$

(e con $f^I(1)$ qualsiasi) ha queste caratteristiche.

11. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa l'enunciato a sinistra di $\models$, ma non quello a destra: vogliamo ottenere una contraddizione.

Dato che $I \models \neg\forall x(p(x) \rightarrow \neg r(x, f(x)))$ esiste un elemento $d_0 \in D^I$ tale che $I \not\models p(x) \rightarrow \neg r(x, f(x))$. Perciò $d_0 \in p^I$ e $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$. Abbiamo quindi che $I, \sigma[x/d_0][y/f^I(d_0)] \models p(x) \wedge r(x, y)$ e di conseguenza $I \models \exists x\, \exists y(p(x) \wedge r(x, y))$, contro la nostra ipotesi.

12. (i) $s(c) \land s(g) \land v(u(c), u(g))$;

(ii) $\exists x(s(x) \land \forall y(p(y) \to v(u(x), u(y))))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. In diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$\underline{\neg\big((\neg p \to q \land r) \land (r \to \neg p \lor \neg s) \to (q \to p) \lor (\neg s \land r)\big)}$$

$$\underline{(\neg p \to q \land r) \land (r \to \neg p \lor \neg s)}, \neg((q \to p) \lor (\neg s \land r))$$

$$\neg p \to q \land r, r \to \neg p \lor \neg s, \underline{\neg((q \to p) \lor (\neg s \land r))}$$

$$\neg p \to q \land r, r \to \neg p \lor \neg s, \underline{\neg(q \to p)}, \neg(\neg s \land r)$$

$$\underline{\neg p \to q \land r}, r \to \neg p \lor \neg s, q, \neg p, \neg(\neg s \land r)$$

$$p, r \to \neg p \lor \neg s, q, \neg p, \neg(\neg s \land r) \quad \otimes \qquad\qquad \underline{q \land r}, r \to \neg p \lor \neg s, q, \neg p, \neg(\neg s \land r)$$

$$q, r, r \to \neg p \lor \neg s, q, \neg p, \underline{\neg(\neg s \land r)}$$

$$q, r, \underline{r \to \neg p \lor \neg s}, q, \neg p, s \qquad\qquad q, r, r \to \neg p \lor \neg s, q, \neg p, \neg r \quad \otimes$$

$$q, r, \neg r, q, \neg p, s \quad \otimes \qquad\qquad q, r, \neg p \lor \neg s, q, \neg p, s$$

$$q, r, \neg p, q, \neg p, s \quad \bigcirc \qquad\qquad q, r, \neg s, q, \neg p, s \quad \otimes$$

Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. Dalla foglia aperta del tableau si ottiene (utilizzando il Lemma 4.31 delle dispense) una valutazione che non soddisfa la formula: $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F, G e H le γ-formule $\forall x\ \forall y(r(x,y) \to r(y,x))$, $\forall y\ r(c,y)$ e $\forall y(r(c,y) \to r(y,c))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(\exists x(\forall y\ r(x,y) \wedge \neg r(a,x)) \to \neg F)}$$

$$\underline{\exists x(\forall y\ r(x,y) \wedge \neg r(a,x))}, F$$

$$\underline{\forall y\ r(c,y) \wedge \neg r(a,c)}, F$$

$$\underline{G}, \neg r(a,c), F$$

$$G, r(c,a), \neg r(a,c), \underline{F}$$

$$G, r(c,a), \neg r(a,c), F, \underline{H}$$

$$G, r(c,a), \neg r(a,c), F, H, \underline{r(c,a) \to r(a,c)}$$

$$G, r(c,a), \neg r(a,c), F, H, \neg r(c,a) \qquad\qquad G, r(c,a), \neg r(a,c), F, H, r(a,c)$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

15.

$$\langle [(s \to u) \vee (\neg r \wedge p) \to \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)] \rangle$$
$$\langle [\neg((s \to u) \vee (\neg r \wedge p)), \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)] \rangle$$
$$\langle [\neg(s \to u), \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)], [\neg(\neg r \wedge p), \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)] \rangle$$
$$\langle [s, \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)], [\neg u, \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)], [r, \neg p, \neg(\neg q \to \neg t \wedge w)] \rangle$$
$$\langle [s, \neg q], [s, \neg(\neg t \wedge w)], [\neg u, \neg q], [\neg u, \neg(\neg t \wedge w)], [r, \neg p, \neg q], [r, \neg p, \neg(\neg t \wedge w)] \rangle$$
$$\langle [s, \neg q], [s, t, \neg w], [\neg u, \neg q], [\neg u, t, \neg w], [r, \neg p, \neg q], [r, \neg p, t, \neg w] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(s \vee \neg q) \wedge (s \vee t \vee \neg w) \wedge (\neg u \vee \neg q) \wedge (\neg u \vee t \vee \neg w) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p \vee t \vee \neg w).$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
10 gennaio 2007

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \to \neg q) \wedge (p \to q) \to \neg p$ è valida. **V** | **F** 1pt

2. $\neg \forall x \, \exists y (r(x, y) \vee \neg r(y, x))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

3. Ogni α-formula è logicamente equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti. **V** | **F** 1pt

4. Esiste una formula proposizionale che ha sia un tableau chiuso che un tableau aperto. **V** | **F** 1pt

5. Se $F \models G \vee H$ allora $F \models G$ oppure $F \models H$. **V** | **F** 1pt

6. Quante sono le variabili libere nella formula $\forall x (\exists y \, r(x, f(y)) \to \neg r(y, x) \wedge \exists z (p(f(z)) \vee \neg r(z, x)))$? **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

7. Se x non è libera in F allora $\exists x \, p(x) \to F \equiv \forall x (\neg p(x) \vee F)$. **V** | **F** 1pt

8. Se I è l'interpretazione di dominio $\mathbb{N}$ con $f^I(n) = n + 2$ e $p^I = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ non è multiplo di } 3 \}$ allora $I \models \forall x (p(x) \to p(f(x)))$. **V** | **F** 1pt

9. Sia Γ un insieme di Hintikka di formule predicative tale che $\forall x \neg (p(x) \wedge q(x)) \in \Gamma$ e $q(c) \in \Gamma$; allora $p(c) \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrare che l'insieme 4pt

$$\{\exists x \, \exists y (p(x) \wedge r(x, y)), \forall x (p(x) \to \neg r(x, f(x)))\}$$

è soddisfacibile. (Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrare che 4pt

$$\neg \exists x \, \exists y (p(x) \wedge \neg r(y, x)) \models \forall x (p(x) \to r(f(x), x)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{m, s, u, c, b, v\}$ un linguaggio dove m e s sono simboli di costante, u è un simbolo di funzione unario, c e b sono simboli di relazione unari e v è un simbolo di relazione binario. Interpretando m come "Madonna", s come "Spears", $u(x)$ come "l'ultimo cd di x", $c(x)$ come "x è una cantante", $b(x)$ come "x è una band" e $v(x, y)$ come "x vende più copie di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Madonna e Spears sono cantanti, e l'ultimo cd di Madonna vende più copie dell'ultimo cd di Spears; 3pt

(ii) l'ultimo cd di qualche cantante vende più copie dell'ultimo cd di qualsiasi band. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \to \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \to p \wedge s) \to (\neg r \wedge p) \vee (s \to q)$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\exists x(\neg r(x, a) \wedge \forall y\, r(y, x)) \to \neg\forall x\, \forall y(r(x, y) \to r(y, x)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \to w) \to \neg(\neg s \to t \wedge \neg u).$$

Soluzioni

1. **V** Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.
2. δ È la negazione di una quantificazione universale.
3. **F** Una α-formula è logicamente equivalente alla **congiunzione** dei suoi ridotti (Lemma 3.7 delle dispense).
4. **F** Quanto affermato è impossibile a causa dei teoremi di correttezza e completezza: si veda l'osservazione dopo il Teorema 4.21 delle dispense.
5. **F** Ad esempio se $F = p$, $G = q$, $H = \neg q$ si ha $F \models G \vee H$ (perché $G \vee H$ è valida), ma $F \not\models G$ e $F \not\models H$.
6. **1** La terza occorrenza di y è libera.
7. **V** L'equivalenza logica in questione discende da alcune delle equivalenze logiche fondamentali: $\exists x\, p(x) \to F \equiv \forall x(p(x) \to F) \equiv \forall x(\neg p(x) \vee F)$.
8. **F** Ad esempio nel caso in cui a x viene assegnato 1 l'implicazione non risulta verificata.
9. **V** Deve essere $\neg(p(c) \wedge q(c)) \in \Gamma$ e quindi $\neg p(c) \in \Gamma$ oppure $\neg q(c) \in \Gamma$: dato che la seconda alternativa è impossibile (perché $q(c) \in \Gamma$) si ha $\neg p(c) \in \Gamma$ e quindi $p(c) \notin \Gamma$.
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i due enunciati. Un'interpretazione I tale che
$$D^I = \{0, 1\}, \qquad p^I = \{0\}, \qquad f^I(0) = 1, \qquad r^I = \{(0, 0)\}$$
(e con $f^I(1)$ qualsiasi) ha queste caratteristiche.
11. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa l'enunciato a sinistra di $\models$, ma non quello a destra: vogliamo ottenere una contraddizione.

    Dato che $I \models \neg\forall x(p(x) \to r(f(x), x))$ esiste un elemento $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \not\models p(x) \to r(f(x), x)$. Perciò $d_0 \in p^I$ e $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$. Abbiamo quindi che $I, \sigma[x/d_0][y/f^I(d_0)] \models p(x) \wedge \neg r(y, x)$ e di conseguenza $I \models \exists x\, \exists y(p(x) \wedge \neg r(x, y))$, contro la nostra ipotesi.

12. (i) $c(m) \land c(s) \land v(u(m), u(s))$;

(ii) $\exists x(c(x) \land \forall y(b(y) \to v(u(x), u(y))))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. In diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$\underline{\neg\big((p \to \neg q \lor \neg r) \land (\neg q \to p \land s) \to (\neg r \land p) \lor (s \to q)\big)}$$

$$\underline{(p \to \neg q \lor \neg r) \land (\neg q \to p \land s)}, \neg((\neg r \land p) \lor (s \to q))$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, \neg q \to p \land s, \underline{\neg((\neg r \land p) \lor (s \to q))}$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, \neg q \to p \land s, \neg(\neg r \land p), \underline{\neg(s \to q)}$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, \underline{\neg q \to p \land s}, \neg(\neg r \land p), s, \neg q$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, q, \neg(\neg r \land p), s, \neg q \qquad \otimes$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, \underline{p \land s}, \neg(\neg r \land p), s, \neg q$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, p, s, \underline{\neg(\neg r \land p)}, s, \neg q$$

$$\underline{p \to \neg q \lor \neg r}, p, s, r, s, \neg q$$

$$p \to \neg q \lor \neg r, p, s, \neg p, s, \neg q \qquad \otimes$$

$$\neg p, p, s, r, s, \neg q \qquad \otimes$$

$$\underline{\neg q \lor \neg r}, p, s, r, s, \neg q$$

$$\neg q, p, s, r, s, \neg q \qquad \bigcirc$$

$$\neg r, p, s, r, s, \neg q \qquad \otimes$$

Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. Dalla foglia aperta del tableau si ottiene (utilizzando il Lemma 4.31 delle dispense) una valutazione che non soddisfa la formula: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F, G e H le γ-formule $\forall x\ \forall y (r(x,y) \to r(y,x))$, $\forall y\ r(y,c)$ e $\forall y (r(a,y) \to r(y,a))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\exists x (\neg r(x,a) \land \forall y\ r(y,x)) \to \neg F)}$$

$$\underline{\exists x (\neg r(x,a) \land \forall y\ r(y,x))}, F$$

$$\underline{\neg r(c,a) \land \forall y\ r(y,c)}, F$$

$$\neg r(c,a), \underline{G}, F$$

$$\neg r(c,a), G, r(a,c), \underline{F}$$

$$\neg r(c,a), G, r(a,c), F, \underline{H}$$

$$\neg r(c,a), G, r(a,c), F, H, \underline{r(a,c) \to r(c,a)}$$

$$\neg r(c,a), G, r(a,c), F, H, \neg r(a,c) \qquad\qquad \neg r(c,a), G, r(a,c), F, H, r(c,a)$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

15.

$$\langle [(p \land \neg q) \lor (r \to w) \to \neg(\neg s \to t \land \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg((p \land \neg q) \lor (r \to w)), \neg(\neg s \to t \land \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \land \neg q), \neg(\neg s \to t \land \neg u)], [\neg(r \to w), \neg(\neg s \to t \land \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg(\neg s \to t \land \neg u)], [r, \neg(\neg s \to t \land \neg u)], [\neg w, \neg(\neg s \to t \land \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg s], [\neg p, q, \neg(t \land \neg u)], [r, \neg s], [r, \neg(t \land \neg u)], [\neg w, \neg s], [\neg w, \neg(t \land \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg s], [\neg p, q, \neg t, u], [r, \neg s], [r, \neg t, u], [\neg w, \neg s], [\neg w, \neg t, u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \lor q \lor \neg s) \land (\neg p \lor q \lor \neg t \lor u) \land (r \lor \neg s) \land (r \lor \neg t \lor u) \land (\neg w \lor \neg s) \land (\neg w \lor \neg t \lor u).$$