Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
13 luglio 2007

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models G \vee H$ e H è insoddisfacibile, allora $F \models G$. **V** **F** 1pt

2. $(p \to q) \wedge (q \to r) \models r \vee \neg p$. **V** **F** 1pt

3. $(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg(s \wedge t)) \vee (\neg p \wedge u)$ è in forma normale disgiuntiva. **V** **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono α-formule?
$p \to q \wedge r$, $p \wedge q \to r$, $\neg(p \to \neg q) \vee r$, $\neg(p \wedge (q \to r))$ **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

5. Quante delle seguenti formule sono enunciati? **0** **1** **2** **3** **4**
$\forall x\, p(x) \to q(x)$, $\exists x(\forall y\, r(x, y) \to p(x))$, $\neg\exists x(p(x) \wedge r(x, y))$, $p(x) \wedge \exists y\, r(y, y)$ 1pt

6. Sia I l'interpretazione di dominio $\mathbb{N}$ (l'insieme dei numeri naturali) con $a^I = 4$, $p^I = \{\, n : n \text{ è pari} \,\}$ e $r^I = \{\, (n, m) : n + m \text{ è pari} \,\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \to r(a, x))$. **V** **F** 1pt

7. $\forall x(p(x) \to q(x)) \equiv \exists x\, p(x) \to \forall x\, q(x)$. **V** **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule predicative tale che
$p(c) \in \Gamma$, $\forall x(\exists y\, r(x, y) \to \neg p(x)) \in \Gamma$ e $r(c, a) \in \Gamma$. **V** **F** 1pt

9. Se la formula proposizionale F ha un tableau aperto
allora tutti i tableaux per F sono aperti. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare che 4pt

$$\forall x(p(x) \vee \forall y\, \neg r(x, y)) \wedge \exists z\, r(c, f(z)) \models p(c).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare la soddisfacibilità di 4pt

$$\forall x\, \forall y(\neg r(x, y) \vee \neg r(y, x)) \wedge \forall x\, \exists y\, r(x, y) \wedge \forall x\, \exists y\, r(y, x).$$

12. Sia $\{b, c, m, p, s, a\}$ un linguaggio dove b e c sono simboli di costante, m è un simbolo di funzione unario, p è un simbolo di relazione unario e s e a sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Barbara", c come "Claudio", $m(x)$ come "il medico di x", $p(x)$ come "x è un paziente", $s(x, y)$ come "x stima y" e $a(x, y)$ come "y è un amico di x", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Barbara stima il proprio medico, ma non quello di Claudio; 3pt

(ii) i pazienti che non stimano il proprio medico stimano quello di qualche loro amico. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \to \neg q) \wedge (\neg q \to r) \wedge (r \to s) \wedge (s \vee q \to p)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \to p(x)) \wedge \exists x\, r(x, a) \to \exists x\, p(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(p \vee \neg q) \to \neg(r \vee s \to \neg t \vee u)\big).$$

Soluzioni

1. **V** Sia I un'interpretazione tale che $I \models F$. Dalla prima ipotesi segue $I \models G \vee H$. Perciò $I \models G$ oppure $I \models H$. Dato che $I \models H$ contraddice la seconda ipotesi, deve essere necessariamente vero che $I \models G$.
2. **V** Si verifica facilmente ad esempio con le tavole di verità.
3. **F** Il secondo disgiunto non è una congiunzione di letterali, perché il suo secondo congiunto è una β-formula.
4. **0** Sono tutte β-formule.
5. **1** La seconda formula è l'unico enunciato, mentre x è libera nella prima e nella quarta formula, e y è libera nella terza formula.
6. **V** L'enunciato asserisce che se il numero n è pari, allora è pari anche $4+n$.
7. **F** Si veda l'esercizio 6.48 delle dispense.
8. **F** Sia Γ un insieme tale che $p(c) \in \Gamma$, $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \neg p(x)) \in \Gamma$ e $r(c,a) \in \Gamma$. Se Γ fosse un insieme di Hintikka dovrebbe essere anche $\exists y\, r(c,y) \to \neg p(c) \in \Gamma$, e quindi $\neg\exists y\, r(c,y) \in \Gamma$ oppure $\neg p(c) \in \Gamma$. La seconda possibilità contraddice $p(c) \in \Gamma$, mentre la prima implica (tra le altre cose) che $\neg r(c,a) \in \Gamma$: quest'ultima condizione contraddice $r(c,a) \in \Gamma$.
9. **V** Per il teorema di correttezza se F ha un tableau aperto allora F è soddisfacibile. Per il teorema di completezza se F è soddisfacibile allora tutti i tableaux per F sono aperti. (Si veda anche l'osservazione dopo il Teorema 4.21 delle dispense.)
10. Sia I un'interpretazione arbitraria che soddisfa l'enunciato a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che è della forma $F \wedge G$: vogliamo mostrare che $I \models p(c)$.

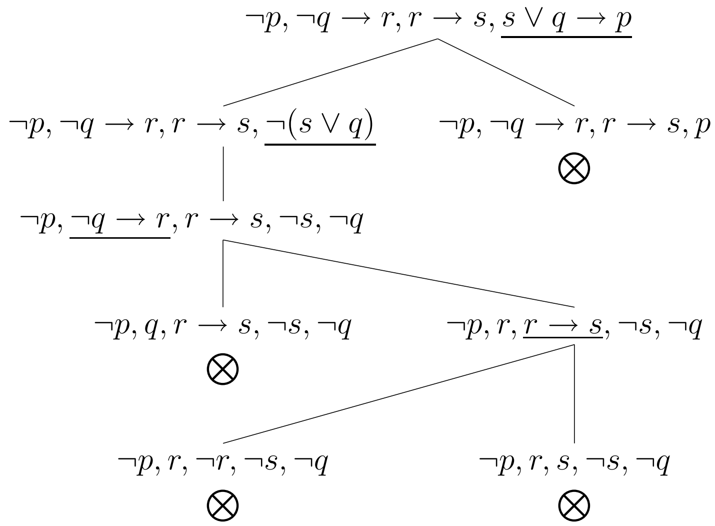
    Per ipotesi $I \models F$ e $I \models G$. Per la seconda condizione esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[z/d_0] \models r(c, f(z))$, ovvero $(c^I, f^I(d_0)) \in r^I$. Dato che $I \models F$ si ha $I, \sigma[x/c^I] \models p(x) \vee \forall y\, \neg r(x,y)$ e quindi $c^I \in p^I$ oppure $I, \sigma[x/c^I] \models \forall y\, \neg r(x,y)$. La prima alternativa significa che $I \models p(c)$, il nostro obiettivo. Dobbiamo quindi solo escludere che valga la seconda possibilità.

    Ma $I, \sigma[x/c^I] \models \forall y\, \neg r(x,y)$ implica $I, \sigma[x/c^I, y/f^I(d_0)] \models \neg r(x,y)$, cioè $(c^I, f^I(d_0)) \notin r^I$, che contraddice quanto ottenuto in precedenza.
11. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi l'enunciato. L'interpretazione I tale che
$$D^I = \{0,1,2\}, \qquad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$$
    ha questa caratteristica.
12. (i) $s(b, m(b)) \wedge \neg s(b, m(c))$;
    (ii) $\forall x(p(x) \wedge \neg s(x, m(x)) \to \exists y(a(x,y) \wedge s(x, m(y))))$.

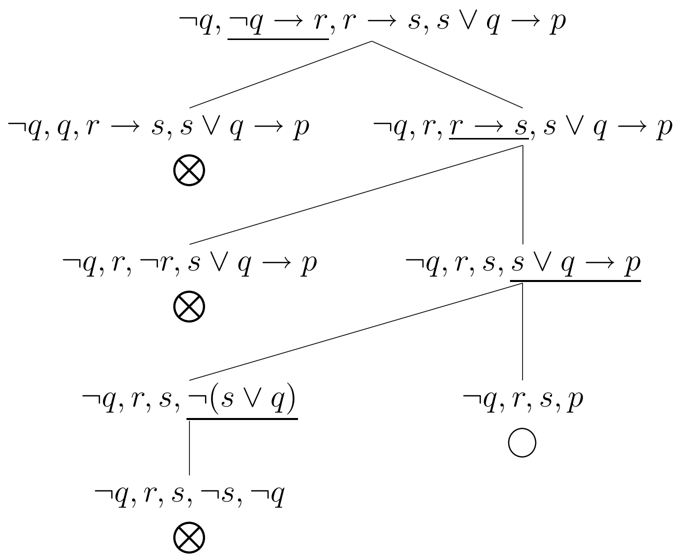
13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per la formula stessa. Dopo i primi passaggi, in cui si agisce solo su α-formule, otteniamo un nodo etichettato con

$$p \to \neg q, \neg q \to r, r \to s, s \vee q \to p.$$

Al passaggio successivo agiamo (ad esempio) sulla prima delle quattro β-formule ed otteniamo due sotto-tableaux. Ecco quello di sinistra: in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Il sotto-tableau di sinistra è chiuso. Ecco ora quello di destra.



Il sotto-tableau di destra, e quindi l'intero tableau, è aperto e la formula di partenza è soddisfacibile. Il nodo aperto del tableau ci fornisce un'interpretazione che soddisfa la formula in esame: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Indichiamo con F la formula $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to p(x))$, con G la formula $\neg\exists x\, p(x)$ e con H la formula $\neg\exists y\, r(b,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(F \wedge \exists x\, r(x,a) \to \exists x\, p(x))}$$
$$\underline{F \wedge \exists x\, r(x,a)}, G$$
$$F, \underline{\exists x\, r(x,a)}, G$$
$$\underline{F}, G, r(b,a)$$
$$F, G, r(b,a), \underline{\exists y\, r(b,y) \to p(b)}$$
$$\begin{array}{cc} F, G, r(b,a), \underline{H} & F, \underline{G}, r(b,a), p(b) \\ F, G, r(b,a), H, \neg r(b,a) & F, G, r(b,a), p(b), \neg p(b) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

15.

$$[\langle \neg(\neg(p \vee \neg q) \to \neg(r \vee s \to \neg t \vee u)) \rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee \neg q), r \vee s \to \neg t \vee u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, r \vee s \to \neg t \vee u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, \neg(r \vee s) \rangle, \langle \neg p, q, \neg t \vee u \rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, \neg r, \neg s \rangle, \langle \neg p, q, \neg t \rangle, \langle \neg p, q, u \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge q \wedge u).$$