Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
13 settembre 2007

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \vee G \models H$ e G è valida, allora H è valida. **V** | **F** 1pt

2. $p \wedge \neg q \to r \models \neg q \to p \wedge \neg r$. **V** | **F** 1pt

3. La negazione di un letterale è un letterale. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono in forma normale disgiuntiva?
$p \vee (r \wedge \neg q)$, $p \to \neg r$, $(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg\neg s)$, $p \wedge (q \vee r)$ **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Sia I l'interpretazione di dominio $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$
con $f^I(0) = f^I(2) = 1$, $f^I(1) = 0$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{0, 1\}$
e $r^I = \left\{ (d, d) : d \in D^I \right\}$. Allora $I \models \forall x(p(f(x)) \vee r(x, f(x)))$. **V** | **F** 1pt

6. $\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \models \exists x(p(x) \wedge q(x))$. **V** | **F** 1pt

7. Quante delle seguenti formule sono γ-formule?
$\forall x\, p(x)$, $\exists x\, \neg p(x)$, $\neg\exists x\, p(x)$, $\forall x\, p(x) \to q(c)$ **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

8. Se esiste un tableau non costruito con sistematicità aperto per la formula predicativa F allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka Γ di formule proposizionali tale che $\neg(p \to q) \in \Gamma$, $r \to \neg p \vee q \in \Gamma$ e $\neg p \vee r \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrare la soddisfacibilità di 4pt

$$\exists x(p(x) \wedge \forall y\, \neg r(y, x)) \wedge p(c) \wedge r(c, c) \wedge \forall x \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrare che $F, G, p(c) \models p(f(f(c)))$, dove F e G sono gli enunciati $\forall x(p(x) \to \neg p(f(x)))$ e $\forall x(\neg p(x) \to p(f(x)))$. 4pt

12. Sia $\{m, f, p, c, g, t\}$ un linguaggio dove m e f sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e t è un simbolo di relazione binario. Interpretando m come "Micio", f come "Fido", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $t(x, y)$ come "x teme y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Micio è un gatto che non teme né Fido né il padrone di Fido; 3pt

(ii) ogni cane che teme un gatto, teme tutti i gatti. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \vee \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge \neg(p \wedge \neg s) \rightarrow \neg r \vee s$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrare l'insoddisfacibilità di 5pt

$$\forall x(p(x) \rightarrow r(x, x)) \wedge \exists x\, p(x) \wedge \forall x(\exists y\, r(y, x) \rightarrow \neg p(x)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(s \rightarrow t \wedge u).$$

Soluzioni

1. **V** Sia I un'interpretazione qualsiasi: dato che G è valida si ha $I \models G$ e quindi $I \models F \vee G$. Da $F \vee G \models H$ segue $I \models H$. Visto che I è arbitraria, H è valida.

2. **F** Si verifica facilmente, ad esempio con le tavole di verità, che qualsiasi valutazione con $v(q) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{V}$ soddisfa la formula a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quella a destra.

3. **F** La negazione di una una lettera proposizionale è un letterale, ma la sua negazione non lo è.

4. **1** Solo la prima formula è in forma normale disgiuntiva (e solo l'ultima è in forma normale congiuntiva).

5. **V** Nel caso in cui a x viene assegnato 0, 1 o 2 vale il primo disgiunto, nell'altro caso vale il secondo disgiunto.

6. **F** Si veda l'esercizio 6.48 delle dispense.

7. **2** La prima e la terza formula sono γ-formule, mentre la seconda è una δ-formula e l'ultima una β-formula.

8. **F** Si vedano l'Esempio 8.14 e la Nota 8.15 delle dispense: la costruzione sistematica dei tableaux viene introdotta proprio per ovviare a questo problema.

9. **F** Sia Γ un insieme tale che $\neg(p \to q) \in \Gamma$, $r \to \neg p \vee q \in \Gamma$ e $\neg p \vee r \in \Gamma$. Se Γ è un insieme di Hintikka abbiamo $p \in \Gamma$ e $\neg q \in \Gamma$. Inoltre $\neg p \in \Gamma$ oppure $r \in \Gamma$. La prima possibilità contraddice $p \in \Gamma$ e quindi deve essere $r \in \Gamma$. Da $r \to \neg p \vee q \in \Gamma$ segue $\neg r \in \Gamma$, che è impossibile, oppure $\neg p \vee q \in \Gamma$: anche quest'ultima condizione conduce a contraddizioni e quindi Γ non è un insieme di Hintikka.

10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi l'enunciato. L'interpretazione I tale che

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad c^I = 0, \quad p^I = \{0,1\}, \quad r^I = \{(0,0),(0,2),(1,2),(2,2)\}$$

ha questa caratteristica.

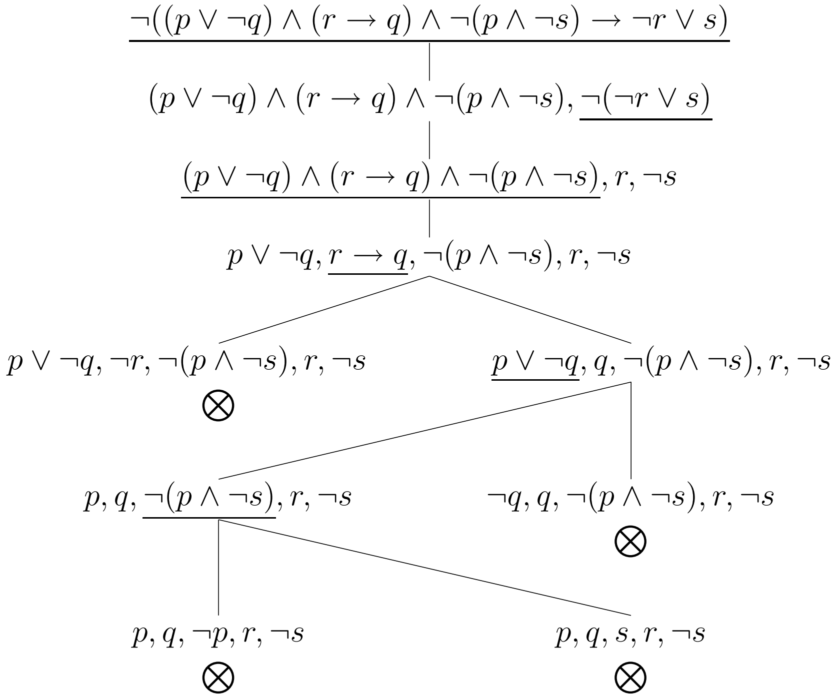
11. Sia I un'interpretazione arbitraria che soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica: vogliamo mostrare che $I \models p(f(f(c)))$.

Da $I \models F$ segue che $I, \sigma[x/c^I] \models p(x) \to \neg p(f(x))$. Dato che $I \models p(c)$ (cioè $I, \sigma[x/c^I] \models p(x)$), si ha $I, \sigma[x/c^I] \models \neg p(f(x))$. Quindi $f^I(c^I) \notin p^I$, cioè $I, \sigma[x/f^I(c^I)] \models \neg p(x)$.

Dato che $I \models G$ abbiamo $I, \sigma[x/f^I(c^I)] \models \neg p(x) \to p(f(x))$ e quindi, utilizzando $I, \sigma[x/f^I(c^I)] \models \neg p(x)$, segue $I, \sigma[x/f^I(c^I)] \models p(f(x))$. Questo significa che $f^I(f^I(c^I)) \in p^I$, cioè $I \models p(f(f(c)))$.

12. (i) $g(m) \wedge \neg t(m, f) \wedge \neg t(m, p(f))$;
(ii) $\forall x(c(x) \wedge \exists y(g(y) \wedge t(x, y)) \to \forall y(g(y) \to t(x, y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Dato che il tableau è chiuso la formula di partenza è valida.

14. Per dimostrare l'insoddisfacibilità dell'enunciato costruiamo un tableau chiuso per esso. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(p(x) \to r(x,x))$, $\forall x(\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x))$ e $\neg \exists y\, r(y,c)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{F \wedge \exists x\, p(x) \wedge G}$$

$$F, \underline{\exists x\, p(x)}, G$$

$$\underline{F}, p(c), G$$

$$F, p(c), G, \underline{p(c) \to r(c,c)}$$

$$F, p(c), G, \neg p(c) \qquad\qquad F, p(c), \underline{G}, r(c,c)$$

$$\otimes$$

$$F, p(c), G, r(c,c), \underline{\exists y\, r(y,c) \to \neg p(c)}$$

$$F, p(c), G, r(c,c), \underline{H} \qquad\qquad F, p(c), G, r(c,c), \neg p(c)$$

$$\otimes$$

$$F, p(c), G, r(c,c), H, \neg r(c,c)$$

$$\otimes$$

15.

$$\langle [p \vee (q \wedge \neg r) \to \neg(s \to t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \vee (q \wedge \neg r)), \neg(s \to t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg(s \to t \wedge u)], [\neg(q \wedge \neg r), \neg(s \to t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s], [\neg p, \neg(t \wedge u)], [\neg q, r, \neg(s \to t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s], [\neg p, \neg t, \neg u], [\neg q, r, s], [\neg q, r, \neg(t \wedge u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, s], [\neg p, \neg t, \neg u], [\neg q, r, s], [\neg q, r, \neg t, \neg u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg t \vee \neg u) \wedge (\neg q \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg t \vee \neg u).$$