Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 settembre 2005

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $p \to (\neg p \lor q \to q)$ è valida. **V** | **F** — 1pt

2. Se $A(a)$ è insoddisfacibile allora $\forall x\, A(x)$ è insoddisfacibile. **V** | **F** — 1pt

3. Se $A \equiv B$ e $A \lor \neg C$ è valida allora $C \models B$. **V** | **F** — 1pt

4. $\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,y)) \land p(c)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ — 1pt

5. Considerate le seguenti quattro formule:
$\neg p(c), \forall x\, p(x), \forall x\, \exists y\, r(x,y), \forall x\, \exists y\, r(x,y) \to p(x)$.
Quante sono formule chiuse? **0** | **1** | **2** | **3** | **4** — 1pt

6. $\forall x\, r(x) \land \forall x\, q(x) \equiv \forall x(r(x) \land q(x))$. **V** | **F** — 1pt

7. Se, applicando il metodo dei tableau ad una formula predicativa insoddisfacibile, non si procede con sistematicità è possibile che il tableau non si chiuda. **V** | **F** — 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka U di formule predicative tale che $\forall x\, p(x) \in U$, $\forall x(p(x) \to r(a,x)) \in U$ e $\neg r(a,a) \in U$. **V** | **F** — 1pt

9. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0,1,2\}$ con $r^I = \{(0,1),(1,0),(2,0)\}$ allora $I \models \forall x\, \exists y\, r(x,y)$. **V** | **F** — 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrate che — 4pt

$$\exists x\, q(x), \forall x(q(x) \to \exists y\, p(y,x)), \forall x\, \forall y(q(x) \land r(y) \to \neg p(y,x)) \models \neg \forall y\, r(y).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrate che la formula — 4pt

$$\exists x(p(x) \land \forall y\, r(x,y)) \land \neg \forall x(\forall y\, r(y,x) \to p(x)) \land \exists x(q(x) \land \neg r(x,x))$$

è soddisfacibile.
(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{c, q, s, a\}$ un linguaggio dove c, q e s sono simboli predicativi unari e a è un simbolo predicativo binario. Interpretando $c(x)$ come "x è un critico", $q(x)$ come "x è un quadro", $s(x)$ come "x è una scultura" e $a(x, y)$ come "x apprezza y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) se un critico apprezza tutti i quadri allora non apprezza qualche scultura; 3pt

(ii) qualche quadro è apprezzato da tutti i critici; 3pt

(iii) nessun critico apprezza ogni quadro e ogni scultura. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare la validità di 5pt

$$\exists x((p(x) \vee q(x)) \wedge \forall y\, \neg r(y, x)) \rightarrow \neg \forall x(p(x) \rightarrow r(a, x)) \vee \exists x(q(x) \wedge \neg r(b, x)).$$

(Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \rightarrow q \wedge r) \wedge (s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w)).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **V** (si può verificare con la tavola di verità, oppure osservare che se p è vera e $\neg p \lor q$ è vera deve essere vera anche q)
2. **V** (se un'interpretazione soddisfa $\forall x\ A(x)$ allora soddisfa anche $A(a)$)
3. **V** (se $I \models C$ la validità di $A \lor \neg C$ implica che $I \models A$ e quindi, dato che $A \equiv B$, che $I \models B$)
4. α (è una congiunzione)
5. **3** (solo l'ultima formula ha una variabile libera (la x))
6. **V** (è un caso particolare di una delle equivalenze logiche fondamentali studiate, e si può verificare facilmente a mano)
7. **V** (un esempio è stato visto a lezione ed è sul testo: questa è la ragione per cui si introduce il concetto di tableau costruito con sistematicità)
8. **F** (se le prime due formule (che sono γ-formule) appartengono ad un insieme di Hintikka U si deve avere $p(a) \in U$ e $p(a) \to r(a,a) \in U$; allora deve appartenere a U anche almeno una tra $\neg p(a)$ e $r(a,a)$; ma $\neg p(a) \notin U$ per quanto già ottenuto, e quindi deve essere $r(a,a) \in U$: ciò fa sì che non possa essere $\neg r(a,a) \in U$)
9. **V** (si verifica immediatamente usando la definizione di soddisfazione)
10. Sia I un'interpretazione qualsiasi che soddisfa le tre formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo nell'ordine con A_1, A_2 e A_3. Dato che $I \models A_1$ esiste $d_1 \in D^I$ tale che $d_1 \in q^I$. Siccome $I \models A_2$ si ha $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1]}(q(x) \to \exists y\ p(y,x)) = V$ e quindi $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1]}(\exists y\ p(y,x)) = V$. Perciò esiste $d_2 \in D^I$ tale che $(d_2, d_1) \in p^I$.

    Supponiamo ora per assurdo che $I \models \forall y\ r(y)$: in particolare dovrebbe essere $d_2 \in r^I$. Visto che $d_1 \in q^I$ e $d_2 \in r^I$ si può sfruttare $I \models A_3$, che in particolare implica che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}(q(x) \land r(y) \to \neg p(y,x)) = V$, per concludere $(d_2, d_1) \notin p^I$, in contraddizione con quanto ottenuto in precedenza. Allora deve essere $I \not\models \forall y\ r(y)$, e quindi $I \models \neg\forall y\ r(y)$, come volevamo.
11. Un'interpretazione che soddisfa la formula è la seguente:
$$D^I = \{0,1,2\}, \qquad p^I = \{0\}, \qquad q^I = \{2\},$$
$$r^I = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(2,1)\}.$$
12. (i) $\forall x(c(x) \land \forall y(q(y) \to a(x,y)) \to \exists y(s(y) \land \neg a(x,y)))$;
    (ii) $\exists x(q(x) \land \forall y(c(y) \to a(y,x)))$;
    (iii) $\neg\exists x(c(x) \land \forall y(q(y) \lor s(y) \to a(x,y)))$.

13. Per dimostrare la validità della formula in esame costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano A, B e C rispettivamente le formule $\forall x(p(x) \to r(a,x))$, $\exists x(q(x) \land \neg r(b,x))$ e $\forall y\ \neg r(y,c)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(\exists x((p(x) \lor q(x)) \land \forall y\ \neg r(y,x)) \to \neg A \lor B)}$$
$$\exists x((p(x) \lor q(x)) \land \forall y\ \neg r(y,x)), \underline{\neg(\neg A \lor B)}$$
$$\underline{\exists x((p(x) \lor q(x)) \land \forall y\ \neg r(y,x))}, A, \neg B$$
$$\underline{(p(c) \lor q(c)) \land C}, A, \neg B$$
$$\underline{p(c) \lor q(c)}, C, A, \neg B$$
$$\begin{array}{cc} p(c), C, A, \neg B & \qquad q(c), C, A, \neg B \end{array}$$

Per ragioni di spazio proseguiamo separatamente i due rami. Ecco il ramo di sinistra:

$$p(c), C, \underline{A}, \neg B$$
$$p(c), C, A, \neg B, \underline{p(c) \to r(a,c)}$$
$$\begin{array}{cc} \underline{p(c)}, C, A, \neg B, \underline{\neg p(c)} & \qquad p(c), \underline{C}, A, \neg B, r(a,c) \\ \otimes & \qquad p(c), C, A, \neg B, \underline{r(a,c)}, \underline{\neg r(a,c)} \\ & \qquad \otimes \end{array}$$

Ed ecco quello di destra:

$$q(c), C, A, \underline{\neg B}$$
$$q(c), C, A, \neg B, \underline{\neg(q(c) \land \neg r(b,c))}$$
$$\begin{array}{cc} \underline{q(c)}, C, A, \neg B, \underline{\neg q(c)} & \qquad q(c), \underline{C}, A, \neg B, r(b,c) \\ \otimes & \qquad q(c), C, A, \neg B, \underline{r(b,c)}, \underline{\neg r(b,c)} \\ & \qquad \otimes \end{array}$$

14.

$$[\langle(\neg p \to q \wedge r) \wedge (s \vee \neg t \to \neg(u \to \neg w))\rangle]$$
$$[\langle \neg p \to q \wedge r, s \vee \neg t \to \neg(u \to \neg w)\rangle]$$
$$[\langle p, s \vee \neg t \to \neg(u \to \neg w)\rangle, \langle q \wedge r, s \vee \neg t \to \neg(u \to \neg w)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg(s \vee \neg t)\rangle, \langle p, \neg(u \to \neg w)\rangle, \langle q, r, s \vee \neg t \to \neg(u \to \neg w)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, t\rangle, \langle p, u, w\rangle, \langle q, r, \neg(s \vee \neg t)\rangle, \langle q, r, \neg(u \to \neg w)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, t\rangle, \langle p, u, w\rangle, \langle q, r, \neg s, t\rangle, \langle q, r, u, w\rangle].$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge \neg s \wedge t) \vee (p \wedge u \wedge w) \vee (q \wedge r \wedge \neg s \wedge t) \vee (q \wedge r \wedge u \wedge w).$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 settembre 2005

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $\neg q \to (p \vee q \to p)$ è valida. **V** **F** 1pt

2. Se $A(a)$ è valida allora $\exists x\, A(x)$ è valida. **V** **F** 1pt

3. Se $A \vee \neg B$ è valida e $B \equiv C$ e allora $C \models A$. **V** **F** 1pt

4. $\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x,y)) \vee \neg p(c)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α β γ δ 1pt

5. Considerate le seguenti quattro formule:
$\neg p(c), \exists x\, p(x), \exists y\, \forall x\, r(x,y), \forall x(\exists y\, r(x,y) \to p(x))$.
Quante sono formule chiuse? **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

6. $\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x) \equiv \exists x(p(x) \vee q(x))$. **V** **F** 1pt

7. Se, applicando il metodo dei tableau ad una formula predicativa insoddisfacibile, si procede con sistematicità è possibile che il tableau non si chiuda. **V** **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka U di formule predicative tale che $\forall x\, p(x) \in U$, $\forall x(r(x,a) \to \neg p(x)) \in U$ e $r(a,a) \in U$. **V** **F** 1pt

9. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0,1,2\}$ con $r^I = \{(0,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$ allora $I \models \forall x\, \exists y\, r(y,x)$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrate che 4pt

$$\exists x\, p(x), \forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,y)), \forall x\, \forall y(p(x) \wedge q(y) \to \neg r(x,y)) \models \neg \forall y\, q(y).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrate che la formula 4pt

$$\exists x(p(x) \wedge \neg r(x,x)) \wedge \exists x(q(x) \wedge \forall y\, r(x,y)) \wedge \neg \forall x(\forall y\, r(y,x) \to q(x))$$

è soddisfacibile.
(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{f, q, s, a\}$ un linguaggio dove f, q e s sono simboli predicativi unari e a è un simbolo predicativo binario. Interpretando $f(x)$ come "x è un film", $q(x)$ come "x è un quiz", $s(x)$ come "x è uno studente" e $a(x, y)$ come "x apprezza y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) qualche film è apprezzato da tutti gli studenti; 3pt

(ii) se uno studente apprezza tutti i film allora non apprezza qualche quiz; 3pt

(iii) nessuno studente apprezza ogni film e ogni quiz. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare la validità di 5pt

$$\forall x(p(x) \to r(x, a)) \wedge \neg\exists x(q(x) \wedge \neg r(x, b)) \to \forall x(p(x) \vee q(x) \to \exists y\, r(x, y)).$$

(Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg(r \to \neg s)) \vee \neg(t \vee u \to \neg w).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **V** (si può verificare con la tavola di verità, oppure osservare che se q è falsa e $p \vee q$ è vera deve essere vera anche p)
2. **V** (se un'interpretazione soddisfa $A(a)$ allora soddisfa anche $\exists x\ A(x)$)
3. **V** (se $I \models C$, dato che $B \equiv C$, si ha $I \models B$; la validità di $A \vee \neg B$ implica che $I \models A$)
4. β (è una disgiunzione)
5. **4** (nessuna formula ha variabili libere)
6. **V** (è un caso particolare di una delle equivalenze logiche fondamentali studiate, e si può verificare facilmente a mano)
7. **F** (il concetto di tableau costruito con sistematicità viene introdotto appunto per garantire la chiusura di tutti i tableau costruiti a partire da formule insoddisfacibili)
8. **F** (se le prime due formule (che sono γ-formule) appartengono ad un insieme di Hintikka U si deve avere $p(a) \in U$ e $r(a,a) \to \neg p(a) \in U$; allora deve appartenere a U anche almeno una tra $\neg r(a,a)$ e $\neg p(a)$; ma $\neg p(a) \notin U$ per quanto già ottenuto, e quindi deve essere $\neg r(a,a) \in U$: ciò fa sì che non possa essere $r(a,a) \in U$)
9. **F** (si verifica immediatamente usando la definizione di soddisfazione)
10. Sia I un'interpretazione qualsiasi che soddisfa le tre formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo nell'ordine con A_1, A_2 e A_3. Dato che $I \models A_1$ esiste $d_1 \in D^I$ tale che $d_1 \in p^I$. Siccome $I \models A_2$ si ha $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_1]}(p(x) \to \exists y\ r(x,y)) = V$ e quindi $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_1]}(\exists y\ r(x,y)) = V$. Perciò esiste $d_2 \in D^I$ tale che $(d_1, d_2) \in r^I$.

    Supponiamo ora per assurdo che $I \models \forall y\ q(y)$: in particolare dovrebbe essere $d_2 \in q^I$. Visto che $d_1 \in p^I$ e $d_2 \in q^I$ si può sfruttare $I \models A_3$, che in particolare implica che $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}(p(x) \wedge q(y) \to \neg r(x,y)) = V$, per concludere $(d_1, d_2) \notin r^I$, in contraddizione con quanto ottenuto in precedenza. Allora deve essere $I \not\models \forall y\ q(y)$, e quindi $I \models \neg\forall y\ q(y)$, come volevamo.
11. Un'interpretazione che soddisfa la formula è la seguente:
$$D^I = \{0,1,2\}, \qquad p^I = \{0\}, \qquad q^I = \{1\},$$
$$r^I = \{(1,0),(1,1),(1,2),(0,2),(2,2)\}.$$
12. (i) $\exists x(f(x) \wedge \forall y(s(y) \to a(y,x)))$;
    (ii) $\forall x(s(x) \wedge \forall y(f(y) \to a(x,y)) \to \exists y(q(y) \wedge \neg a(x,y)))$;
    (iii) $\neg\exists x(s(x) \wedge \forall y(f(y) \vee q(y) \to a(x,y)))$.

13. Per dimostrare la validità della formula in esame costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano A, B e C rispettivamente le formule $\forall x(p(x) \to r(x,a))$, $\exists x(q(x) \land \neg r(x,b))$ e $\neg \exists y\ r(c,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(A \land \neg B \to \forall x(p(x) \lor q(x) \to \exists y\, r(x,y)))}$$

$$\underline{A \land \neg B}, \neg\forall x(p(x) \lor q(x) \to \exists y\, r(x,y))$$

$$A, \neg B, \underline{\neg\forall x(p(x) \lor q(x) \to \exists y\, r(x,y))}$$

$$A, \neg B, \underline{\neg(p(c) \lor q(c) \to \exists y\, r(c,y))}$$

$$A, \neg B, \underline{p(c) \lor q(c)}, C$$

$$A, \neg B, p(c), C \qquad\qquad A, \neg B, q(c), C$$

Per ragioni di spazio proseguiamo separatamente i due rami. Ecco il ramo di sinistra:

$$\underline{A}, \neg B, p(c), C$$

$$A, \neg B, p(c), C, \underline{p(c) \to r(c,a)}$$

$$A, \neg B, \underline{p(c)}, C, \underline{\neg p(c)} \qquad\qquad A, \neg B, p(c), \underline{C}, r(c,a)$$

$$\otimes \qquad\qquad A, \neg B, p(c), C, \underline{r(c,a)}, \underline{\neg r(c,a)}$$

$$\otimes$$

Ed ecco quello di destra:

$$A, \underline{\neg B}, q(c), C$$

$$A, \neg B, q(c), C, \underline{\neg(q(c) \land \neg r(c,b))}$$

$$A, \neg B, \underline{q(c)}, C, \underline{\neg q(c)} \qquad\qquad A, \neg B, q(c), \underline{C}, r(c,b)$$

$$\otimes \qquad\qquad A, \neg B, q(c), C, \underline{r(c,b)}, \underline{\neg r(c,b)}$$

$$\otimes$$

14.

$$\langle [\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg(r \to \neg s)) \vee \neg(t \vee u \to \neg w)] \rangle$$
$$\langle [\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg(r \to \neg s)), \neg(t \vee u \to \neg w)] \rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \wedge q), \neg(t \vee u \to \neg w)], [r \to \neg s, \neg(t \vee u \to \neg w)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg q, \neg(t \vee u \to \neg w)], [\neg r, \neg s, \neg(t \vee u \to \neg w)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg q, t \vee u], [p, \neg q, w], [\neg r, \neg s, t \vee u], [\neg r, \neg s, w] \rangle$$
$$\langle [p, \neg q, t, u], [p, \neg q, w], [\neg r, \neg s, t, u], [\neg r, \neg s, w] \rangle \, .$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è
$(p \vee \neg q \vee t \vee u) \wedge (p \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee t \vee u) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee w)$.