Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
13 aprile 2005

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $(p \to q) \land (r \to s) \equiv p \land r \to q \land s$. **V** | **F** 1pt

2. $\forall x\, p(x) \lor \exists y\, \neg q(y)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

3. Se $A \models B \lor C$ allora $A \models B$ oppure $A \models C$. **V** | **F** 1pt

4. Se $A \equiv B$ e $A \to C$ è valida allora $\neg C \models \neg B$. **V** | **F** 1pt

5. $\forall x\, \exists y\, r(x, y) \equiv \exists y\, \forall x\, r(x, y)$. **V** | **F** 1pt

6. Se A è una formula proposizionale e un tableau per A è aperto allora A è valida | soddisfacibile | insoddisfacibile | falsificabile 1pt

7. Esiste un insieme di Hintikka U di formule proposizionali tale che $\neg(p \to q) \in U$ e $p \to r \in U$. **V** | **F** 1pt

8. Per essere certi che l'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva termini è necessario agire sempre su una β-formula quando ciò è possibile. **V** | **F** 1pt

9. $\forall x\, \forall z(\exists y\, r(x, y) \to \forall y\, r(y, z))$ è una chiusura universale di $\exists y\, r(x, y) \to \forall y\, r(y, z)$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di formule 4pt

$$\{\forall x\, \exists y\, r(y, x), \exists y\, \forall x\, \neg r(y, x), \forall x\, \neg r(x, x)\}.$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrate che $\{\exists y\, \forall x\, r(x, y), \forall x(r(x, x) \to \neg p(x))\} \models \neg \forall y\, p(y)$. 4pt
(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{a, \ell, r, i, s\}$ un linguaggio dove a, ℓ, r e i sono simboli predicativi unari, e s è un simbolo predicativo binario. Interpretando $a(x)$ come "x è un autore", $\ell(x)$ come "x è un libro", $r(x)$ come "x è ricco", $i(x)$ come "x è interessante", $s(x, y)$ come "x ha scritto y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) qualche autore ricco ha scritto solo libri non interessanti; 3pt

(ii) ogni autore che ha scritto un libro interessante è ricco; 3pt

(iii) ci sono libri non interessanti che non sono stati scritti da nessun autore ricco. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\exists y\, \forall x (p(x) \to \neg r(x, y)) \to \forall x (p(x) \to \exists y\, \neg r(x, y))$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg((p \to q) \vee \neg(r \to \neg s) \to \neg(u \wedge \neg v) \wedge t).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **F** (considerare il caso in cui p è l'unica vera tra le quattro proposizioni atomiche)
2. β
3. **F** (ad esempio siano $A = p$, $B = q$, $C = \neg q$)
4. **V** (nelle interpretazioni in cui $\neg C$ è soddisfatta non può esserlo A e quindi neppure B)
5. **F** (non vale la conseguenza logica da sinistra a destra)
6. soddisfacibile
7. **V** (ad esempio $U = \{\neg(p \to q), p \to r, p, \neg q, r\}$)
8. **F** (agire sulle β-formule quando possibile è utile per terminare l'algoritmo in tempi più brevi, ma non è necessario per assicurarne la terminazione)
9. **V**
10. Un'interpretazione che soddisfa le tre formule è la seguente: $D^I = \{0, 1, 2\}$, $r^I = \{(1, 0), (2, 1), (1, 2)\}$.
11. Supponiamo che I sia un'interpretazione che rende vere le formule a sinistra di $\models$. Esiste $d_0 \in D^I$ tale che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[y \leftarrow d_0]}(\forall x\ r(x, y)) = V$. In particolare abbiamo che $(d_0, d_0) \in r^I$.

Visto che $I \models \forall x(r(x, x) \to \neg p(x))$ si ha $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0]}(r(x, x) \to \neg p(x)) = V$ e quindi $d_0 \notin p^I$.

Abbiamo dunque trovato un controesempio a $I \models \forall y\ p(y)$ e abbiamo dimostrato che $I \models \neg\forall y\ p(y)$, come volevamo.

12. (i) $\exists x(a(x) \land r(x) \land \forall y(\ell(y) \land s(x, y) \to \neg i(y)))$;
(ii) $\forall x(a(x) \land \exists y(\ell(y) \land s(x, y) \land i(y)) \to r(x))$;
(iii) $\exists x(\ell(x) \land \neg i(x) \land \neg\exists y(a(y) \land r(y) \land s(y, x)))$.

13. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con A la formula $\forall x(p(x) \to \neg r(x,a))$ e con B la formula $\neg\exists y\, \neg r(b,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(\exists y\, \forall x(p(x) \to \neg r(x,y)) \to \forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y)))}$$

$$\underline{\exists y\, \forall x(p(x) \to \neg r(x,y))}, \neg\forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y))$$

$$A, \underline{\neg\forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y))}$$

$$\underline{A}, \neg(p(b) \to \exists y\, \neg r(b,y))$$

$$A, p(b) \to \neg r(b,a), \underline{\neg(p(b) \to \exists y\, \neg r(b,y))}$$

$$A, p(b) \to \neg r(b,a), p(b), \underline{B}$$

$$A, \underline{p(b) \to \neg r(b,a)}, p(b), B, r(b,a)$$

$$A, \underline{\neg p(b)}, \underline{p(b)}, B, r(b,a) \qquad\qquad A, \underline{\neg r(b,a)}, p(b), B, \underline{r(b,a)}$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

Il tableau chiuso mostra che la formula di partenza è valida.

14.

$$\langle[\neg((p \to q) \vee \neg(r \to \neg s) \to \neg(u \wedge \neg v) \wedge t)]\rangle$$
$$\langle[(p \to q) \vee \neg(r \to \neg s)], [\neg(\neg(u \wedge \neg v) \wedge t)]\rangle$$
$$\langle[p \to q, \neg(r \to \neg s)], [u \wedge \neg v, \neg t]\rangle$$
$$\langle[\neg p, q, \neg(r \to \neg s)], [u, \neg t], [\neg v, \neg t]\rangle$$
$$\langle[\neg p, q, r], [\neg p, q, s], [u, \neg t], [\neg v, \neg t]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee s) \wedge (u \vee \neg t) \wedge (\neg v \vee \neg t).$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
13 aprile 2005

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. Se $A \wedge B \models C$ allora $A \models C$ oppure $B \models C$. | **V** | **F** | 1pt

2. $(p \to q) \vee (r \to s) \equiv p \vee r \to q \vee s$. | **V** | **F** | 1pt

3. Per essere certi che l'algoritmo di Fitting per la forma normale disgiuntiva termini è necessario agire sempre su una α-formula quando ciò è possibile. | **V** | **F** | 1pt

4. $\exists x\, p(x) \wedge \forall y\, \neg q(y)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? | α | β | γ | δ | 1pt

5. Se $A \equiv B$ e $\neg C \to \neg A$ è valida allora $B \models C$. | **V** | **F** | 1pt

6. $\exists x\, \forall y\, r(x, y) \equiv \forall y\, \exists x\, r(x, y)$. | **V** | **F** | 1pt

7. $\forall x\, \forall y(\forall z\, r(x, z) \to \exists z\, r(z, y))$ è una chiusura universale di $\forall z\, r(x, z) \to \exists z\, r(z, y)$. | **V** | **F** | 1pt

8. Se A è una formula proposizionale e un tableau per A è chiuso allora A è | valida | soddisfacibile | insoddisfacibile | falsificabile | 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka U di formule proposizionali tale che $p \to q \in U$ e $\neg(p \to r) \in U$. | **V** | **F** | 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di formule 4pt

$$\{\forall x\, \exists y\, r(x, y), \exists y\, \forall x\, \neg r(x, y), \forall x\, \neg r(x, x)\}.$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrate che $\{\exists y\, \forall x\, r(y, x), \forall x(r(x, x) \to p(x))\} \models \neg\forall y\, \neg p(y)$. 4pt

(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{c, f, s, i, g\}$ un linguaggio dove c, f, s e i sono simboli predicativi unari, e g è un simbolo predicativo binario. Interpretando $c(x)$ come "x è un calciatore", $f(x)$ come "x è famoso", $s(x)$ come "x è una squadra", $i(x)$ come "x è importante", $g(x, y)$ come "x ha giocato in y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) ci sono squadre non importanti in cui non ha giocato nessun calciatore famoso; 3pt

(ii) qualche calciatore famoso ha giocato solo in squadre non importanti; 3pt

(iii) ogni calciatore che ha giocato in una squadra importante è famoso. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\exists x\, \forall y(p(y) \to r(x, y)) \to \forall y(p(y) \to \exists x\, r(x, y))$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg(\neg(p \to q) \wedge (\neg r \to s)) \to \neg(u \vee \neg(\neg t \vee v)).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **F** (ad esempio siano $A = p$, $B = \neg p$, $C = q$)
2. **F** (considerare il caso in cui p è l'unica vera tra le quattro proposizioni atomiche)
3. **F** (agire sulle α-formule quando possibile è utile per terminare l'algoritmo in tempi più brevi, ma non è necessario per assicurarne la terminazione)
4. α
5. **V** (nelle interpretazioni in cui B è soddisfatta lo è anche A e quindi non può esserlo $\neg C$)
6. **F** (non vale la conseguenza logica da destra a sinistra)
7. **V**
8. insoddisfacibile
9. **V** (ad esempio $U = \{p \to q, \neg(p \to r), q, p, \neg r\}$)
10. Un'interpretazione che soddisfa le tre formule è la seguente: $D^I = \{0, 1, 2\}$, $r^I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.
11. Supponiamo che I sia un'interpretazione che rende vere le formule a sinistra di $\models$. Esiste $d_0 \in D^I$ tale che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[y \leftarrow d_0]}(\forall x\ r(y, x)) = V$. In particolare abbiamo che $(d_0, d_0) \in r^I$.

    Visto che $I \models \forall x(r(x, x) \to p(x))$ si ha $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0]}(r(x, x) \to p(x)) = V$ e quindi $d_0 \in p^I$.

    Abbiamo dunque trovato un controesempio a $I \models \forall y\ \neg p(y)$ e abbiamo dimostrato che $I \models \neg\forall y\ \neg p(y)$, come volevamo.
12. (i) $\exists x(s(x) \wedge \neg i(x) \wedge \neg\exists y(c(y) \wedge f(y) \wedge g(y, x)))$;

    (ii) $\exists x(c(x) \wedge f(x) \wedge \forall y(s(y) \wedge g(x, y) \to \neg i(y)))$;

    (iii) $\forall x(c(x) \wedge \exists y(s(y) \wedge g(x, y) \wedge i(y)) \to f(x))$.

13. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con A la formula $\forall y(p(y) \to r(a,y))$ e con B la formula $\neg\exists x\, r(x,b)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(\exists x\, \forall y(p(y) \to r(x,y)) \to \forall y(p(y) \to \exists x\, r(x,y)))}$$

$$\underline{\exists x\, \forall y(p(y) \to r(x,y))}, \neg\forall y(p(y) \to \exists x\, r(x,y))$$

$$A, \underline{\neg\forall y(p(y) \to \exists x\, r(x,y))}$$

$$\underline{A}, \neg(p(b) \to \exists x\, r(x,b))$$

$$A, p(b) \to r(a,b), \underline{\neg(p(b) \to \exists x\, r(x,b))}$$

$$A, p(b) \to r(a,b), p(b), \underline{B}$$

$$A, \underline{p(b) \to r(a,b)}, p(b), B, \neg r(a,b)$$

$$A, \underline{\neg p(b)}, \underline{p(b)}, B, \neg r(a,b) \qquad\qquad A, \underline{r(a,b)}, p(b), B, \underline{\neg r(a,b)}$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

Il tableau chiuso mostra che la formula di partenza è valida.

14.

$$[\langle \neg(\neg(p \to q) \land (\neg r \to s)) \to \neg(u \lor \neg(\neg t \lor v)) \rangle]$$
$$[\langle (\neg(p \to q) \land (\neg r \to s)) \rangle, \langle \neg(u \lor \neg(\neg t \lor v)) \rangle]$$
$$[\langle \neg(p \to q), \neg r \to s \rangle, \langle \neg u, \neg t \lor v \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, \neg r \to s \rangle, \langle \neg u, \neg t \rangle, \langle \neg u, v \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, r \rangle, \langle p, \neg q, s \rangle, \langle \neg u, \neg t \rangle, \langle \neg u, v \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \land \neg q \land r) \lor (p \land \neg q \land s) \lor (\neg u \land \neg t) \lor (\neg u \land v).$$