Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 luglio 2005

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. Se A è soddisfacibile allora $A \vee B$ è soddisfacibile per ogni formula B. **V** **F** 1pt

2. $(p \to q \wedge \neg p) \wedge (q \to p)$ è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

3. $\neg\forall x(p(x) \to \exists y(p(y) \wedge r(x,y)))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α β γ δ 1pt

4. Applicando il metodo dei tableau ad una formula proposizionale soddisfacibile qualche volta si ottiene un tableau chiuso. **V** **F** 1pt

5. Se $A \to B$ è insoddisfacibile allora B è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

6. $\exists x\, p(x) \to q(a) \equiv \forall x(p(x) \to q(a))$. **V** **F** 1pt

7. $p(a) \to \exists x\, \neg p(x)$ è falsificabile. **V** **F** 1pt

8. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0,1,2\}$ con $p^I = \{0\}$, $r^I = \{(1,0),(1,1),(1,2)\}$ allora $I \models \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, \forall y\, r(x,y)$. **V** **F** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka di formule proposizionali U tale che $p \to q \in U$, $\neg q \vee r \in U$ e $\neg(r \wedge \neg p) \in U$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrate che 4pt

$$\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x,y)) \not\models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(x) \vee p(y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrate che la formula 4pt

$$\forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(x) \wedge r(y,x)) \to \forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(y))$$

è valida.

(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{a, b, o, v, c\}$ un linguaggio dove a e b sono simboli di costante, o è un simbolo predicativo unario, e v e c sono simboli predicativi binari. Interpretando a come "Antonio", b come "Beatrice", $o(x)$ come "x è un ortaggio", $v(x, y)$ come "x è un vicino di y", e $c(x, y)$ come "x cresce nell'orto di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) se un ortaggio non cresce nell'orto di Antonio allora cresce nell'orto di Beatrice; 3pt

(ii) qualche ortaggio che cresce nell'orto di tutti i vicini di Antonio non cresce nell'orto di Beatrice; 3pt

(iii) gli ortaggi che crescono nell'orto di Antonio o in quello di Beatrice crescono anche nell'orto di qualche vicino di Beatrice o di Antonio. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che 5pt

$$\forall x\, \forall y\, (r(x, y) \rightarrow p(x) \vee \neg r(y, y)) \models \forall x (r(x, x) \rightarrow p(x)).$$

(Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(q \rightarrow p) \vee \neg((r \rightarrow \neg s \wedge (t \vee \neg u)) \vee w).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **V**
2. **F** ($v(p) = v(q) = \mathbf{F}$ soddisfa la formula)
3. δ
4. **F** (immediato dalla correttezza del metodo dei tableau)
5. **V** ($A \to B$ insoddisfacibile significa che in ogni interpretazione A è vera e B è falsa)
6. **V** (è un caso particolare di una delle equivalenze logiche fondamentali studiate)
7. **V** ($D^I = \{0\}$, $a^I = 0$, $p^I = \{0\}$ falsifica la formula)
8. **V** (si verifica immediatamente usando la definizione di soddisfazione)
9. **V** (ad esempio $U = \{p \to q, \neg q \vee r, \neg(r \wedge \neg p), \neg p, \neg q, \neg r\}$ è un insieme di Hintikka)
10. Un'interpretazione che soddisfa la prima formula ma non la seconda è la seguente:

$$D^I = \{0,1\}, \quad p^I = \{0\}, \quad r^I = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}.$$

11. Sia I un'interpretazione qualsiasi. Se $I \not\models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(x) \wedge r(y,x))$ allora I soddisfa la formula in esame. Quindi possiamo supporre

(*) $$I \models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(x) \wedge r(y,x))$$

e dimostrare che $I \models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(y))$. Per questo scopo siano $d_0, d_1 \in D^I$ qualsiasi: vogliamo mostrare che $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(x,y) \to p(y)) = V$.

Se $(d_0, d_1) \notin r^I$ allora $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(x,y) \to p(y)) = V$ è immediato. Perciò possiamo supporre che

(**) $$(d_0, d_1) \in r^I$$

e il nostro obiettivo è verificare che $d_1 \in p^I$. A questo scopo sfruttiamo (*), che implica $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(x,y) \to p(x) \wedge r(y,x)) = V$ e quindi per (**) $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(p(x) \wedge r(y,x)) = V$. In particolare vale

(***) $$(d_1, d_0) \in r^I.$$

Utilizzando di nuovo (*) abbiamo $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(r(x,y) \to p(x) \wedge r(y,x)) = V$ e quindi per (***) $v_{\sigma_\mathcal{I}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(p(x) \wedge r(y,x)) = V$. In particolare $d_1 \in p^I$, come volevamo.

12. (i) $\forall x(o(x) \wedge \neg c(x,a) \to c(x,b))$;
(ii) $\exists x(o(x) \wedge \forall y(v(y,a) \to c(x,y)) \wedge \neg c(x,b))$;
(iii) $\forall x(o(x) \wedge (c(x,a) \vee c(x,b)) \to \exists y((v(y,b) \vee v(y,a)) \wedge c(x,y)))$.

13. Siano A e B rispettivamente le formule $\forall x\ \forall y\ (r(x,y) \to p(x) \vee \neg r(y,y))$ e $\forall x(r(x,x) \to p(x))$. Ricordiamo che $A \models B$ è equivalente alla validità di $A \to B$. Dimostreremo quest'ultima costruendo un tableau chiuso per $\neg(A \to B)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(A \to B)}$$

$$A, \underline{\neg B}$$

$$A, \underline{\neg(r(a,a) \to p(a))}$$

$$\underline{A}, r(a,a), \neg p(a)$$

$$A, \underline{r(a,a) \to p(a) \vee \neg r(a,a)}, r(a,a), \neg p(a)$$

$$A, \underline{\neg r(a,a)}, \underline{r(a,a)}, \neg p(a) \qquad\qquad A, \underline{p(a) \vee \neg r(a,a)}, r(a,a), \neg p(a)$$

$$\otimes$$

$$A, \underline{p(a)}, r(a,a), \underline{\neg p(a)} \qquad\qquad A, \underline{\neg r(a,a)}, \underline{r(a,a)}, \neg p(a)$$

$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

14.

$$\langle [(q \to p) \vee \neg((r \to \neg s \wedge (t \vee \neg u)) \vee w)] \rangle$$
$$\langle [q \to p, \neg((r \to \neg s \wedge (t \vee \neg u)) \vee w)] \rangle$$
$$\langle [\neg q, p, \neg((r \to \neg s \wedge (t \vee \neg u)) \vee w)] \rangle$$
$$\langle [\neg q, p, \neg(r \to \neg s \wedge (t \vee \neg u))], [\neg q, p, \neg w] \rangle$$
$$\langle [\neg q, p, r], [\neg q, p, \neg(\neg s \wedge (t \vee \neg u))], [\neg q, p, \neg w] \rangle$$
$$\langle [\neg q, p, r], [\neg q, p, s, \neg(t \vee \neg u)], [\neg q, p, \neg w] \rangle$$
$$\langle [\neg q, p, r], [\neg q, p, s, \neg t], [\neg q, p, s, u], [\neg q, p, \neg w] \rangle\,.$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee p \vee s \vee u) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg w)$.

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 luglio 2005

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. Se A è insoddisfacibile allora $A \wedge B$ è insoddisfacibile per ogni formula B. **V** | **F** 1pt

2. $(p \to q) \wedge (q \to \neg p \wedge \neg q)$ è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. $\neg \exists x (p(x) \wedge \forall y (q(y) \to r(x, y)))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

4. Applicando il metodo dei tableau ad una formula proposizionale insoddisfacibile qualche volta si ottiene un tableau aperto. **V** | **F** 1pt

5. Se $A \to B$ è insoddisfacibile allora A è valida. **V** | **F** 1pt

6. $\forall x\, p(x) \to q(a) \equiv \forall x (p(x) \to q(a))$. **V** | **F** 1pt

7. $p(a) \wedge \exists x\, \neg p(x)$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

8. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0, 1, 2\}$ con $p^I = \{0, 1\}$, $r^I = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ allora $I \models \exists x\, \neg p(x) \wedge \exists x\, \forall y\, r(x, y)$. **V** | **F** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka di formule proposizionali U tale che $p \vee \neg q \in U$, $r \to q \in U$ e $\neg (p \wedge \neg r) \in U$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Dimostrate che 4pt

$$\exists x (\forall y\, r(y, x) \wedge \neg q(x)) \not\models \forall x\, \forall y (r(x, y) \to \neg q(x) \vee \neg q(y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrate che la formula 4pt

$$\forall x\, \forall y (r(x, y) \to r(y, x) \wedge \neg q(y)) \to \forall x\, \forall y (r(x, y) \to \neg q(x))$$

è valida.

(Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{c, d, e, s, a\}$ un linguaggio dove c e d sono simboli di costante, e è un simbolo predicativo unario, e s e a sono simboli predicativi binari. Interpretando c come "Chiara", d come "Dario", $e(x)$ come "x è un esame", $s(x, y)$ come "x ha superato y", e $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) se un esame non è stato superato da Dario allora è stato superato da Chiara; 3pt

(ii) qualche esame superato da tutti gli amici di Dario non è stato superato da Chiara; 3pt

(iii) gli esami superati da Chiara o da Dario sono stati superati anche da qualche amico di Dario o di Chiara. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che 5pt

$$\forall x\, \forall y\, (\neg p(x, y) \rightarrow q(y) \vee p(x, x)) \models \forall x(\neg p(x, x) \rightarrow q(x)).$$

(Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg(p \vee (q \rightarrow (\neg s \vee r) \wedge \neg t)) \vee (w \rightarrow \neg u).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **V**
2. **V** ($v(p) = v(q) = \mathbf{F}$ soddisfa la formula)
3. γ
4. **F** (immediato dalla completezza del metodo dei tableau)
5. **V** ($A \to B$ insoddisfacibile significa che in ogni interpretazione A è vera e B è falsa)
6. **F** (si ha invece $\exists x\, p(x) \to q(a) \equiv \forall x(p(x) \to q(a))$)
7. **F** ($D^I = \{0,1\}$, $a^I = 0$, $p^I = \{0\}$ soddisfa la formula)
8. **V** (si verifica immediatamente usando la definizione di soddisfazione)
9. **V** (ad esempio $U = \{p \vee \neg q, r \to q, \neg(p \wedge \neg r), \neg q, \neg r, \neg p\}$ è un insieme di Hintikka)
10. Un'interpretazione che soddisfa la prima formula ma non la seconda è la seguente:

$$D^I = \{0,1\}, \quad q^I = \{1\}, \quad r^I = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}.$$

11. Sia I un'interpretazione qualsiasi. Se $I \not\models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to r(y,x) \wedge \neg q(y))$ allora I soddisfa la formula in esame. Quindi possiamo supporre

$$(*) \qquad I \models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to r(y,x) \wedge \neg q(y))$$

e dimostrare che $I \models \forall x\, \forall y(r(x,y) \to \neg q(x))$. Per questo scopo siano $d_0, d_1 \in D^I$ qualsiasi: vogliamo mostrare che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(x,y) \to \neg q(x)) = V$.

Se $(d_0, d_1) \notin r^I$ allora $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(x,y) \to \neg q(x)) = V$ è immediato. Perciò possiamo supporre che

$$(**) \qquad (d_0, d_1) \in r^I$$

e il nostro obiettivo è verificare che $d_0 \notin q^I$. A questo scopo sfruttiamo (*), che implica $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(x,y) \to r(y,x) \wedge \neg q(y)) = V$ e quindi per (**) $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(r(y,x) \wedge \neg q(y)) = V$. In particolare vale

$$(***) \qquad (d_1, d_0) \in r^I.$$

Utilizzando (*) abbiamo $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(r(x,y) \to r(y,x) \wedge \neg q(y)) = V$ e per (***) $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(r(y,x) \wedge \neg q(y)) = V$: in particolare $d_0 \notin q^I$.

12. (i) $\forall x(e(x) \wedge \neg s(d,x) \to s(c,x))$;
(ii) $\exists x(e(x) \wedge \forall y(a(y,d) \to s(y,x)) \wedge \neg s(c,x))$;
(iii) $\forall x(e(x) \wedge (s(c,x) \vee s(d,x)) \to \exists y((a(y,d) \vee a(y,c)) \wedge s(y,x)))$.

13. Siano A e B rispettivamente le formule $\forall x\ \forall y\ (\neg p(x,y) \to q(y) \lor p(x,x))$ e $\forall x(\neg p(x,x) \to q(x))$. Ricordiamo che $A \models B$ è equivalente alla validità di $A \to B$. Dimostreremo quest'ultima costruendo un tableau chiuso per $\neg(A \to B)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(A \to B)}$$

$$A, \underline{\neg B}$$

$$A, \underline{\neg(\neg p(a,a) \to q(a))}$$

$$\underline{A}, \neg p(a,a), \neg q(a)$$

$$A, \underline{\neg p(a,a) \to q(a) \lor p(a,a)}, \neg p(a,a), \neg q(a)$$

$$A, \underline{p(a,a)}, \underline{\neg p(a,a)}, \neg q(a) \qquad\qquad A, \underline{q(a) \lor p(a,a)}, \neg p(a,a), \neg q(a)$$

$$\otimes$$

$$A, \underline{q(a)}, \neg p(a,a), \underline{\neg q(a)} \qquad\qquad A, \underline{p(a,a)}, \underline{\neg p(a,a)}, \neg q(a)$$

$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

14.

$$\langle [\neg(p \lor (q \to (\neg s \lor r) \land \neg t)) \lor (w \to \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \lor (q \to (\neg s \lor r) \land \neg t)), w \to \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \lor (q \to (\neg s \lor r) \land \neg t)), \neg w, \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg w, \neg u], [\neg(q \to (\neg s \lor r) \land \neg t), \neg w, \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg w, \neg u], [q, \neg w, \neg u], [\neg((\neg s \lor r) \land \neg t), \neg w, \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg w, \neg u], [q, \neg w, \neg u], [\neg(\neg s \lor r), t, \neg w, \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg w, \neg u], [q, \neg w, \neg u], [s, t, \neg w, \neg u], [\neg r, t, \neg w, \neg u] \rangle\,.$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \lor \neg w \lor \neg u) \land (q \lor \neg w \lor \neg u) \land (s \lor t \lor \neg w \lor \neg u) \land (\neg r \lor t \lor \neg w \lor \neg u).$$