Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
3 dicembre 2004

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1.	Se U è un insieme di Hintikka di formule predicative tale che $\forall x(r(a,x) \to p(x)) \in U$ e $\neg p(a) \in U$, allora $r(a,a) \notin U$.	**V** | **F**	1pt
2.	$\neg(p \to q \wedge r)$ è una α-formula o una β-formula?	α | β	1pt
	Quanti dei suoi ridotti sono α-formule?	0 | 1 | 2	
3.	$\neg(p \to q \wedge p) \equiv q \to p$.	**V** | **F**	1pt
4.	Su alcune formule l'esecuzione dell'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva non termina mai.	**V** | **F**	1pt
5.	Se $A \models B$ e $B \models \neg C$ allora $A \models \neg C$.	**V** | **F**	1pt
6.	Se $A \models B$ e $B \not\models C$ allora $A \not\models C$.	**V** | **F**	1pt
7.	Se A è una α-formula valida allora tutti i suoi ridotti sono validi.	**V** | **F**	1pt
8.	$\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x) \models \exists x(A(x) \wedge B(x))$.	**V** | **F**	1pt
9.	Se I è l'interpretazione di dominio $\{0,1,2\}$ con $r^I = \{(0,1),(0,2),(1,2),(1,0)\}$ allora $I \models \forall x\, \exists y\, r(x,y)$.	**V** | **F**	1pt

SECONDA PARTE

10. La conseguenza logica — 4pt

$$\{\neg\forall x\, p(x), \exists x\, q(x), \forall x\, \forall y(\neg p(x) \wedge q(y) \to \neg r(y,x))\} \models \exists x\, \exists y\, \neg r(y,x)$$

è corretta? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

11. La formula — 4pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x,y) \wedge \neg r(a,a) \to r(a,b)$$

è valida? Giustificate la vostra risposta. (Utilizzate il retro del foglio)

12. Sia $\{O, m, p, v, g\}$ un linguaggio dove O è un simbolo di costante, m e p sono simboli predicativi unari, e v e g sono simboli predicativi binari. Interpretando O come "oceano", $m(x)$ come "x è un mammifero", $p(x)$ come "x è un pesce", $v(x, y)$ come "x vive in y", $g(x, y)$ come "x è più grande di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) qualche mammifero che vive nell'oceano è più grande di tutti i mammiferi che non vivono nell'oceano; 3pt

(ii) ogni mammifero che vive nell'oceano è più grande di tutti i pesci; 3pt

(iii) dovunque viva qualche pesce vive anche qualche mammifero. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\forall x(p(x) \to \forall y\, r(x, y)) \land \forall x\, \forall y(r(x, y) \to \neg r(y, x)) \to \forall x\, \neg p(x)$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \to q) \to (r \land s \to \neg(t \lor \neg u)).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

Prima Parte: **V** α 0 **F F V F V F F**

10. La conseguenza logica è corretta. Per dimostrarlo supponiamo che I sia un'interpretazione che rende vero l'insieme delle tre formule che compare a sinistra di $\models$.

Dato che $I \models \exists x\, q(x)$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in q^I$. Dato che $I \models \neg\forall x\, p(x)$ esiste $d_1 \in D^I$ tale che $d_1 \notin p^I$.

A partire da $I \models \forall x\ \forall y(\neg p(x) \wedge q(y) \rightarrow \neg r(y,x))$ si ottiene che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(\neg p(x) \wedge q(y) \rightarrow \neg r(y,x)) = V$.

Quanto ottenuto sopra implica che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(\neg p(x) \wedge q(y)) = V$, e quindi dobbiamo avere pure $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_0]}(\neg r(y,x)) = V$.

Perciò $I \models \exists x\, \exists y\, \neg r(y,x)$, che era quanto dovevamo ottenere.

11. Un'interpretazione che non soddisfa la formula sotto esame è la seguente: $D^I = \{0,1,2\}$, $a^I = 0$, $b^I = 1$, $r^I = \{(0,2),(1,1),(2,1)\}$. Quindi la formula non è valida.

12. (i) $\exists x(m(x) \wedge v(x,O) \wedge \forall y(m(y) \wedge \neg v(y,O) \rightarrow g(x,y)))$;

(ii) $\forall x(m(x) \wedge v(x,O) \rightarrow \forall y(p(y) \rightarrow g(x,y)))$;

(iii) $\forall x(\exists y(p(y) \wedge v(y,x)) \rightarrow \exists y(m(y) \wedge v(y,x)))$.

13. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice.

Indichiamo con A la formula $\forall x(p(x) \rightarrow \forall y\, r(x,y))$, con B la formula $\forall x\, \forall y(r(x,y) \rightarrow \neg r(y,x))$ e con C la formula $\forall y\, r(a,y)$.

$$\neg(A \wedge B \rightarrow \forall x\, \neg p(x))$$
$$A \wedge B, \neg\forall x\, \neg p(x)$$
$$A, B, \neg\forall x\, \neg p(x)$$
$$A, B, p(a)$$
$$A, B, p(a), p(a) \rightarrow C$$
$$\begin{array}{cc} A, B, p(a), \neg p(a) & A, B, p(a), C \\ \otimes & \end{array}$$
$$A, B, p(a), C, r(a,a)$$
$$A, B, p(a), C, r(a,a), r(a,a) \rightarrow \neg r(a,a)$$
$$\begin{array}{cc} A, B, p(a), C, r(a,a), \neg r(a,a) & A, B, p(a), C, r(a,a), \neg r(a,a) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Il tableau mostra che la formula di partenza è valida.

14.

$$\langle[(\neg p \to q) \to (r \wedge s \to \neg(t \vee \neg u))]\rangle$$
$$\langle[\neg(\neg p \to q), (r \wedge s \to \neg(t \vee \neg u))]\rangle$$
$$\langle[\neg(\neg p \to q), \neg(r \wedge s), \neg(t \vee \neg u)]\rangle$$
$$\langle[\neg(\neg p \to q), \neg r, \neg s, \neg(t \vee \neg u)]\rangle$$
$$\langle[\neg p, \neg r, \neg s, \neg(t \vee \neg u)], [\neg q, \neg r, \neg s, \neg(t \vee \neg u)]\rangle$$
$$\langle[\neg p, \neg r, \neg s, \neg t], [\neg p, \neg r, \neg s, u], [\neg q, \neg r, \neg s, \neg t], [\neg q, \neg r, \neg s, u]\rangle$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
3 dicembre 2004

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. Se U è un insieme di Hintikka di formule predicative tale che $p(a) \to \forall x\, \neg q(x) \in U$ e $p(a) \in U$, allora $q(a) \in U$. **V** **F** 1pt

2. $\neg(p \land q \to r)$ è una α-formula o una β-formula? α β 1pt

Quanti dei suoi ridotti sono α-formule? 0 1 2

3. $p \to q \equiv \neg(q \to q \land p)$. **V** **F** 1pt

4. Su alcune formule l'esecuzione dell'algoritmo di Fitting per la forma normale disgiuntiva non termina mai. **V** **F** 1pt

5. Se $A \models B$ e $B \not\models C$ allora $A \not\models C$. **V** **F** 1pt

6. Se $A \models \neg B$ e $\neg B \models C$ allora $A \models C$. **V** **F** 1pt

7. $\forall x(A(x) \lor B(x)) \models \forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x)$. **V** **F** 1pt

8. Se A è una β-formula insoddisfacibile allora tutti i suoi ridotti sono insoddisfacibili. **V** **F** 1pt

9. Se I è l'interpretazione di dominio $\{0, 1, 2\}$ con $r^I = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 0)\}$ allora $I \models \forall x\, \exists y\, r(y, x)$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. La formula 4pt

$$\forall x\, \exists y\, r(y, x) \land \neg r(b, a) \to r(a, a)$$

è valida? Giustificate la vostra risposta. (Utilizzate il retro del foglio)

11. La conseguenza logica 4pt

$$\big\{\exists x\, p(x), \neg\forall x\, q(x), \forall x\, \forall y(p(x) \land \neg q(y) \to \neg r(x, y))\big\} \models \exists x\, \exists y\, \neg r(x, y)$$

è corretta? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

12. Sia $\{A, r, i, v, p\}$ un linguaggio dove A è un simbolo di costante, r e i sono simboli predicativi unari, e v e p sono simboli predicativi binari. Interpretando A come "Africa", $r(x)$ come "x è un ragno", $i(x)$ come "x è un insetto", $v(x, y)$ come "x vive in y", $p(x, y)$ come "x è più piccolo di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) qualche ragno che non vive in Africa è più piccolo di tutti i ragni che vivono in Africa; 3pt

(ii) ogni insetto che vive in Africa è più piccolo di tutti i ragni; 3pt

(iii) dovunque viva qualche insetto vive anche qualche ragno. 3pt

13. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\forall x(\neg p(x) \rightarrow \forall y\, \neg r(y, x)) \wedge \forall x\, \forall y(\neg r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \rightarrow \forall x\, p(x)$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

14. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \wedge \neg s) \rightarrow \neg(\neg t \vee u).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

Prima Parte: **F** α 1 **F F F V F V V**

10. Un'interpretazione che non soddisfa la formula sotto esame è la seguente: $D^I = \{0,1,2\}$, $a^I = 0$, $b^I = 1$, $r^I = \{(2,0),(1,1),(2,2)\}$. Quindi la formula non è valida.

11. La conseguenza logica è corretta. Per dimostrarlo supponiamo che I sia un'interpretazione che rende vero l'insieme delle tre formule che compare a sinistra di $\models$.

Dato che $I \models \exists x\, p(x)$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$. Dato che $I \models \neg\forall x\, q(x)$ esiste $d_1 \in D^I$ tale che $d_1 \notin q^I$.

A partire da $I \models \forall x\ \forall y(p(x) \land \neg q(y) \to \neg r(x,y))$ si ottiene che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(p(x) \land \neg q(y) \to \neg r(x,y)) = V$.

Quanto ottenuto sopra implica che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(p(x) \land \neg q(y)) = V$, e quindi dobbiamo avere pure $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0][y \leftarrow d_1]}(\neg r(x,y)) = V$.

Perciò $I \models \exists x\, \exists y\, \neg r(x,y)$, che era quanto dovevamo ottenere.

12. (i) $\exists x(r(x) \land \neg v(x,A) \land \forall y(r(y) \land v(y,A) \to p(x,y)))$;
(ii) $\forall x(i(x) \land v(x,A) \to \forall y(r(y) \to p(x,y)))$;
(iii) $\forall x(\exists y(i(y) \land v(y,x)) \to \exists y(r(y) \land v(y,x)))$.

13. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice.

Indichiamo con A la formula $\forall x(\neg p(x) \to \forall y\, \neg r(y,x))$, con B la formula $\forall x\, \forall y(\neg r(x,y) \to r(y,x))$ e con C la formula $\forall y\, \neg r(y,a)$.

$$
\begin{array}{c}
\neg(A \land B \to \forall x\, p(x)) \\
| \\
A \land B, \neg\forall x\, p(x) \\
| \\
A, B, \neg\forall x\, p(x) \\
| \\
A, B, \neg p(a) \\
| \\
A, B, \neg p(a), \neg p(a) \to C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
A, B, \neg p(a), p(a) & A, B, \neg p(a), C \\
\otimes & | \\
 & A, B, \neg p(a), C, \neg r(a,a) \\
 & | \\
 & A, B, \neg p(a), C, \neg r(a,a), \neg r(a,a) \to r(a,a)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
A, B, \neg p(a), C, \neg r(a,a), r(a,a) & A, B, \neg p(a), C, \neg r(a,a), r(a,a) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

Il tableau mostra che la formula di partenza è valida.

14.

$$\langle[(p \to q) \wedge (r \wedge \neg s) \to \neg(\neg t \vee u)]\rangle$$
$$\langle[\neg((p \to q) \wedge (r \wedge \neg s)), \neg(\neg t \vee u)]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to q), \neg(r \wedge \neg s), \neg(\neg t \vee u)]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to q), \neg r, s, \neg(\neg t \vee u)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg r, s, \neg(\neg t \vee u)], [\neg q, \neg r, s, \neg(\neg t \vee u)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg r, s, t], [p, \neg r, s, \neg u], [\neg q, \neg r, s, t], [\neg q, \neg r, s, \neg u]\rangle$$