Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 dicembre 2004

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $p \to q \vee r \equiv \neg r \wedge \neg q \to \neg p$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

2. La formula $\neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (p \vee r)$ è in forma normale congiuntiva. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

3. $\forall x\ p(x) \to q(a)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? $\boxed{\alpha}\boxed{\beta}\boxed{\gamma}\boxed{\delta}$ 1pt

4. Se $A \models B$ e A è insoddisfacibile allora B è insoddisfacibile. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

5. Se $A \models B$ e A è valida allora B è valida. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

6. $\exists x(A(x) \to B(x)) \equiv \forall x\ A(x) \to \exists x\ B(x)$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

7. Considerate le seguenti quattro formule:
$\neg q(x), p(a), \forall x\ p(x) \to q(x), \forall x\ \exists y(r(x,y) \wedge \neg p(x) \wedge q(y))$.
Quante sono formule chiuse? $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ 1pt
Quante sono letterali? $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka U di formule proposizionali tale che $\neg(p \vee q) \in U$ e $\neg(p \to r) \in U$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

SECONDA PARTE

9. Siano A e B le formule $\forall x(r(a,x) \wedge \exists y\ r(x,y))$ e $\forall x\ r(x,x)$. Dimostrate che $A \not\models B$ e che $B \not\models A$. (Utilizzate il retro del foglio) 4pt

10. Sia A la formula utilizzata nell'esercizio precedente e sia C la formula $\forall x\ \exists y(r(a,y) \wedge r(x,y))$. Dimostrate che $A \models C$. (Utilizzate il retro del foglio) 4pt

11. Sia $\{a, m, c, v\}$ un linguaggio dove a, m e c sono simboli predicativi unari, e v è un simbolo predicativo binario. Interpretando $a(x)$ come "x è un avvocato", $m(x)$ come "x sa fare il suo mestiere", $c(x)$ come "x è una causa", $v(x, y)$ come "x vince y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) ogni avvocato che sa fare il suo mestiere vince qualche causa; 3pt

(ii) qualche avvocato vince una causa anche se non sa fare il suo mestiere; 3pt

(iii) un avvocato che vince tutte le cause sa certamente fare il suo mestiere. 3pt

12. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\forall x(\exists y\, \neg r(x, y) \rightarrow p(x)) \wedge \exists x\, \neg r(x, a) \rightarrow \exists x\, p(x).$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

13. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg(s \rightarrow t))).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **V**
2. **F**
3. β (è un'implicazione)
4. **F** (se A è insoddisfacibile si ha $A \models B$ per qualsiasi B e in particolare quando B è soddisfacibile)
5. **V** (B è soddisfatta in tutte le interpretazioni in cui A è soddisfatta, cioè in tutte le interpretazioni)
6. **V**
7. 2 (la seconda e la quarta) e 2 (le prime due)
8. **F** (perché dovrebbe essere $\neg p \in U$ e $p \in U$)
9. Un'interpretazione che soddisfa A ma non B è la seguente: $D^I = \{0,1\}$, $a^I = 0$, $r^I = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Quindi $A \not\models B$.

   Un'interpretazione che soddisfa B ma non A è la seguente: $D^J = \{0,1\}$, $a^J = 0$, $r^J = \{(0,0),(1,1)\}$. Quindi $B \not\models A$.
10. Supponiamo che I sia un'interpretazione che rende vera A e fissiamo $d \in D^I$. Dato che $I \models A$ si ha che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d]}(r(a,x) \wedge \exists y\, r(x,y)) = V$ e in particolare $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d]}(\exists y\, r(x,y)) = V$. Esiste quindi $d_0 \in D^I$ tale che $(d, d_0) \in r^I$.

    Sfruttando nuovamente $I \models A$ si ottiene $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0]}(r(a,x) \wedge \exists y\, r(x,y)) = V$ e in particolare $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0]}(r(a,x)) = V$, cioè $(a^I, d_0) \in r^I$.

    Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $d \in D^I$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(a^I, d_0) \in r^I$ e $(d, d_0) \in r^I$. Perciò $I \models C$, che era quanto dovevamo ottenere.
11. (i) $\forall x(a(x) \wedge m(x) \to \exists y(c(y) \wedge v(x,y)))$;
    (ii) $\exists x(a(x) \wedge \exists y(c(y) \wedge v(x,y)) \wedge \neg m(x))$;
    (iii) $\forall x(a(x) \wedge \forall y(c(y) \to v(x,y)) \to m(x))$.

12. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con A la formula $\forall x(\exists y\, \neg r(x,y) \to p(x))$, con B la formula $\neg\exists x\, p(x)$ e con C la formula $\neg\exists y\, \neg r(b,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
\underline{\neg(A \wedge \exists x\, \neg r(x,a) \to \exists x\, p(x))} \\
| \\
\underline{A \wedge \exists x\, \neg r(x,a)}, B \\
| \\
A, \underline{\exists x\, \neg r(x,a)}, B \\
| \\
\underline{A}, B, \neg r(b,a) \\
| \\
A, B, \neg r(b,a), \underline{\exists y\, \neg r(b,y) \to p(b)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
A, B, \neg r(b,a), \underline{C} & A, \underline{B}, \neg r(b,a), p(b) \\
| & | \\
A, B, \neg r(b,a), C, r(b,a) & A, B, \neg r(b,a), p(b), \neg p(b) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

Il tableau mostra che la formula di partenza è valida.

13.

$$
\begin{array}{c}
\langle[\neg((p \to q) \wedge (r \vee \neg(s \to t)))]\rangle \\
\langle[\neg(p \to q), \neg(r \vee \neg(s \to t))]\rangle \\
\langle[p, \neg(r \vee \neg(s \to t))], [\neg q, \neg(r \vee \neg(s \to t))]\rangle \\
\langle[p, \neg r], [p, s \to t], [\neg q, \neg r], [\neg q, s \to t]\rangle \\
\langle[p, \neg r], [p, \neg s, t], [\neg q, \neg r], [\neg q, \neg s, t]\rangle
\end{array}
$$

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 dicembre 2004

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. $p \land q \to r \equiv \neg r \to \neg p \lor \neg q$. **V** | **F** 1pt

2. La formula $\neg((p \land \neg q) \lor r) \lor (p \land \neg r)$ è in forma normale disgiuntiva. **V** | **F** 1pt

3. $\exists x\, p(x) \to q(a)$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

4. Se $A \models B$ e A è soddisfacibile allora B è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

5. Se $A \models B$ e B è valida allora A è valida. **V** | **F** 1pt

6. $\forall x(A(x) \to B(x)) \equiv \exists x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$. **V** | **F** 1pt

7. Considerate le seguenti quattro formule:
$\neg p(a), \exists x\, p(x) \lor q(x), q(x) \to p(a), \exists x\, \forall y(p(y) \to r(x,y))$.
Quante sono formule chiuse? 0 | 1 | 2 | 3 | 4 1pt
Quante sono letterali? 0 | 1 | 2 | 3 | 4 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka U di formule proposizionali tale che $\neg(p \land q) \in U$ e $\neg(q \to r) \in U$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

9. Siano A e B le formule $\forall x(\exists y\, p(y,x) \land p(x,a))$ e $\forall x\, p(x,x)$. Dimostrate che $A \not\models B$ e che $B \not\models A$. (Utilizzate il retro del foglio) 4pt

10. Sia A la formula utilizzata nell'esercizio precedente e sia C la formula $\forall x\, \exists y(p(y,a) \land p(y,x))$. Dimostrate che $A \models C$. (Utilizzate il retro del foglio) 4pt

11. Sia $\{\ell, m, t, d\}$ un linguaggio dove ℓ, m e t sono simboli predicativi unari, e d è un simbolo predicativo binario. Interpretando $\ell(x)$ come "x è un logico", $m(x)$ come "x sa fare il suo mestiere", $t(x)$ come "x è un teorema", $d(x, y)$ come "x dimostra y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) ogni logico che sa fare il suo mestiere dimostra qualche teorema; 3pt

(ii) qualche logico dimostra un teorema anche se non sa fare il suo mestiere; 3pt

(iii) un logico che dimostra tutti i teoremi sa certamente fare il suo mestiere. 3pt

12. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\exists x\, r(a, x) \land \forall x(\exists y\, r(y, x) \to \neg p(x)) \to \exists x\, \neg p(x).$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

13. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg((p \to q) \to (\neg r \lor s) \land t).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

Soluzioni

1. **V**
2. **F**
3. β (è un'implicazione)
4. **V** (B è soddisfatta in tutte le interpretazioni in cui A è soddisfatta, ed esiste almeno un'interpretazione di questo tipo)
5. **F** (se B è valida si ha $A \models B$ per qualsiasi A e in particolare per A che sono falsificabili)
6. **F**
7. 2 (la prima e la quarta) e 1 (la prima)
8. **V** (ad esempio $U = \{\neg(p \wedge q), \neg(q \to r), \neg p, q, \neg r\}$ è un insieme di Hintikka)
9. Un'interpretazione che soddisfa A ma non B è la seguente: $D^I = \{0,1\}$, $a^I = 0$, $p^I = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. Quindi $A \not\models B$.

   Un'interpretazione che soddisfa B ma non A è la seguente: $D^J = \{0,1\}$, $a^J = 0$, $p^J = \{(0,0),(1,1)\}$. Quindi $B \not\models A$.
10. Supponiamo che I sia un'interpretazione che rende vera A e fissiamo $d \in D^I$. Dato che $I \models A$ si ha che $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d]}(\exists y\, p(y,x) \wedge p(x,a)) = V$ e in particolare $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d]}(\exists y\, p(y,x)) = V$. Esiste quindi $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, d) \in p^I$.

    Sfruttando nuovamente $I \models A$ si ottiene $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0]}(\exists y\, p(y,x) \wedge p(x,a)) = V$ e in particolare $v_{\sigma_{\mathcal{I}}[x \leftarrow d_0]}(p(x,a)) = V$, cioè $(d_0, a^I) \in r^I$.

    Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $d \in D^I$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, a^I) \in p^I$ e $(d_0, d) \in p^I$. Perciò $I \models C$, che era quanto dovevamo ottenere.
11. (i) $\forall x(\ell(x) \wedge m(x) \to \exists y(t(y) \wedge d(x,y)))$;
    (ii) $\exists x(\ell(x) \wedge \exists y(t(y) \wedge d(x,y)) \wedge \neg m(x))$;
    (iii) $\forall x(\ell(x) \wedge \forall y(t(y) \to d(x,y)) \to m(x))$.

12. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con A la formula $\forall x(\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x))$, con B la formula $\neg\exists x\, \neg p(x)$ e con C la formula $\neg\exists y\, r(y,b)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(\exists x\, r(a,x) \wedge A \to \exists x\, \neg p(x))}$$

$$\underline{\exists x\, r(a,x) \wedge A}, B$$

$$\underline{\exists x\, r(a,x)}, A, B$$

$$r(a,b), \underline{A}, B$$

$$r(a,b), A, B, \underline{\exists y\, r(y,b) \to \neg p(b)}$$

$$r(a,b), A, B, \underline{C} \qquad\qquad r(a,b), A, \underline{B}, \neg p(b)$$

$$r(a,b), A, B, C, \neg r(a,b) \qquad\qquad r(a,b), A, B, \neg p(b), p(b)$$

$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

Il tableau mostra che la formula di partenza è valida.

13.

$$[\langle \neg((p \to q) \to (\neg r \vee s) \wedge t)\rangle]$$

$$[\langle p \to q, \neg((\neg r \vee s) \wedge t)\rangle]$$

$$[\langle \neg p, \neg((\neg r \vee s) \wedge t)\rangle, \langle q, \neg((\neg r \vee s) \wedge t)\rangle]$$

$$[\langle \neg p, \neg(\neg r \vee s)\rangle, \langle \neg p, \neg t)\rangle, \langle q, \neg(\neg r \vee s)\rangle, \langle q, \neg t)\rangle]$$

$$[\langle \neg p, r, \neg s\rangle, \langle \neg p, \neg t)\rangle, \langle q, r, \neg s\rangle, \langle q, \neg t)\rangle]$$