CODICI SEGRETI

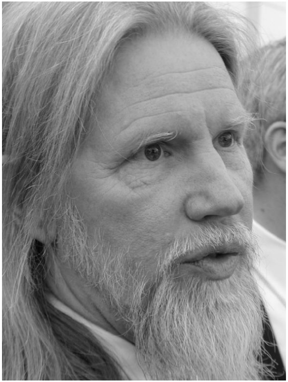
Agostino Dovier

Dip di Matematica e Informatica, Univ. di Udine

Ringrazio l'amico e maestro Andrea Sgarro per il materiale tratto dal suo meraviglioso quanto introvabile testo

Crittografia a chiave pubblica

Diffie e Hellman



- Nel 1976 Whitfield Diffie e Martin Hellman pubblicano una metodologia rivoluzionaria per la comunicazione cifrata.
- Alla stessa idea erano giunti prima Malcolm J. Williamson, James H. Ellis, Clifford C. Cocks nei primi anni 70. Lavorando al *Government Communications Head Quarter (GB)*, il loro lavoro fu secretato (e all'epoca giudicato tecnologicamente impraticabile)
- In cosa consiste?

- Nel 1976 Whitfield Diffie e Martin Hellman pubblicano una metodologia rivoluzionaria per la comunicazione cifrata.
- Alla stessa idea erano giunti prima Malcolm J. Williamson, James H. Ellis, Clifford C. Cocks nei primi anni 70. Lavorando al *Government Communications Head Quarter (GB)*, il loro lavoro fu secretato (e all'epoca giudicato tecnologicamente impraticabile)
- In cosa consiste?

- Nel 1976 Whitfield Diffie e Martin Hellman pubblicano una metodologia rivoluzionaria per la comunicazione cifrata.
- Alla stessa idea erano giunti prima Malcolm J. Williamson, James H. Ellis, Clifford C. Cocks nei primi anni 70. Lavorando al *Government Communications Head Quarter (GB)*, il loro lavoro fu secretato (e all'epoca giudicato tecnologicamente impraticabile)
- In cosa consiste?

La crittografia a chiave pubblica poggia le sue fondamenta sulla comunicazione privata tra due personaggi chiave.

Crittografia a chiave pubblica
Idee generali

Bob ed Alice

Bob ed Alice

Inoltre c'è bisogno della spia.

Charlie


charliesangels.com
presents......
CHARLIE'S
ANGELS
FULL THROTTLE

Charlie's

- Alice e Bob (e tutti) pubblicano (in un elenco telefonico, negli anni '70, in rete oggi) una volta per sempre la loro chiave pubblica (K_A quella di Alice, K_B quella di Bob, etc.), nota a tutti.
- Alice vuole inviare il messaggio m a Bob.
- Alice codifica il messaggio m per Bob con la chiave pubblica di Bob (K_B) e invia il messaggio cifrato $COD(m, K_B)$.
- Bob riceve il messaggio $COD(m, K_B)$ e usa la sua chiave privata H_B per decodificare il messaggio.

Crittografia a chiave pubblica

Idee generali

- Le chiavi pubblica e privata sono progettate in modo tale che
$$DEC(COD(m, K_B), H_B) = m$$
- L'operazione di decifrazione, sapendo la chiave privata dev'essere algoritmicamente facile
- L'operazione di decrittazione (per Charlie) deve essere algoritmicamente impraticabile.
- Anche se l'impresa è possibile: conoscendo K_B e $c = COD(m, K_B)$ si possono generare uno ad uno i messaggi di lunghezza opportuna, $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$.
- Dunque si codificano uno ad uno con la chiave K_B e si vede se $COD(m_i, K_B) = c$.

- Si considerino n interi positivi $(a_1, \ldots, a_n)$
- E un intero c.
- Il problema è quello di trovare $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ con $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ tali che (o di dire che non esistono)

$$a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \quad = \quad c \tag{1}$$

- L'idea del fusto (o zaino, da Trapdoor Knapsack ma un fusto cilindrico rende meglio l'idea) è quella di riuscire ad impilare gli oggetti a_i giusti l'uno sull'altro in modo da raggiungere l'altezza esatta c.

- In generale si tratta di trovare un vettore di n Booleani $\vec{m}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = c \qquad (2)$$

- L'idea di Merkle e Hellman è di codificare un messaggio di n bits $\vec{m} = b_1 \cdots b_n$ con il numero c.
- Stabilire l'esistenza di $\vec{m}$ che soddisfa il vincolo (2) è NP-completo.

- Una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ è supercrescente se

$$(\forall j \in \{2, \ldots, n\}) \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_i < a_j \right)$$

- Il problema del fusto con n-uple supercrescenti è lineare.
- Esempio: La n-upla è $(2, 3, 6, 12, 24, 48)$. Sia $c = 33$. 48 non puo' essere, essendo maggiore. 24 ci deve essere in quanto con tutti i precedenti si puo' fare solo 23. Rimangono 9. Dunque 12 non puo' essere. Ma 6 ci deve essere. Rimangono 3. 3 ci deve essere. Rimane 0.
- Il messaggio $\vec{m} = (0, 1, 1, 0, 1, 0)$.

- Si sceglie un intero n, una n-upla supercrescente $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, e un intero $u > 2a_n$.
- Si sceglie un intero $v < u$ e primo con u $(MCD(u, v) = 1)$
- Si calcola v^{-1} nell'aritmetica in modulo u
- Esiste perchè $MCD(u, v) = 1$, si calcola facilmente con Euclide Esteso (EE in breve).
- Si calcola la n-upla $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ dove

$$d_i = va_i \mod u$$

- Possiamo dire $\vec{d} = v\vec{a} \mod u$.
- Anche se $\vec{a}$ è supercrescente, $\vec{d}$ è una lista qualunque.
- Il numero n ed il vettore $\vec{d}$ sono resi pubblici.

Crittografia a chiave pubblica

Il cifrario del fusto — Generazione chiavi

- Si sceglie un intero n, una n-upla supercrescente $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, e un intero $u > 2a_n$.
- Si sceglie un intero $v < u$ e primo con u $(MCD(u, v) = 1)$
- Si calcola v^{-1} nell'aritmetica in modulo u
- Esiste perchè $MCD(u, v) = 1$, si calcola facilmente con Euclide Esteso (EE in breve).
- Si calcola la n-upla $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ dove

$$d_i = va_i \mod u$$

- Possiamo dire $\vec{d} = v\vec{a} \mod u$.
- Anche se $\vec{a}$ è supercrescente, $\vec{d}$ è una lista qualunque.
- Il numero n ed il vettore $\vec{d}$ sono resi pubblici.

- Alice vuol spedire un messaggio (Booleano) a Bob.
- Vede la chiave pubblica $n_B, \vec{d}_B$ di Bob.
- Codifica il suo messaggio a blocchi di n_B bits. Consideriamo un blocco (chiamiamolo $\vec{m}$)
- Alice calcola

$$c = \vec{m}\vec{d}_B = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

- Dunque lo spedisce a Bob

- Bob ha ricevuto $c = \vec{m}\vec{d}_B$
- Effettua dunque i seguenti calcoli (facili per lui)

$$\begin{array}{rcl} c^* & = & v^{-1}c \mod u \\ & = & v^{-1}(\vec{d}_B\vec{m}) \mod u \\ & = & v^{-1}(v\vec{a}\vec{m}) \mod u \\ & = & (v^{-1}v)(\vec{a}\vec{m}) \mod u \\ & = & 1(\vec{a}\vec{m}) \mod u \\ & = & \vec{a}\vec{m} \mod u \end{array}$$

- Si osservi che $\vec{a}$ superlineare, $u > 2a_n$ per costruzione, dunque $\vec{a}\vec{m} < u$. Possiamo togliere il modulo.
- A Bob non resta altro che risolvere il problema del fusto $\vec{a}\vec{m} = c^*$, con la successione supercrescente $\vec{a}$ (tempo lineare).

Crittografia a chiave pubblica

Il cifrario del fusto — Decrittazione

- Charlie ha ricevuto $c = \vec{m}\vec{d}_B$
- Charlie conosce n e $\vec{d}_B$ (sa che è stato inviato a Bob).
- Deve calcolare $\vec{m}$.
- Per lui è un problema di Knapsack e dunque NP-completo.
- Forzato da Shamir nel 1982. Ma non dimostra che P=NP (non risolve tutti i Knapsack in P ma solo quelli generati in quel modo: lavora su ritrasformare $\vec{d}$ in $\vec{a}$). Spazio per un approfondimento.

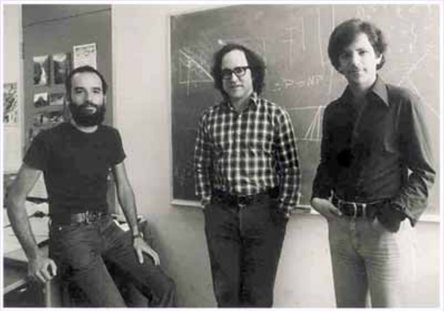
Crittografia a chiave pubblica

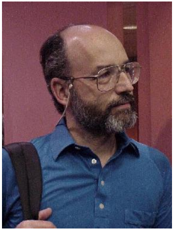
Il cifrario del fusto — Decrittazione

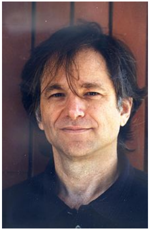
- Charlie ha ricevuto $c = \vec{m}\vec{d}_B$
- Charlie conosce n e $\vec{d}_B$ (sa che è stato inviato a Bob).
- Deve calcolare $\vec{m}$.
- Per lui è un problema di Knapsack e dunque NP-completo.
- Forzato da Shamir nel 1982. Ma non dimostra che P=NP (non risolve tutti i Knapsack in P ma solo quelli generati in quel modo: lavora su ritrasformare $\vec{d}$ in $\vec{a}$). Spazio per un approfondimento.

Crittografia a chiave pubblica

Rivest, Shamir, e Adleman — Turing award 2002







1. Bob sceglie due numeri primi p e q.
   - Per generare un primo:
   - Si prende un numero dispari delle dimensioni desiderate
   - Si vede se è primo
     Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, PRIMES is in P. Annals of Mathematics 160(2):781–793, 2004 (RR 2002)
   - Nota bene fin d'ora. Una cosa è stabilire se è primo, un'altra è trovare i suoi fattori se non lo è.
   - Se lo è OK, altrimenti lo si incrementa di 2 e si ripete.
   - I primi sono infiniti (e densi $\frac{\lg n}{n}$). Dopo un po' lo si trova.
2. Bob calcola $n = pq$
3. Bob calcola $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$

1. Bob sceglie due numeri primi p e q.
   - Per generare un primo:
   - Si prende un numero dispari delle dimensioni desiderate
   - Si vede se è primo
     Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, PRIMES is in P. Annals of Mathematics 160(2):781–793, 2004 (RR 2002)
   - Nota bene fin d'ora. Una cosa è stabilire se è primo, un'altra è trovare i suoi fattori se non lo è.
   - Se lo è OK, altrimenti lo si incrementa di 2 e si ripete.
   - I primi sono infiniti (e densi $\frac{\lg n}{n}$). Dopo un po' lo si trova.
2. Bob calcola $n = pq$
3. Bob calcola $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$

1. Bob sceglie due numeri primi p e q.
   - Per generare un primo:
   - Si prende un numero dispari delle dimensioni desiderate
   - Si vede se è primo
     Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, PRIMES is in P. Annals of Mathematics 160(2):781–793, 2004 (RR 2002)
   - Nota bene fin d'ora. Una cosa è stabilire se è primo, un'altra è trovare i suoi fattori se non lo è.
   - Se lo è OK, altrimenti lo si incrementa di 2 e si ripete.
   - I primi sono infiniti (e densi $\frac{\lg n}{n}$). Dopo un po' lo si trova.
2. Bob calcola $n = pq$
3. Bob calcola $\Phi(n) = (p - 1)(q - 1)$

1. Bob sceglie due numeri primi p e q.
    - Per generare un primo:
    - Si prende un numero dispari delle dimensioni desiderate
    - Si vede se è primo
      Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, PRIMES is in P. Annals of Mathematics 160(2):781–793, 2004 (RR 2002)
    - Nota bene fin d'ora. Una cosa è stabilire se è primo, un'altra è trovare i suoi fattori se non lo è.
    - Se lo è OK, altrimenti lo si incrementa di 2 e si ripete.
    - I primi sono infiniti (e densi $\frac{\lg n}{n}$). Dopo un po' lo si trova.
2. Bob calcola $n = pq$
3. Bob calcola $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$

4. Bob sceglie un altro numero (esponente) e tale che

$$MCD(e, \Phi(n)) = 1$$

   - Sceglie un numero dispari delle dimensioni opportune
   - Esegue l'algoritmo di Euclide tra e e $\Phi(n)$
   - Se l'output è 1, OK,
   - Altrimenti incrementa di due e ritenta
   - Il processo termina al più al numero primo successivo che non divide né $p-1$ né $q-1$.

5. Bob calcola d tale che $de = 1 \mod \Phi(n)$. (si può fare direttamente al passo precedente usando EE in luogo di Euclide)
6. Bob pubblica la chiave (n, e).

1. Alice vuole inviare un messaggio a Bob, conoscendo la chiave pubblica di Bob (n, e).
2. Spezza il messaggio in blocchi (stringhe binarie) tali che la loro interpretazione come numero sia quella di un numero $m < n$ (basta fissare blocchi di lunghezza $\lfloor \lg_2 n \rfloor$).
3. Considera dunque un blocco alla volta.

4. Alice calcola $c = m^e \mod n$
   - L'esponenziale finito è una operazione semplice algoritmicamente.
   - Sia $k = \lfloor lg_2 e \rfloor + 1$.
   - $m = m^{(2^0)}$. Calcolo

$$m^{(2^1)}, m^{(2^2)}, m^{(2^3)}, m^{(2^4)}, \ldots, m^{(2^k)}$$

     tutti modulo n. Ciò garantisce che i numeri siano tutti $< e$ (e solo temporaneamente tra e e e^2).
   - Scrivo e in base 2 $(e_k, e_{k-1}, \cdots, e_1, e_0)$, e moltiplico tra loro (sempre in modulo e, sempre con numeri "controllati") i vari $m^{(2^i)}$ tali che $e_i = 1$
5. Alice spedisce c a Bob.

1. Bob riceve $c = m^e \mod n$.
2. Bob conosce d t.c. $de = 1 \mod \Phi(n)$
3. Bob calcola

$$c^d \mod n = (m^e)^d \mod n = m^{ed} \mod n$$

4. Ci possono essere due casi.
   4.1 $MCD(m, n) = 1$ (essendo n prodotto di due primi, questo fatto è molto probabile).
   4.2 $MCD(m, n) \neq 1$ (meno probabile, ma va considerato).

Sia $MCD(m, n) = 1$

- Per il Teorema di Eulero

$$m^{\Phi(n)} = 1 \mod n \tag{3}$$

- Per costruzione, da EE so trovare h tale che:

$$de + h\Phi(n) = 1 \tag{4}$$

Sia $k = -h$.

- Dunque

$$\begin{array}{rcll} c^d & = & m^{ed} \mod n & \\ & = & m^{k\Phi(n)+1} \mod n & (4) \\ & = & m\,(m^{\Phi(n)})^k \mod n & \\ & = & m\,1^k \mod n & (3) \\ & = & m & \text{Poiché } m < n \end{array}$$

Sia ora $MCD(m, n) \neq 1$

- n è prodotto di due primi p e q
- $m < n$ per costruzione.
- Lemma. Se $p \neq q$ sono due primi, $a = b \mod p$ e $a = b \mod q$, allora $a = b \mod pq$.
- $MCD(m, n) \neq 1$ significa che $(p|m)$ oppure $(q|m)$ (ma non entrambi, anche se quanto segue varrebbe comunque).
- Sappiamo per costruzione che $de = 1 \mod \Phi(n)$ dunque $\Phi(n)|de - 1$.
- Ma $\Phi(n) = (p - 1)(q - 1) = \Phi(p)\Phi(q)$
- Dunque $\Phi(p)\Phi(q)|de - 1$, pertanto vale sia $\Phi(p)|de - 1$ che $\Phi(q)|de - 1$, ovvero $de = h\Phi(p) + 1$ e $de = k\Phi(q) + 1$ per h e k opportuni.

- Se $MCD(m,p) = 1$, per Teorema di Eulero $m^{\Phi(p)} = 1 \mod p$, dunque $m^{de} = m(m^{\Phi(p)})^h = m \mod p$
- Se $MCD(m,p) \neq 1$, siamo nel caso $(p|m)$. Dunque $m = pr$ per r opportuno. Pertanto

$$
\begin{array}{rcl}
m^{de} & = & (pr)^{de} \\
& = & p^{de} r^{de} \\
& = & 0 \mod p \\
& = & pr \mod p \\
& = & m \mod p
\end{array}
$$

- Similmente, sia con $MCD(m,q) = 1$ che $MCD(m,q) = 1$, vale che $m^{de} = m \mod q$
- Dunque, per il Lemma sopra, in ogni caso $m^{de} = m \mod pq$

1. Charlie intercetta $c = m^e \mod n$.
2. Charlie sa che Alice l'ha inviato a Bob e conosce e e n pubblicati da Bob.
3. Al solito, in principio, può generare tutti i messaggi $m_1, m_2, \ldots, m_t$ di lunghezza opportuna (sono in numero finito, dato n), effettuare la codifica e vedere se trova c (forza bruta). È impraticabile.
4. La strada più semplice (in apparenza) è scoprire i fattori p e q di n. Ma anche questo non lo sappiamo fare (per ora) con algoritmi polinomiali in $\log n$.
5. Charlie, per ora, non decritta il messaggio.

1. Charlie intercetta $c = m^e \mod n$.
2. Charlie sa che Alice l'ha inviato a Bob e conosce e e n pubblicati da Bob.
3. Al solito, in principio, può generare tutti i messaggi $m_1, m_2, \ldots, m_t$ di lunghezza opportuna (sono in numero finito, dato n), effettuare la codifica e vedere se trova c (forza bruta). È impraticabile.
4. La strada più semplice (in apparenza) è scoprire i fattori p e q di n. Ma anche questo non lo sappiamo fare (per ora) con algoritmi polinomiali in $\log n$.
5. Charlie, per ora, non decritta il messaggio.

1. Charlie intercetta $c = m^e \mod n$.
2. Charlie sa che Alice l'ha inviato a Bob e conosce e e n pubblicati da Bob.
3. Al solito, in principio, può generare tutti i messaggi $m_1, m_2, \ldots, m_t$ di lunghezza opportuna (sono in numero finito, dato n), effettuare la codifica e vedere se trova c (forza bruta). È impraticabile.
4. La strada più semplice (in apparenza) è scoprire i fattori p e q di n. Ma anche questo non lo sappiamo fare (per ora) con algoritmi polinomiali in $\log n$.
5. Charlie, per ora, non decritta il messaggio.

1. Charlie intercetta $c = m^e \mod n$.
2. Charlie sa che Alice l'ha inviato a Bob e conosce e e n pubblicati da Bob.
3. Al solito, in principio, può generare tutti i messaggi $m_1, m_2, \ldots, m_t$ di lunghezza opportuna (sono in numero finito, dato n), effettuare la codifica e vedere se trova c (forza bruta). È impraticabile.
4. La strada più semplice (in apparenza) è scoprire i fattori p e q di n. Ma anche questo non lo sappiamo fare (per ora) con algoritmi polinomiali in $\log n$.
5. Charlie, per ora, non decritta il messaggio.

Problema:
trovare un divisore (non unitario) di un numero n

fattorizza(n)
    for $i = 2$ to $\sqrt{n}$
        if $n \; mod \; i = 0$
            print(i è un divisore di n)
            $exit$

Nel caso peggiore compie un numero di passi pari a $\sqrt{n}$.

Possiamo togliere i pari, i multipli di 3, i multipli di 5, ma la sostanza non cambia.

Se n è un numero di 100 cifre, ogni divisione mi costa $10^{-10}s$, e dispongo di 10^9 processori, mi serve tempo

$$\approx \frac{10^{-10}\sqrt{10^{100}}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{23} \text{ANNI}$$

PROBLEMA:

TROVARE UN DIVISORE (NON UNITARIO) DI UN NUMERO n

fattorizza(n)
  for $i = 2$ to $\sqrt{n}$
    if $n \ mod \ i = 0$
      print(i è un divisore di n)
      $exit$

Nel caso peggiore compie un numero di passi pari a $\sqrt{n}$.
Possiamo togliere i pari, i multipli di 3, i multipli di 5, ma la sostanza non cambia.

Se n è un numero di 100 cifre, ogni divisione mi costa $10^{-10}s$, e dispongo di 10^9 processori, mi serve tempo

$$\approx \frac{10^{-10}\sqrt{10^{100}}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{23} \text{ANNI}$$

PROBLEMA:

TROVARE UN DIVISORE (NON UNITARIO) DI UN NUMERO n

fattorizza(n)
    for $i = 2$ to $\sqrt{n}$
        if $n \mod i = 0$
            print(i è un divisore di n)
            $exit$

Nel caso peggiore compie un numero di passi pari a $\sqrt{n}$.
Possiamo togliere i pari, i multipli di 3, i multipli di 5, ma la sostanza non cambia.
Se n è un numero di 100 cifre, ogni divisione mi costa $10^{-10}s$, e dispongo di 10^9 processori, mi serve tempo

$$\approx \frac{10^{-10}\sqrt{10^{100}}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{23} \text{ANNI}$$

Problema:

trovare un divisore (non unitario) di un numero n

fattorizza(n)
 for $i = 2$ to $\sqrt{n}$
  if $n \; mod \; i = 0$
   print(i è un divisore di n)
   $exit$

Nel caso peggiore compie un numero di passi pari a $\sqrt{n}$.
Possiamo togliere i pari, i multipli di 3, i multipli di 5, ma la sostanza non cambia.
Se n è un numero di 100 cifre, ogni divisione mi costa $10^{-10}s$, e dispongo di 10^9 processori, mi serve tempo

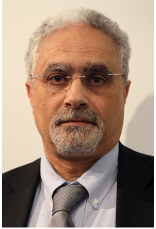
$$\approx \frac{10^{-10}\sqrt{10^{100}}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{23} \text{ANNI}$$

PGP e scambio delle chiavi

- AES e RSA vengono spesso usati in combinazione (p.es. PGP).
- Usando RSA ci si passa la chiave (corta) per l'AES e si usa AES (più veloce) per cifrare il messaggio (lungo).

ELGAMAL E IL LOGARITMO DISCRETO

- Nel 1985 Taher Elgamal architetta un altro sistema di cifratura a chiave pubblica.
- La *forza* del sistema di cifratura è basata sulla difficoltà computazionale di calcolare il logaritmo in un campo finito (in breve *logaritmo discreto*).



ELGAMAL E IL LOGARITMO DISCRETO

- Sia p numero primo *grande* (100 cifre o più), sia α radice primitiva in $\mathbb{Z}_p$ (ovvero $\alpha^{p-1} = 1$ e $\alpha^j \neq 1$ per $j < p - 1$).
- Bob sceglie a caso da $X_B \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ e genera e rende nota la propria chiave pubblica $Y_B = \alpha^{X_B}$ mod p
- Alice vuole inviare m a Bob (ove $m < p$ — se il messaggio è lungo lo spezziamo).
- Alice sceglie a caso $k \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Calcola:
  1. $K_A = (Y_B)^k \mod p$
  2. $C_1 = \alpha^k \mod p$
  3. $C_2 = m \cdot K_A \mod p$
- Comunica dunque $\langle C_1, C_2 \rangle$ a Bob

ELGAMAL E IL LOGARITMO DISCRETO

- Sia p numero primo *grande* (100 cifre o più), sia α radice primitiva in $\mathbb{Z}_p$ (ovvero $\alpha^{p-1} = 1$ e $\alpha^j \neq 1$ per $j < p - 1$).
- Bob sceglie a caso da $X_B \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ e genera e rende nota la propria chiave pubblica $Y_B = \alpha^{X_B} \mod p$
- Alice vuole inviare m a Bob (ove $m < p$ — se il messaggio è lungo lo spezziamo).
- Alice sceglie a caso $k \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Calcola:
  1. $K_A = (Y_B)^k \mod p$
  2. $C_1 = \alpha^k \mod p$
  3. $C_2 = m \cdot K_A \mod p$
- Comunica dunque $\langle C_1, C_2 \rangle$ a Bob

ElGamal e il logaritmo discreto

- Bob riceve $\langle C_1, C_2 \rangle$
- Bob calcola $K_B = (C_1)^{X_B} \mod p$ e dunque $\hat{m} = (C_2 \cdot K_B^{-1}) \mod p$.
- Funziona?
- Notate che (tutto $\mod p$): $K_B = (C_1)^{X_B} = (\alpha^k)^{X_B} = (\alpha^{k \cdot X_B}) = (\alpha^{X_B})^k = Y_B^k = K_A$.
- E dunque (tutto $\mod p$): $\hat{m} = (C_2 \cdot K_B^{-1}) = (m \cdot K_A \cdot m \cdot K_B^{-1}) = (m \cdot K_A \cdot m \cdot K_A^{-1}) = m$.

Attacchi a ElGamal

- Birthday Attack
- Baby Step / Giant Step (BSGS)
- Algoritmo di Pohlig-Hellman
- Index calculus
- Gli attacchi sopra funzionano in certe situazioni. Per avere sicurezza p deve essere molto grande e $p - 1$ deve avere (anche) dei divisori primi grandi.
- I codici ellittici migliorano la situazione garantendo la stessa sicurezza con dimensioni minori.

ATTACCHI A ELGAMAL

- Birthday Attack
- Baby Step / Giant Step (BSGS)
- Algoritmo di Pohlig-Hellman
- Index calculus
- Gli attacchi sopra funzionano in certe situazioni. Per avere sicurezza p deve essere molto grande e $p-1$ deve avere (anche) dei divisori primi grandi.
- I codici ellittici migliorano la situazione garantendo la stessa sicurezza con dimensioni minori.

Crittografia a chiave pubblica

Scambio delle chiavi — Diffie e Hellman 1976

- Alice e Bob vogliono concordare una chiave di un DES o di un AES.
- Alice e Bob scelgono assieme e pubblicano un numero primo p ed un numero $\alpha \in \{2, \ldots, p-1\}$
- Alice sceglie $A \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^A \mod p$
- Bob sceglie $B \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^B \mod p$
- La chiave da usarsi è $\alpha^{AB} \mod p$
- Alice sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^B)^A \mod p$
- Bob sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^A)^B \mod p$
- Charlie, che intercetta tutto, conosce $\alpha, p, \alpha^A, \alpha^B$, ma NON sa calcolare α^{AB}.
- Di nuovo, un modo per farlo è calcolare il logaritmo discreto.

- Alice e Bob vogliono concordare una chiave di un DES o di un AES.
- Alice e Bob scelgono assieme e pubblicano un numero primo p ed un numero $\alpha \in \{2, \ldots, p-1\}$
- Alice sceglie $A \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^A \mod p$
- Bob sceglie $B \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^B \mod p$
- La chiave da usarsi è $\alpha^{AB} \mod p$
- Alice sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^B)^A \mod p$
- Bob sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^A)^B \mod p$
- Charlie, che intercetta tutto, conosce $\alpha, p, \alpha^A, \alpha^B$, ma NON sa calcolare α^{AB}.
- Di nuovo, un modo per farlo è calcolare il logaritmo discreto.

- Alice e Bob vogliono concordare una chiave di un DES o di un AES.
- Alice e Bob scelgono assieme e pubblicano un numero primo p ed un numero $\alpha \in \{2, \ldots, p-1\}$
- Alice sceglie $A \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^A \mod p$
- Bob sceglie $B \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^B \mod p$
- La chiave da usarsi è $\alpha^{AB} \mod p$
- Alice sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^B)^A \mod p$
- Bob sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^A)^B \mod p$
- Charlie, che intercetta tutto, conosce $\alpha, p, \alpha^A, \alpha^B$, ma NON sa calcolare α^{AB}.
- Di nuovo, un modo per farlo è calcolare il logaritmo discreto.

- Alice e Bob vogliono concordare una chiave di un DES o di un AES.
- Alice e Bob scelgono assieme e pubblicano un numero primo p ed un numero $\alpha \in \{2, \ldots, p-1\}$
- Alice sceglie $A \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^A \mod p$
- Bob sceglie $B \in \mathbb{N}$ e calcola e comunica $\alpha^B \mod p$
- La chiave da usarsi è $\alpha^{AB} \mod p$
- Alice sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^B)^A \mod p$
- Bob sa calcolare $\alpha^{AB} \mod p = (\alpha^A)^B \mod p$
- Charlie, che intercetta tutto, conosce $\alpha, p, \alpha^A, \alpha^B$, ma NON sa calcolare α^{AB}.
- Di nuovo, un modo per farlo è calcolare il logaritmo discreto.

CONCLUSIONI

- Ovviamente la nostra visita della crittografia è ben lungi dall'essere esaustiva
- Se avete passione, approfondire un po' sarà facile (magari date un'occhiata ai vari MD4, MD5, WPA, WEP, etc).