Constraint Programming & Planning

Agostino Dovier

Università di Udine
Dipartimento di Matematica e Informatica

Udine, Novembre 2014

Sommario

Vincoli Globali

Richiami sui grafi bipartiti

All Different

Vincoli Globali

Generalità

- Vincoli che riguardano gruppi di variabili sono detti vincoli globali
- Spesso vincoli globali possono essere implementati come congiunzioni di vincoli binari, ma in tal caso la propagazione che si ottiene è spesso molto povera.
- Pertanto vincoli globali di uso comune sono studiati indipendentemente.
- Vedremo il più famoso vincolo globale: alldifferent.

Grafi bipartiti e matchings

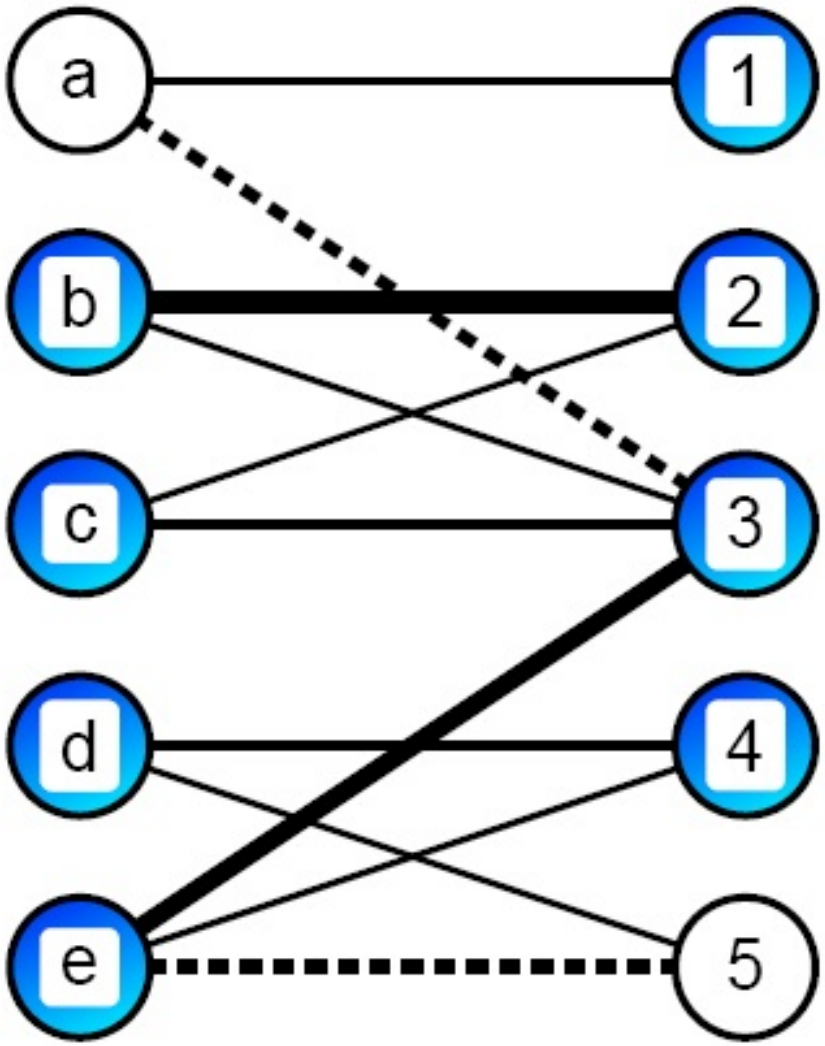
- Un *grafo bipartito* è una tripla $G = \langle X, Y, E \rangle$ dove X e Y sono insiemi disgiunti di nodi ed $E \subseteq X \times Y$ è un insieme di archi.
- Gli archi si intendono non diretti; dunque per noi $(x, y) = (y, x)$.
- Un *matching* (o accoppiamento) $M \subseteq E$ è un insieme di archi tale che nessuna coppia di archi di M condivide un nodo.
- Dati G ed M, un nodo si dice *accoppiato* (matched) se è estremo di un arco in M; altrimenti si dice *libero*.

Grafi bipartiti e matchings

- Dati $G = \langle X, Y, E \rangle$ grafo bipartito e $M \subseteq E$ matching, un cammino nel grafo G è *alternante* per M se gli archi coinvolti sono alternativamente in M e non in M.
- E' *aumentante* per M se è aciclico e inizia e termina in nodi liberi.
- Si osservi che ogni cammino aumentante iniziante in un nodo di X termina in un nodo di Y o viceversa.
- Se $M = \emptyset$, ogni insieme contenente un solo arco costituisce un cammino aumentante per M.

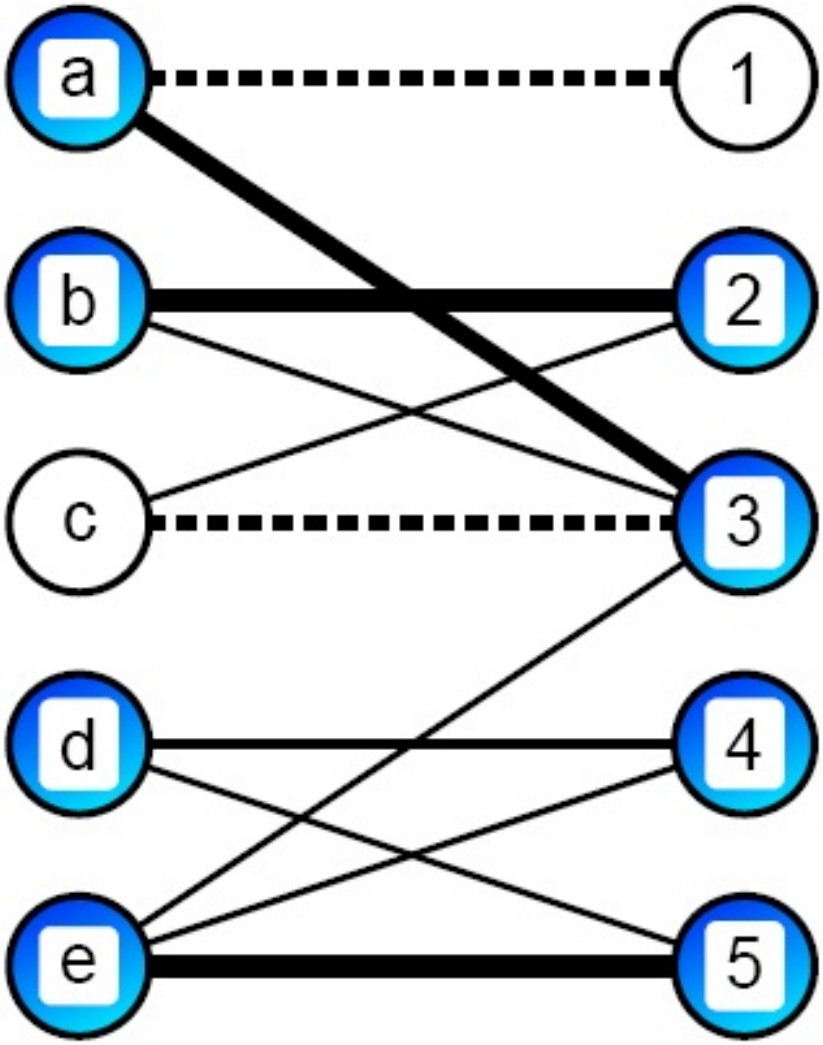
Grafi bipartiti e matchings

Esempio



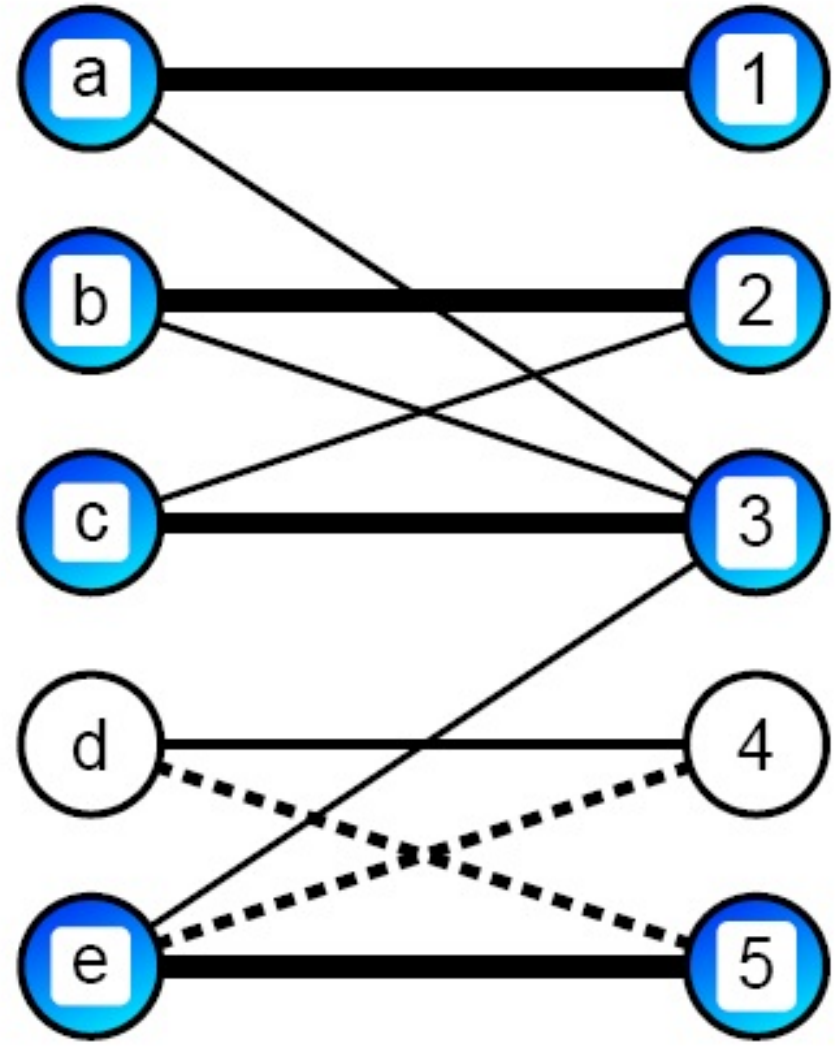
Grafi bipartiti e matchings

Esempio



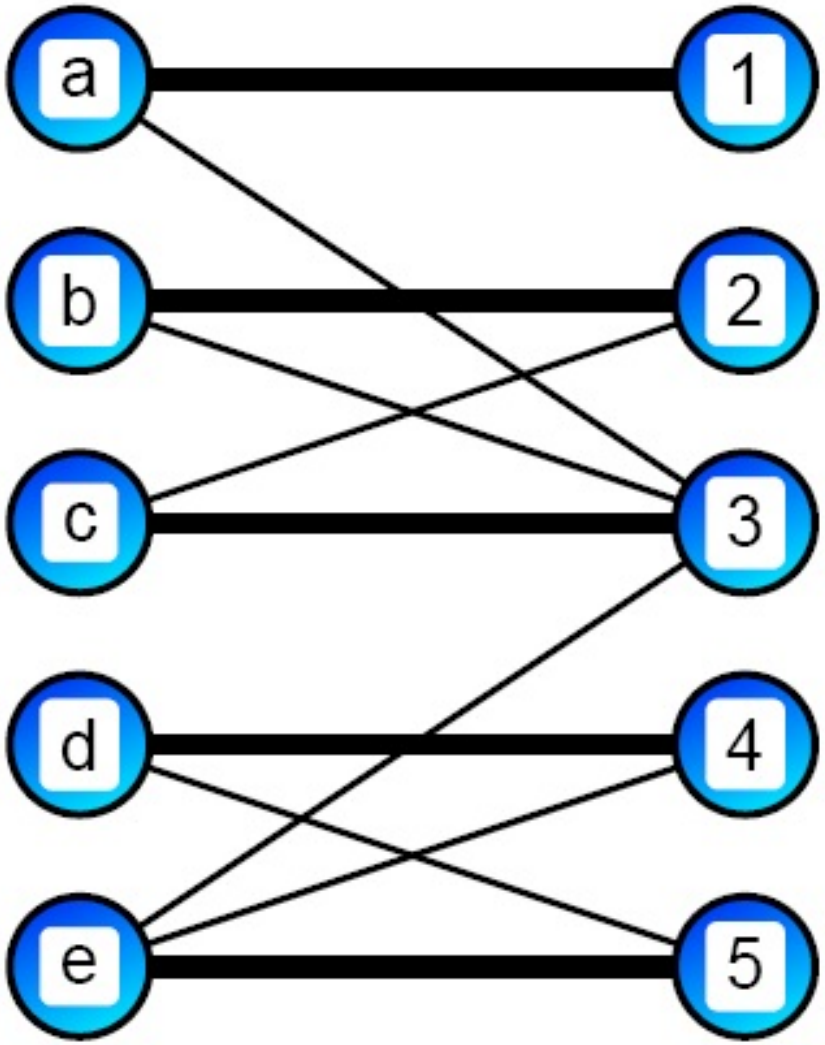
Grafi bipartiti e matchings

Esempio



Grafi bipartiti e matchings

Esempio



GRAFI BIPARTITI E MATCHINGS

RISULTATI

PROP. Dato un matching M e un cammino aumentante P per M allora $M' = M \oplus P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ è un matching tale che $|M'| = |M| + 1$.

DIM. Sia $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), \ldots, (x_n, y_n)\}$

Supp. $P = \{(y_0, x_1), \underline{(x_1, y_1)}, (y_1, x_2), \underline{(x_2, y_2)}, \ldots, (y_{k-1}, x_k), \underline{(x_k, y_k)}, (y_k, x_0)\}$

(wlog, $y_0 \in Y$ e $x_0 \in X$ e coinvolge i 'primi' k archi di M).

Sia
$$\begin{aligned} M' &= (M \setminus P) \cup (P \setminus M) \\ &= \{(y_0, x_1), (y_1, x_2), \ldots, (y_{k-1}, x_k), (y_k, x_0), (x_{k+1}, y_{k+1}), \ldots, (x_n, y_n)\} \end{aligned}$$

E' un matching in quanto $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sono tutti diversi tra loro in quanto M è matching. x_0 e y_0 sono diversi in quanto liberi. Ha lunghezza $|M| + 1$. $\square$

GRAFI BIPARTITI E MATCHINGS

RISULTATI

PROP. Dato un matching M e un cammino aumentante P per M allora $M' = M \oplus P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ è un matching tale che $|M'| = |M| + 1$.

DIM. Sia $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), \ldots, (x_n, y_n)\}$

Supp. $P = \{(y_0, x_1), \underline{(x_1, y_1)}, (y_1, x_2), \underline{(x_2, y_2)}, \ldots, (y_{k-1}, x_k), \underline{(x_k, y_k)}, (y_k, x_0)\}$

(wlog, $y_0 \in Y$ e $x_0 \in X$ e coinvolge i 'primi' k archi di M).

$$\begin{aligned} \text{Sia } M' &= (M \setminus P) \cup (P \setminus M) \\ &= \{(y_0, x_1), (y_1, x_2), \ldots, (y_{k-1}, x_k), (y_k, x_0), \\ &\quad (x_{k+1}, y_{k+1}), \ldots, (x_n, y_n)\} \end{aligned}$$

E' un matching in quanto $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sono tutti diversi tra loro in quanto M è matching. x_0 e y_0 sono diversi in quanto liberi. Ha lunghezza $|M| + 1$. $\square$

Grafi bipartiti e matchings

Risultati

- Vogliamo matchings di cardinalità massima (*matching massimale*—maximum matching).
- Ovviamente la cardinalità di un matching massimale è minore o uguale a $\min\{|X|, |Y|\}$.
- **Teorema** (Berge–1957). Dato un grafo bipartito $G = \langle X, Y, E \rangle$, M è un matching massimale se e solo se non ci sono cammini aumentanti per M.
- $(\rightarrow)$ Per mostrare $A \rightarrow B$ mostriamo $\neg B \rightarrow \neg A$. Supponiamo ci sia un cammino aumentante per M. Allora (Prop) possiamo definire un matching M' di cardinalità maggiore di M, dunque M non è massimale.

GRAFI BIPARTITI E MATCHINGS

TEOREMA DI BERGE

- ($\leftarrow$) Per mostrare $A \leftarrow B$ mostriamo $\neg B \leftarrow \neg A$, ovvero, sia M un matching non massimale, allora esiste un cammino aumentante per M. M non massimale $\Rightarrow \exists M'$ t.c. $|M'| > |M|$. Sia $U = \langle X, Y, M \oplus M' \rangle$.
  1. Essendo M ed M' matchings, al più un arco di M e uno di M' possono incidere su un nodo di U. Pertanto il grado di ogni nodo di U è al più 2.
  2. Nel grafo U ci possono essere dei cicli. Se ci sono, hanno un numero pari di archi (la metà di M e l'altra metà di M').
- Tolti i cicli, rimangono cammini che coinvolgono alternativamente archi di M e di M'. Poichè $|M'| > |M|$ ci deve essere almeno un cammino con più archi di M' che di M.
- Dunque deve iniziare e finire con archi di M' che iniziano e terminano rispettivamente in due nodi liberi per M. Dunque è un cammino aumentante per M. $\square$

Siano $n = \min\{|X|, |Y|\}$ e $m = |E|$.

Max_Matching_Naive($\langle X, Y, E \rangle$)

1 $M \leftarrow \emptyset$;
2 **while** (esiste un cammino aumentante P per M)
3 **do**
4 $\quad M \leftarrow M \oplus P$;
5 **return** M;

L'algoritmo termina con al più n iterazioni. Vediamo il costo di ogni iterazione.

Grafi bipartiti e matchings

Algo naive per maximum matching

Find_Augmenting_Path($\langle X, Y, E\rangle, M$)

$S \leftarrow X; A \leftarrow E;$
trovato $\leftarrow$ false;
while (S contiene un nodo libero $\wedge \neg$*trovato*)
do
    scegli un nodo libero x in S;
    ricerca in profondità un cammino aumentante per M in $\langle S, Y, A\rangle$
    sia $E(x)$ l'insieme dei nodi visitati a partire da x;
    if (è stato trovato un cammino)
      then
          trovato $\leftarrow$ `true`
      else $S \leftarrow S \setminus \{x\}; A \leftarrow A \setminus E(x);$
return *trovato*

$O(|E|)$: costo algoritmo naive è $O(nm)$.
Hopcroft e Karp: $O(m\sqrt{n}) = O(n^2\sqrt{n})$.

All Different Constraint

- Siano $X_1, \ldots, X_k$ vars con domini $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$.
- Il vincolo k-ario alldifferent$(X_1, \ldots, X_k)$ è definito:

$$\begin{aligned}\text{alldifferent}(X_1, \ldots, X_k) = (\mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_k) \setminus \\ \{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_k \ : \\ \exists i \exists j \, 1 \leq i < j \leq k \, (a_i = a_j)\}\end{aligned}$$

- Un CSP è *diff-arc consistent* se ogni vincolo di differenza in esso è *hyper arc consistent*.

All Different Constraint

- I CSP $\langle \text{alldifferent}(X_1, \ldots, X_k); \mathcal{D}_\in \rangle$ e $\langle X_1 \neq X_2, X_1 \neq X_3, \ldots, X_1 \neq X_k, X_2 \neq X_3, \ldots, X_{k-1} \neq X_k; \mathcal{D}_\in \rangle$ sono equivalenti.
- La proprietà di hyper-arc-consistency di $\text{alldifferent}(X_1, \ldots, X_k)$ implica l'arc consistency binaria nel secondo CSP.
- Il viceversa invece non vale (solito esempio).
- Sia $d_i = |\mathcal{D}_i|$ per $i \in \{1, \ldots, k\}$ e $d = \max_{i=1}^{k}\{d_i\}$.
- Un algoritmo per la propagazione delle hyper-arc-consistency basata sulla definizione costa $O(\ldots d^{k+1})$.

All Different Constraint

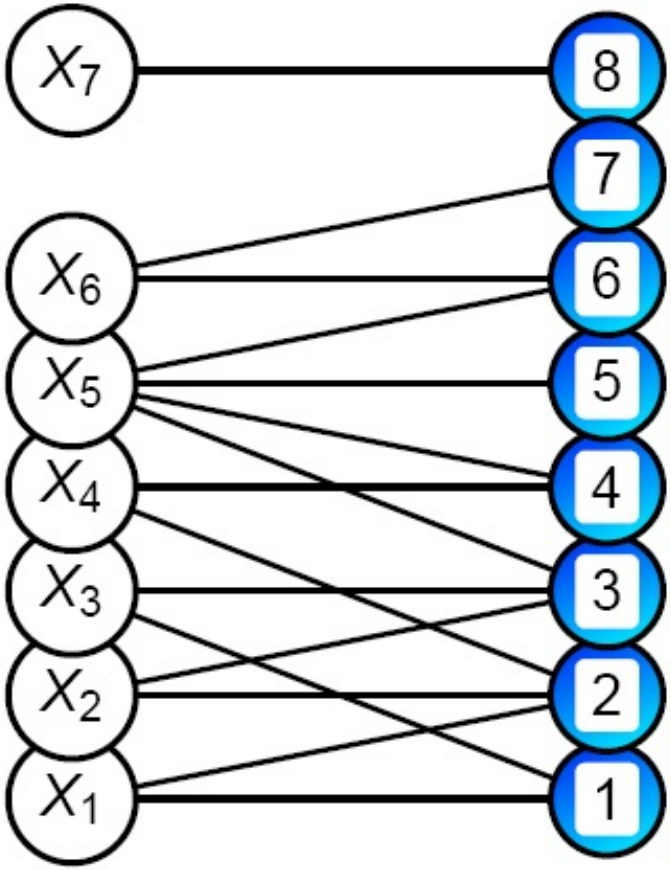
Grafo Bipartito Associato

- Dato un vincolo di differenza C sulle variabili $X_1, \ldots, X_k$, con domini rispettivi $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$, definiamo il grafo bipartito $GV(C) = \langle X_C, Y_C, E_C \rangle$ nel seguente modo:
  - $X_C = \{X_1, \ldots, X_k\}$
  - $Y_C = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$
  - $E_C = \{(X_i, a) \ : \ a \in \mathcal{D}_i\}$

All Different Constraint

Esempio: alldifferent($X_1, \ldots, X_7$)

$X_1 \in 1..2, X_2 \in 2..3, X_3 \in \{1,3\}, X_4 \in \{2,4\},$
$X_5 \in 3..6, X_6 \in 6..7, X_7 \in \{8\}$



All Different Constraint

Regin

Teorema: Un CSP $\mathcal{P} = (\mathcal{C}; \mathcal{D}_{\in})$ è diff-arc consistent se e solo se per ogni vincolo di differenza C in $\mathcal{C}$ ogni arco in $GV(C)$ appartiene ad un matching di cardinalità pari al numero di variabili di C.

Dim: Sia C in $\mathcal{C}$ vincolo di differenza. Siano $X_1, \ldots, X_k$ le sue variabili.

($\rightarrow$) Scegliamo un arco (X_i, a_i) in $GV(C)$. Poichè $\mathcal{P}$ è diff-arc consistent, C è hyper-arc consistent. Dunque esistono $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k$ tali che $X_1 = a_1, \ldots, X_k = a_k$ è soluzione di C. Questa soluzione individua un matching della cardinalità cercata.

($\leftarrow$) Sia $a_i \in D_{X_i}$, dunque l'arco (X_i, a_i) appartiene ad un matching di cardinalità k. Da quel matching troviamo i valori per le altre variabili per verificare la proprietà di hyper-arc consistency. $\square$

All Different Constraint

Regin

Teorema: Un CSP $\mathcal{P} = (\mathcal{C}; \mathcal{D}_{\in})$ è diff-arc consistent se e solo se per ogni vincolo di differenza C in $\mathcal{C}$ ogni arco in $GV(C)$ appartiene ad un matching di cardinalità pari al numero di variabili di C.

Dim: Sia C in $\mathcal{C}$ vincolo di differenza. Siano $X_1, \ldots, X_k$ le sue variabili.

($\rightarrow$) Scegliamo un arco (X_i, a_i) in $GV(C)$. Poichè $\mathcal{P}$ è diff-arc consistent, C è hyper-arc consistent. Dunque esistono $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k$ tali che $X_1 = a_1, \ldots, X_k = a_k$ è soluzione di C. Questa soluzione individua un matching della cardinalità cercata.

($\leftarrow$) Sia $a_i \in D_{X_i}$, dunque l'arco (X_i, a_i) appartiene ad un matching di cardinalità k. Da quel matching troviamo i valori per le altre variabili per verificare la proprietà di hyper-arc consistency. $\square$

All Different Constraint

Filtering

- Come grafo si usano $O(k)$ (per i nodi variabile), $|\mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_k|$ per gli oggeti del dominio, più $e = d_1 + \cdots + d_k \leq kd$ per gli archi.
- Un vincolo $C = \text{alldifferent}(X_1, \ldots, X_k)$ è hyper-arc consistent se e solo se ogni arco in $GV(C)$ appartiene ad un matching di cardinalità k (e dunque massimale).
- Sappiamo che possiamo trovare un matching massimale in tempo $O(\sqrt{k}e) = O(k^{3/2}d)$.
- Però noi dobbiamo tenere tutti e soli gli archi che appartengono ad almeno un matching massimale.
- Con idee naive qui si alzerebbe la complessità del tutto.

All Different Constraint

Berge 2

Teorema: [Berge–1970] Sia $G = \langle X, Y, E \rangle$ un grafo bipartito. Un arco appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali se e solo se, per un arbitrario matching massimale M, l'arco appartiene a:

- un cammino alternante PARI (aciclico/che inizia in un vertice libero), oppure
- un ciclo alternante (PARI).

Dim. ($\Leftarrow$) Sia M un matching massimale.

1. Sia P un cammino alternante pari con un estremo libero (e dunque l'altro no). $M' = M \oplus P$ è un altro matching con la stessa cardinalità. Metà archi di P stanno in uno, metà nell'altro.
2. Sia P un ciclo alternante (pari). Analogo.

All Different Constraint

Un arco appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali ($\Rightarrow$) per un arbitrario matching massimale M, l'arco appartiene a: un cammino alternante PARI che inizia in un vertice libero, oppure un ciclo alternante.

Sia (x_0, x_1) un arco che appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali.
Sia M un generico matching massimale t.c. $(x_0, x_1) \in M$ e M' un generico matching massimale t.c. $(x_0, x_1) \notin M$.
Per ipotesi, almeno un M e un M' siffatti esistono.
Definiamo $M'' = M \oplus M'$. Il grado di ogni nodo di M'' è al più 2.
Avremo inoltre che $(x_0, x_1) \in M''$.
Procediamo iterativamente scegliendo nodi $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_m$ tali che $(x_i, x_{i+1}) \in M''$ e tali che $x_{i+2} \neq x_i$.
Mi fermo o quando non vi sono più nodi da scegliere o quando x_m è uguale ad un nodo già presente.

All Different Constraint

Un arco appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali ($\Rightarrow$) per un arbitrario matching massimale M, l'arco appartiene a: un cammino alternante PARI che inizia in un vertice libero, oppure un ciclo alternante.

Sia (x_0, x_1) un arco che appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali.
Sia M un generico matching massimale t.c. $(x_0, x_1) \in M$ e M' un generico matching massimale t.c. $(x_0, x_1) \notin M$.
Per ipotesi, almeno un M e un M' siffatti esistono.
Definiamo $M'' = M \oplus M'$. Il grado di ogni nodo di M'' è al più 2.
Avremo inoltre che $(x_0, x_1) \in M''$.
Procediamo iterativamente scegliendo nodi $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_m$ tali che $(x_i, x_{i+1}) \in M''$ e tali che $x_{i+2} \neq x_i$.
Mi fermo o quando non vi sono più nodi da scegliere o quando x_m è uguale ad un nodo già presente.

All Different Constraint

Un arco appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali ($\Rightarrow$) per un arbitrario matching massimale M, l'arco appartiene a: un cammino alternante PARI che inizia in un vertice libero, oppure un ciclo alternante.

Possono essersi verificati due casi.

- E' stato generato un ciclo.
- Non è stato generato un ciclo. In questo caso partiamo a ritroso da x_0 con la stessa tecnica, introducendo nodi $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-t}$ tali che $(x_{i-1}, x_i) \in M''$. Anche in questo caso potrebbe succedere che:
  - E' stato generato un ciclo (a pensarci bene questo non può più accadere)
  - Non è stato generato nessun ciclo.

All Different Constraint

Un arco appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali ($\Rightarrow$) per un arbitrario matching massimale M, l'arco appartiene a: un cammino alternante PARI che inizia in un vertice libero, oppure un ciclo alternante.

Se non viene mai generato un ciclo allora il cammino è alternante sia per M che per M'. Se avesse un numero di nodi dispari, allora sarebbe aumentante per uno dei due (quello con meno archi), che contraddice l'ipotesi di massimalità di entrambi. Allora è pari.

Nel caso venga generato un ciclo, ci sono due casi: (x_0, x_1) è parte del ciclo o meno. Supponiamo non lo sia, allora (fate un disegnino) vi è un nodo con grado 3 in M'': assurdo. Dunque lo è: l'arco appartiene ad un ciclo alternante sia per M che per M'.

All Different Constraint

Un arco appartiene ad alcuni ma non a tutti i matching massimali ($\Rightarrow$) per un arbitrario matching massimale M, l'arco appartiene a: un cammino alternante PARI che inizia in un vertice libero, oppure un ciclo alternante.

Se non viene mai generato un ciclo allora il cammino è alternante sia per M che per M'. Se avesse un numero di nodi dispari, allora sarebbe aumentante per uno dei due (quello con meno archi), che contraddice l'ipotesi di massimalità di entrambi. Allora è pari.

Nel caso venga generato un ciclo, ci sono due casi: (x_0, x_1) è parte del ciclo o meno. Supponiamo non lo sia, allora (fate un disegnino) vi è un nodo con grado 3 in M'': assurdo. Dunque lo è: l'arco appartiene ad un ciclo alternante sia per M che per M'.

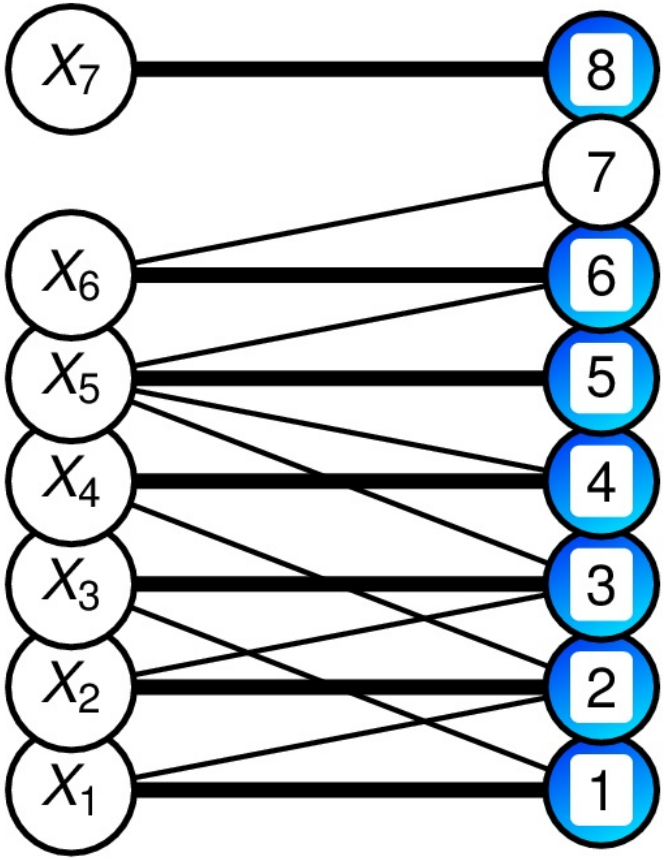
All Different Constraint

Efficient Filtering

- Si trovi un matching massimale M (tempo $O(k^{3/2}d)$).
- Per ogni nodo libero, si cercano cammini alternanti pari. Archi e nodi raggiunti si tengono.
- Si individuano i cicli (componenti fortemente connesse).
- Gli archi di M rimasti fuori da queste due visite devono essere presenti in tutti i matching.
- Gli archi non di M rimasti fuori da queste due visite vanno eliminati.
- Costo globale: $O(k^{3/2}d)$
- Al 'passaggio successivo' si lavora sulle variazioni.

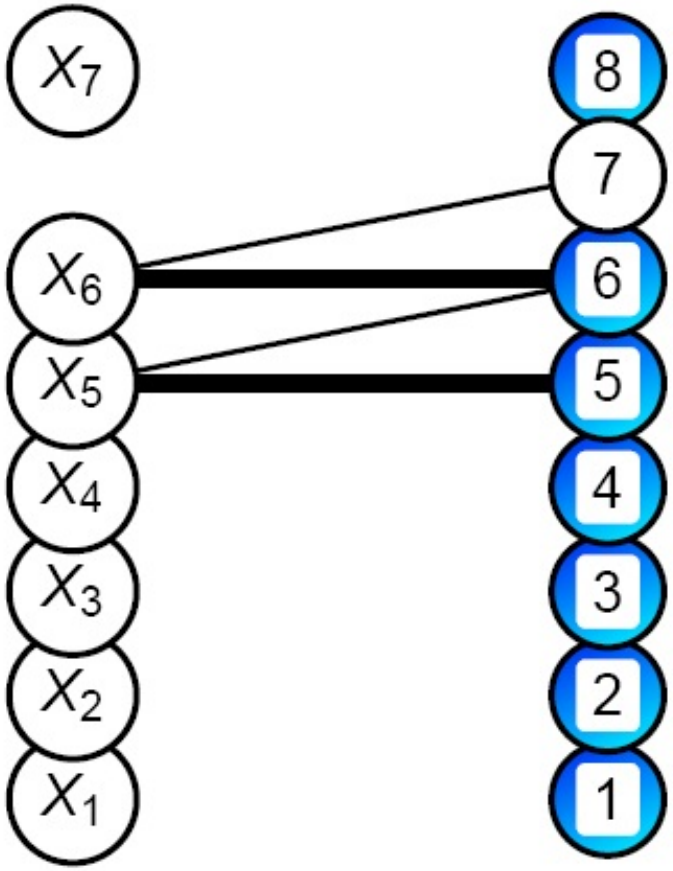
All Different Constraint

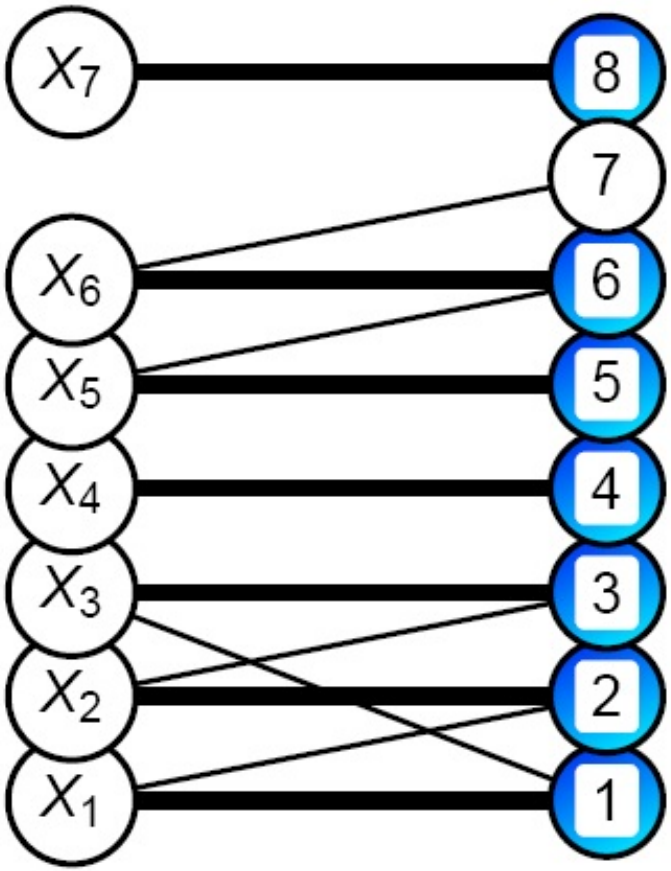
Efficient Filtering



All Different Constraint

Efficient Filtering



All Different Constraint

Efficient Filtering