UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica II*
Alcune Soluzioni

1 Automi e Linguaggi

1. Sia dato $p \in \mathbb{N}, p > 0$ dimostri che il linguaggio

$$L_p = \left\{ a_0 a_1 \dots a_n \;\middle|\; a_i \in \{0,1\}, \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i \ \mathbf{mod}\ p = 0 \right\}$$

è regolare.

Bisogna ragionare su due aspetti:

(a) *Quanto pesa* il prossimo bit entrante (modulo p). Consideriamo ad esempio $p = 10$. Il primo bit pesa 1, il secondo 2, il terzo 4, il quarto 8, il quinto 6 (16), il sesto 2 (32), il settimo 4 (64), l'ottavo 8 (128), ... Si osservi che abbiamo trovato una periodicità: i pesi sono $1(2,4,8,6)^*$. Riproviamo, ad esempio con $p = 7$. Avremo che il primo bit pesa 1, il secondo 2, il terzo 4, il quarto 1 (8), il quinto 2 (16), il sesto 4 (32), ... Ora la periodicità è semplicemente $(1,2,4)^*$.

(b) *Quanto vale*, modulo p, il valore già riconosciuto? Esempio, se la stringa finora era 1101101, allora abbiamo calcolato $1 + 2 + 8 + 16 + 64 = 91$. 91 modulo 10 fa 1, 91 modulo 7 fa 0. Ovviamente questo valore può essere un numero da 0 a $p - 1$.

Si introducono dunque degli stati $q_{i,j}$ dal significato: finora la somma modulo p è i, mentre il prossimo bit pesa j. Supponiamo sia k il successore di j nel periodo dei pesi. Avremo che

$$\delta(q_{i,j}, 0) = q_{i,k} \qquad \delta(q_{i,j}, 1) = q_{(i+j\ \mathbf{mod}\ p),k}$$

Gli stati con $i = 0$ sono quelli finali. Interessante può essere a questo punto minimizzare l'automa ricavato. Si provi a farlo per $p = 3$.

2. Sia $\Sigma = \{0,1,2\}$ un alfabeto e $\preceq \subseteq \Sigma \times \Sigma$ la relazione definita estensionalmente nel modo seguente:

$$0 \preceq 0, 0 \preceq 1, 0 \preceq 2, 1 \preceq 1, 1 \preceq 2, 2 \preceq 2, 2 \preceq 0$$

Si mostri che l'insieme A è regolare

$$A \ = \ \left\{ a_1 \dots a_n \in \Sigma^* \;\middle|\; n > 0 \wedge (\forall i \in \{0, \dots, n-1\})(a_i \preceq a_{i+1}) \wedge \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv_3 0 \right\}$$

Per farlo, mostriamo che i linguaggi

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \left\{ a_1 \cdots a_n \in \Sigma^* \;\middle|\; (n > 0) \wedge (\forall i \in \{0, \dots, n-1\})(a_i \preceq a_{i+1}) \right\} \\ A_2 & = & \left\{ a_1 \cdots a_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv_3 0 \right\} \end{array}$$

sono regolari. Poiché $A = A_1 \cap A_2$ e i linguaggi regolari sono chiusi per intersezione (finita) cio prova la regolarità di A.

A_1 è accettato dall'automa M_1 seguente, con $F_1 = \{q_1, q_2, q_3\}$ e δ_1 definita dalla tabella:

	0	1	2
q_0	q_3	q_1	q_2
q_1	q_4	q_1	q_2
q_2	q_3	q_4	q_2
q_3	q_3	q_1	q_2

Intuitivamente, giunti in q_1 si possono accettare solo 1 e 2, giunti in q_2 si possono accettare solo 2 e 0, giunti in q_3 si possono accettare sia 0 che 1 che 2. q_4 è uno stato *pozzo* di refutazione.

A_2 è accettato dall'automa M_2 seguente, con $F_2 = \{q_0\}$ e δ_2 definita dalla tabella:

	0	1	2
q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0	q_1

Intuitivamente, essere in q_i significa che la somma, modulo 3, finora è i. Ci si muove su un altro stato a seconda di tale valore e dell'input, ovvero

$$\delta(q_i, j) \stackrel{\mathsf{def}}{=} q_{i+j \,\mathbf{mod}\, 3}$$

Qualora si volesse costruire l'automa minimo per riconscere A, si potrebbe procedere come segue. Partendo dai due automi $M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1\rangle$ ed $M_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0, F_2\rangle$ si costruisce l'automa

$$M \stackrel{\mathsf{def}}{=} \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle q_0, q_0\rangle, \delta, F\rangle$$

ove

- $\delta(\langle q_i, q_j\rangle, a) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \langle \delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a)\rangle$ e
- $F = \left\{ \langle q_i, q_j\rangle \;\middle|\; q_i \in F_1 \wedge q_j \in F_2 \right\}$

L'automa M ha 12 stati. E' evidente che riconosce l'intersezione dei due linguaggi. Esso infatti mima le computazioni su entrambi gli automi e accetta solo le stringhe accettate da entrambi. Si procede poi alla riduzione con l'algoritmo di minimizzazione.

3. Si dimostri che

$$L = \left\{ 0^m 1^n 0^p 1^{2p} \;\middle|\; m, n, p \in \mathbb{N} \right\}$$

è libero dal contesto.

Sia G individuata dalle produzioni:

$$\begin{array}{llll} R1 & S & \rightarrow & 0S \\ R2 & S & \rightarrow & A \\ R3 & A & \rightarrow & 1A \\ R4 & A & \rightarrow & B \\ R5 & B & \rightarrow & 0B11 \\ R6 & B & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

Mostriamo dunque che $L = L(G)$.

$L \subseteq L(G)$: Sia $x = 0^m 1^n 0^p 1^{2p}$. Con m applicazioni di $R1$ seguite da una di $R2$, n di $R3$ seguite da una di $R4$, p di $R5$ seguite da una di $R6$ di ha che $S \overset{G}{\Rightarrow}_* x$.

$L(G) \subseteq L$: L'unica produzione che conduce ad una stringa di soli terminali è $R6$ che elimina la B. Ogni altra produzione lascia esattamente un non terminale in ogni stringa. La B viene introdotta da altre B o dalla $R4$ partendo da una A. La A viene introdotta da altre A o dalla R partendo da una S. Pertanto le uniche derivazioni di stringhe di terminali avranno la sequenza $R1^*R2R3^*R4R5^*R6$ che generano, di fatto, stringhe di L.

4. Si dimostri che L dell'esercizio precedente non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia. Sia k il numero di stati di un DFA M che accetta L. Consideriamo la stringa 010^k1^{2k}. Esiste sicuramente uno stato q tale che

$$\delta^*(q_0, 010^i) = q = \delta^*(q_0, 010^j)$$

con $0 \leq i < j \leq k$. Inoltre

$$\delta^*(010^k1^{2k}) = \delta^*(\delta^*(q_0, 010^j), 0^{k-j}1^{2k}) = \delta^*(q, 0^{k-j}1^{2k}) \in F$$

Ma allora M accetta anche $010^{k+(i-j)}1^{2k}$ che non appartiene a L: assurdo.

2 Computabilità

1. Si mostri che esiste x tale che $E_x = \{x, x+2, x+4, x+6, \ldots\}$.

Si consideri la funzione $\psi(a,b) = a + 2b$. E' ovviamente calcolabile (in particolare è primitiva ricorsiva). Per il Teorema s-m-n esiste g ricorsiva tale che $\forall a \forall b \left(\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)\right)$. Per definizione dunque, fissato a avremo che $E_{g(a)} = \{a, a+2, a+4, a+6\}$. Per il primo teorema di ricorsione, esiste x tale che $\varphi_x = \varphi_{g(x)}$. Pertanto

$$E_x = E_{g(x)} = \{x, x+2, x+4, x+6, \ldots\}$$

□

2. Si studi
$$B = \{ \ x \mid W_x = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\} \ \}$$
B è ovviamente estensionale e non banale. Per il Teorema di Rice non può dunque essere ricorsivo. Non contenendo indici di funzioni con dominio finito, inoltre, per il Teorema di Rice-Shapiro non può essere r.e.

Proviamo che B è produttivo, mostrando che $\bar{K} \preceq B$. Si consideri la funzione:
$$\psi(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{Se } \varphi_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi e } b \text{ è una potenza di 2} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
ψ è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste g ricorsiva tale che $\forall a \forall b \left(\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)\right)$.

Sia $x \in \bar{K}$. Allora il test $\varphi_x(x) \not\downarrow$ in $\leq b$ passi è verificato per ogni b. Dunque $W_{g(x)} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$: $g(x) \in B$.

Sia $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$. Allora esiste n_0 tale che $\varphi_x(x)$ termina in n_0 passi. Dunque per tutti i $b \geq n_0$ il test è falso. Pertanto $W_{g(x)} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^j\}$, dove j è tale che $2^j < n_0 \leq 2^{j+1}$: $g(x) \notin B$.

Mostriamo ora che anche $\bar{B}$ è produttivo, mostrando che $\bar{K} \preceq \bar{B}$, ovvero $K \preceq B$. Si consideri la funzione:
$$\eta(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{Se } \varphi_a(a) \downarrow \text{ e } b \text{ è una potenza di 2} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
η è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste f ricorsiva tale che $\forall a \forall b \left(\eta(a,b) = \varphi_{f(a)}(b)\right)$.

Sia $x \in K$. Allora il test $\varphi_x(x) \downarrow$ è verificato per ogni b. Dunque $W_{f(x)} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$: $f(x) \in B$.

Sia $x \notin K$. Allora $W_{f(x)} = \emptyset$: $f(x) \notin B$. $\square$

3. Si studi l'insieme:
$$C = \{ \ x \mid (\forall y \leq 1000)(\varphi_x(y) \downarrow) \wedge (\forall y < 1000)(\varphi_x(y) \leq \varphi_x(y+1)) \wedge \varphi_x(2500) = 3 \ \}$$
C è ovviamente r.e. Dato x, infatti, sappiamo costruire la macchina φ_x. Si tratta ora di verificare i risultati delle 1002 computazioni $\varphi_x(0), \ldots, \varphi_x(1000), \varphi_x(2500)$. Tali computazioni potrebbero non terminare, ma se $x \in C$ terminano per definizione di C e dunque siamo in grado di provare l'appartenenza di x a C.

C è estensionale e non banale. Per il Teorema di Rice non è ricorsivo.

Mostriamo dunque che C è completo riducendo $K \preceq C$. Si consideri la funzione:
$$\psi(a,b) = \begin{cases} 3 & \text{Se } \varphi_a(a) \downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ψ è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste f ricorsiva tale che $\forall a \forall b \left(\psi(a, b) = \varphi_{f(a)}(b)\right)$.

Sia $x \in K$. Allora il test $\varphi_x(x) \downarrow$ è verificato. $\varphi_{f(x)}(b) = 3$ per ogni b. In particolare per $b = 0, 1, 2, \ldots, 1000, 2500$: $f(x) \in C$.

Sia $x \notin K$. Allora $\varphi_{f(x)}(b) \uparrow$ per ogni b. Dunque, in particolare $\varphi_{f(x)}(2500)$ non è 3: $f(x) \notin B$. $\square$

4. Si mostri che esiste x tale che $E_x = W_x = \{x\}$.

   Si consideri la funzione

$$\psi(a, b) = \begin{cases} b & \text{Se } b = a \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   ψ è ovviamente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste g ricorsiva tale che

$$\forall a \forall b \left(\psi(a, b) = \varphi_{g(a)}(b)\right)$$

   Fissato a, dunque, avremo che $\varphi_{g(a)}(b)$ è definita solo su $b = a$, dando come risultato b stesso. Pertanto $W_{g(a)} = E_{g(a)} = \{a\}$.

   Per il primo teorema di ricorsione, esiste x tale che $\varphi_x = \varphi_{g(x)}$. Pertanto

$$E_x = E_{g(x)} = \{x\} = W_{g(x)} = W_x$$

   $\square$

5. Si dimostri che esiste x tale che

$$E_x = \{0, 1, 2, \ldots, a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_x\}$$

   ove, per $i = 0, \ldots, x$, a_x è l'a x-esima cifra dell'espansione decimale di e^x.

   E' noto che esiste uno sviluppo in serie di e^x per cui

$$e^x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

   da cui siamo in grado, dato i, di calcolare la serie fino ad avere certezza della i-esima cifra di e^x. Sia $f(x)$ la funzione ricorsiva totale che restituisce $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_x$.

   Si definisce dunque

$$\psi(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } y \leq f(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si applichi dunque il Teorema s-m-n ed il primo teorema di ricorsione.

6. Si studi l'insieme $E = \left\{ x \,\middle|\, E_x = \{x\} \right\}$.

   E non è estensionale. Sia infatti $i \in E$. Aggiungendo stati inutili possiamo costruire una MdT j tale che $i \neq j$ e $\varphi_i = \varphi_j$. Ora, essendo le due macchine equivalenti, deve valere che $E_i = E_j$. Ma $E_i = \{i\}$ (per l'ipotesi che $i \in E$). Dunque $E_j = \{i\} \neq \{j\}$ pertanto $j \notin E$.

Non possiamo dunque usare i Teoremi di Rice e Rice-Shapiro per stabilire se E sia o meno ricorsivo o r.e.

Intuitivamente E non è r.e. Per testare l'appartenenza di x ad E dovremmo infatti costruire la MdT x-esima e poi provare la computazione sugli infiniti valori $\varphi_x(0), \varphi_x(1), \varphi_x(2), \varphi_x(3), \varphi_x(4), \ldots$, verificando che essa termina almeno su un valore, restituendo x, e non restituisce mai valori diversi. In particolare ciò coinvolge il calcolo di $\varphi_x(x)$.

Proviamo a dare una dimostrazione più formale dimostrando che E è produttivo ovvero mostrando che $\bar{K} \preceq E$. Si consideri la funzione:

$$\psi(a,b,c) = \begin{cases} b & \text{Se } \varphi_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq c \text{ passi} \\ b+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ψ è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste f ricorsiva tale che

$$\forall a \forall b \forall c \left(\psi(a,b,c) = \varphi_{f(a,b)}(c)\right)$$

Ora, se $a \notin K$, la condizione del test è sempre vera e dunque la funzione termina sempre, restituendo b. Se, invece, $a \in K$, per valori 'piccoli' di c la funzione vale b. Vale invece $b+1$ per i valori di c maggiori o uguali al numero di passi necessari a $\varphi_a(a)$ per terminare:

$$E_{f(a,b)} = \begin{cases} \{b\} & \text{Se } a \notin K \\ \{b, b+1\} & \text{Se } a \in K \end{cases}$$

Per il II Teorema di ricorsione esiste g ricorsiva totale tale che per ogni x vale che $\varphi_{f(x,g(x))} = \varphi_{g(x)}$.

Sia $x \in \bar{K}$. Allora $\varphi_{g(x)}(c) = \varphi_{f(x,g(x))}(c) = g(x)$ per ogni c. Dunque $g(x) \in E$.

Sia $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$. Allora $\varphi_{g(x)}(c) = g(x)$ per valori 'piccoli' di c. Vale invece $g(x)+1$ per i valori di c maggiori o uguali al numero di passi necessari a $\varphi_x(x)$ per terminare. Dunque $g(x) \notin E$.

Non paghi di ciò, mostriamo che anche $\bar{E}$ è produttivo, riducendo $K \preceq E$.

Si consideri la funzione:

$$\psi(a,b,c) = \begin{cases} b & \text{Se } \varphi_a(a) \downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ψ è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste f ricorsiva tale che

$$\forall a \forall b \forall c \left(\psi(a,b,c) = \varphi_{f(a,b)}(c)\right)$$

Ora, se $a \in K$, la condizione del test è vera e dunque la funzione è totale e costante, di valore b. Altrimenti, la funzione è ovunque indefinita.

Per il II Teorema di ricorsione esiste g ricorsiva totale tale che per ogni x vale che $\varphi_{f(x,g(x))} = \varphi_{g(x)}$.

Sia $x \in K$. Allora $E_{g(x)}(c) = \varphi_{f(x,g(x))}(c) = \{g(x)\}$ per ogni c. Dunque $g(x) \in E$.

Sia $x \notin K$. Allora $E_{g(x)}(c) = \emptyset$. Dunque $g(x) \notin E$.

7. Si studino l'insieme C ed il suo complementare:

$$C = \left\{ x \,\middle|\, (\forall y \in \mathbb{N})(\varphi_x(y+1)\downarrow \wedge \varphi_x(y)\downarrow \wedge \varphi_x(y+1) > \varphi_x(y)) \right\}$$

L'insieme C ed il suo complementare $\bar{C}$ sono entrambi produttivi. Per mostrarlo, riduciamo $K \preceq C$ e $\bar{K} \preceq C$.

Si consideri la funzione:

$$\eta(a,b) = \begin{cases} y & \text{Se } \varphi_a(a)\downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

η è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste f ricorsiva tale che $\forall a \forall b \left(\eta(a,b) = \varphi_{f(a)}(b)\right)$.

Sia $x \in K$. Allora per ogni y $\varphi_{f(x)}(y) = y$. Pertanto $f(x) \in C$.

Sia $x \notin K$. Allora Allora, ad esempio, $\varphi_{f(x)}(0)\uparrow$: $f(x) \notin C$.

Si consideri ora la funzione:

$$\psi(a,b) = \begin{cases} y & \text{Se } \varphi_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ψ è evidentemente calcolabile. Per il Teorema s-m-n esiste g ricorsiva tale che $\forall a \forall b \left(\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)\right)$.

Sia $x \in \bar{K}$. Allora il test $\varphi_x(x) \not\downarrow$ in $\leq y$ passi è verificato per ogni y. Dunque $\varphi_{g(a)}(y) = y$ per ogni y: $g(x) \in C$.

Sia $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$. Allora esiste n_0 tale che $\varphi_x(x)$ termina in n_0 passi. Dunque per tutti gli $y \geq n_0$ il test è falso. Dunque $\varphi_{g(a)}(n_0) = \varphi_{g(a)}(n_0+1) = 0$: $g(a) \notin C$. $\square$

8. Sia η una funzione calcolabile che associa ad ogni programma `while` scritto in sintassi concreta un diverso numero naturale. Si assuma di saper calcolare anche l'inversa di η (dato un numero, restituire un programma `while` oppure la costante $\perp$). Si denoti con $\mathcal{W}$ l'insieme dei programmi while e con $|P|$ il numero di simboli (la lunghezza) di un programma while, tolti gli spazi ridondanti e i simboli di a capo. Si studi l'insieme:

$$D = \left\{ x \,\middle|\, (\exists P \in \mathcal{W})(x = \eta(P)) \wedge (\forall Q \in \mathcal{W})(|Q| \leq |P| \longrightarrow P(Q)\downarrow) \right\}$$

D è r.e. Dato x, sappiamo calcolare P tale che $x = \eta(P)$. Misuriamo dunque la lunghezza $|P| = n$ e generiamo tutti i programmi while Q tali che $|Q| \leq n$. Poichè per scrivere i programmi while ci serviamo di un alfabeto finito Σ, al più vi saranno $|\Sigma|^n$ programmi da testare. Se $x \in D$ allora $P(Q)$ terminerà per tutti questi e lo sapremmo verificare.

Mostriamo ora che D è creativo, riducendo $K \preceq D$. Sapremmo, con un po' di pazienza, costruire un programma P tale che:

$$[\![P]\!](\underline{x}, Q) = \begin{cases} 0 & \text{Se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ove $\underline{x}$ è il numerale associato al numero $x \in \mathbb{N}$. Sappiamo anche costruire lo specializzatore *spec* tale che

$$[\![spec(P, \underline{x})]\!](Q) = [\![P]\!](\underline{x}, Q)$$

Per fissare le idee, $[\![spec(P, \underline{x})]\!]$ è un programma while, di una certa dimensione, che dipende da x. Allora la funzione

$$f(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \eta([\![spec(P, \underline{x})]\!])$$

è ricorsiva totale.

Sia $x \in K$. Allora $[\![spec(P, \underline{x})]\!]$ termina su tutti i possibili input Q dunque in particolare su quelli per cui $|Q| \leq |\,[\![spec(P, \underline{x})]\!]\,|$. Dunque $\eta([\![spec(P, \underline{x})]\!]) \in D$.

Sia ora $x \notin K$. Allora $[\![spec(P, \underline{x})]\!]$ è ovunque indefinita, in particolare sull'input $Q = [\![spec(P, \underline{x})]\!]$. Pertanto $\eta([\![spec(P, \underline{x})]\!]) \notin D$.$\Box$

9. Si studino gli insiemi

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{\langle x, y\rangle \,:\, (\forall z \leq y)(\varphi_x(z) = 2y) \wedge \varphi_x(2y) = y^2 - 1\} \\ E & = & \{\langle x, y\rangle \,:\, (\forall z \leq y)(\varphi_x(z) \uparrow) \wedge (\forall z > y)(\varphi_x(z) = x)\} \end{array}$$

SOLUZIONE:

D è palesemente r.e. Mostriamo che è completo riducendo K a lui. Sia ψ definita come:

$$\psi(x, z) = \begin{cases} 10 & x \in K \wedge z \leq 5 \\ 24 & x \in K \wedge z > 5 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il Teorema s-m-n esiste g ricorsiva totale tale che $\psi(x, z) = \varphi_{g(x)}(z)$. Ma allora:
$x \in K$ implica che $\langle g(x), 5\rangle \in D$
$x \notin K$ implica che $\langle g(x), 5\rangle \notin D$
Dunque $\langle g(x), 5\rangle$ è la funzione di riduzione da K a D.

E non pare poter essere r.e. Mostriamolo in modo rigoroso riducendo $\bar{K}$ a lui. Sia ψ definita come:

$$\psi(x,u,z) = \begin{cases} \uparrow & z \leq 5 \\ u & z > 5 \wedge M_x(x) \not\downarrow \text{ in } \leq z \text{ passi} \\ z & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il Teorema s-m-n esiste g ricorsiva totale tale che $\psi(x,u,z) = \varphi_{g(x,u)}(z)$. Si osservi che:
$x \in \bar{K}$ implica che $\varphi_{g(x,u)}(z) \uparrow$ per $z \leq 5$ e $\varphi_{g(x,u)}(z) = u$ per tutti gli altri valori.
$x \notin \bar{K}$ implica che $\varphi_{g(x,u)}(z) \uparrow$ per $z \leq 5$, $\varphi_{g(x,u)}(z) = u$ per alcuni valori, ma $\varphi_{g(x,u)}(z) = z$ per tutti gli z maggiori o uguali al numero di passi per cui $M_x(x)$ termina.

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste ν ricorsiva totale tale che $\varphi_{g(x,\nu(x))}(z) = \varphi_{\nu(x)}(z)$. Ma allora $\langle \nu(x), 5 \rangle$ è la funzione di riduzione cercata.