UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*

24 Gennaio 2018

1. Si dia la definizione di grammatica monotona. Si mostri che se G è monotona, il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si enunci e dimostri il primo teorema di ricorsione.

3. Si dica (motivando) se la seguente funzione è o meno primitiva ricorsiva:

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{se } b = 0 \\ Ack(2,b) & \text{se } a = 0 \wedge b > 0 \\ f(a-1,b+1) & \text{se } a > 0 \wedge b > 0 \end{cases}$$

4. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \left\{ u_n \cdots u_0 \in \{0,1\}^* \,\middle|\, n \geq 0, \sum_{i=0}^{n} u_i 2^i \ \mathbf{mod}\ 3 \neq 0 \right\}$$

5. Si studino gli insiemi e i loro complementari ($\subset$ denota l'inclusione stretta):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \left\{ (x,y) \,\middle|\, \varphi_x(y^2) = 2y \right\} \\ C & = & \left\{ x \,\middle|\, \emptyset \subset W_x \subset \mathbb{N} \right\} \\ D & = & \left\{ x \,\middle|\, x \text{ è pari e } (\exists y > x)(\varphi_y(x) = 0) \right\} \end{array}$$

Università degli Studi di Udine

Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*

21 Febbraio 2018

1. Si dia la definizione di grammatica monotona. Si mostri che se G è monotona, il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che ogni insieme produttivo ha un sottoinsieme ricorsivamente enumerabile e infinito.

3. Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una funzione. Si definiscano le classi $TIME(f(n))$, $NTIME(f(n))$. Si definiscano le classi P ed NP. Si dimostri che $P \subseteq NP$.

4. Si mostri (senza usare la tecnica delle riduzioni) che

$$A = \left\{ x \,\middle|\, \varphi_x \text{ è totale} \right\}$$

non è ricorsivamente enumerabile.

5. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$B = \left\{ 0^n 1^{n-1} 0^4 1^5 \,\middle|\, n \geq 1 \right\}$$

6. Si studino gli insiemi e i loro complementari

$$\begin{array}{rcl} C & = & \left\{ x \,\middle|\, \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(x) = 2^x \right\} \\ D & = & \left\{ \langle x, y \rangle \,\middle|\, (\forall z > y)(\varphi_x(z) = z) \right\} \end{array}$$

7. Si proponga (motivandone la risposta) una collocazione nella gerarchia delle classi di complessità computazionale del seguente problema:

$$E = \left\{ x \in \{0,1\}^* \,\middle|\, x, \text{ letto come simboli ASCII, è un programma C che compila correttamente} \right\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*
14 GIUGNO 2018

1. Si dia la definizione di *linguaggio libero dal contesto* e si dimostri che i linguaggi liberi dal contesto non sono chiusi per intersezione e complementazione.
2. Si definisca l'insieme semplice e si dimostri che un insieme semplice non è né ricorsivo né creativo.
3. Si collochino i seguenti insiemi nella gerarchia di Chomsky

$$\begin{array}{rcl} A & = & \left\{ x \in \{a,b,c\}^* \;\middle|\; x \text{ non contiene sottostringhe del tipo } aabb \text{ nè } bbcc \text{ nè } aaaa \right\} \\ B & = & \left\{ x \in A \;\middle|\; \#(a,x) = \#(b,x) = \#(c,x) \right\} \end{array}$$

   ove $\#(car, str)$ restituisce il numero di occorrenze del carattere *car* nella stringa *str*.
4. Sia p_i l'i-esimo numero primo ($p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$). Si mostri che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$W_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

5. Si studino i seguenti insiemi ed i loro complementari

$$\begin{array}{rcl} C & = & \left\{ x \;\middle|\; \varphi_{\lfloor \frac{x}{3} \rfloor}(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor) = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \right\} \\ D & = & \left\{ x \;\middle|\; (\forall y > x)(\exists z > y)(\varphi_x(z)\downarrow) \right\} \\ E & = & \left\{ \langle x, y \rangle \;\middle|\; W_x \not\subseteq E_y \right\} \end{array}$$

6. Si dimostri che $NP \subseteq PSPACE$

Università degli Studi di Udine
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*
24 LUGLIO 2018

1. Si definisca la cosiddetta *Gerarchia di Chomsky*, chiarendo le differenze tra le varie famiglie di linguaggi e riportando un rappresentante per ciascuna di esse.

2. Si enunci e dimostri il Teorema di Rice.

3. Fissato $x \in \mathbb{N}$, si consideri l'insieme

$$A_x \;=\; \left\{\; 1^a 0^x 1^b 0^{x!} 1^c \;\middle|\; a > 0, b > 0, c > 0 \;\right\}$$

   Se A_x è regolare, si definisca l'automa minimo per $x = 3$. Altrimenti si dimostri che non è regolare. Si consideri ora

$$A \;=\; \bigcup_{x \geq 0} A_x$$

   Se A è libero dal contesto, si definisca una grammatica in forma normale di Chomsky che lo genera, altrimenti si dimostri che non è libero dal contesto.

4. Relativamente alla enumerazione delle MdT vista a lezione, si risponda alla domanda (motivando la risposta): $27 \in K$?

5. Si studino i seguenti insiemi ed i loro complementari

$$\begin{array}{rcl} B &=& \left\{\; x \;\middle|\; (\exists y > x)\varphi_x(y) = 2y \;\right\} \\ C &=& \left\{\; x \;\middle|\; \mathsf{Even} \subseteq E_x \;\right\} \\ D &=& \left\{\; \langle x, y\rangle \;\middle|\; (W_x \subseteq E_y) \wedge (\forall z > y)(\varphi_z(x)\downarrow) \;\right\} \end{array}$$

   Ove $\mathsf{Even} = \left\{\; x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x\, \underline{mod}\, 2 = 0 \;\right\}$.

6. Si consideri il problema: dato un grafo non diretto $G = (N, E)$ stabilire se esiste un assegnamento $col : N \longrightarrow \{0, 1\}$ tale che per ogni arco $\{i, j\}$ di E $col(i) \neq col(j)$.

   Si dimostri che il problema sta in NP.

Chi avesse in piano di studi l'esame da **6CFU** può tralasciare l'esercizio 6.

Università degli Studi di Udine

Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*

10 SETTEMBRE 2018

1. Si calcoli, usando esclusivamente la risoluzione di sistemi di equazioni su espressioni regolari, il linguaggio accettato dal DFA $M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\} \rangle$ dove δ è definita dalla seguente tabella

	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_3	q_1
q_3	q_0	q_1

2. Sia diano le definizioni di <u>insieme ricorsivamente enumerabile</u> e di <u>insieme produttivo</u> e si dimostri, usando direttamente quest'ultima definizione, che un insieme produttivo <u>non può</u> essere ricorsivamente enumerabile.

3. Si mostri che il seguente linguaggio non è libero dal contesto:

$$A = \left\{ 0^n\, 1^a\, 0^n\, 1^b\, 0^n \;\middle|\; a > 0, b > 0, n > 0 \right\}$$

4. Si definisca la classe P e si dimostri che il linguaggio A dell'esercizio 3 appartiene a P.

5. Si studino i seguenti insiemi ed i loro complementari

$$\begin{array}{rcl} B & = & \left\{ x \;\middle|\; (\forall y > x)(\varphi_y(x) = x) \right\} \\ C & = & \left\{ x \;\middle|\; (\exists y > x)(\varphi_x(y) = y) \right\} \\ D & = & \left\{ x \;\middle|\; E_{\lceil \frac{x}{2} \rceil} = \mathsf{Even} \right\} \end{array}$$

   ove $\mathsf{Even} = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x \,\underline{mod}\, 2 = 0 \right\}$.

6. Si definisca un insieme contemporaneamente non ricorsivamente enumerabile e non produttivo (motivando le ragioni che garantiscono questa proprietà).

Università degli Studi di Udine

Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*

29 GENNAIO 2019

1. Si dia la definzione di grammatica monotona. Si mostri che se G è monotona, il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si enunci e dimostri l'indecidibilità dell'halting problem

3. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \left\{ u_n \cdots u_0 \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{La stringa rappresenta un numero} \\ \text{in complemento a 2,} \\ \text{minore di zero e multiplo di } -4. \\ u_n \text{ è il bit più significativo} \end{array} \right\}$$

4. Si studino gli insiemi (e i loro complementari).
   $\subset$ denota l'inclusione stretta.

$$\begin{array}{rcl} B &=& \left\{ x \;\middle|\; \varphi_{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \right\} \\ C &=& \left\{ x \;\middle|\; (\forall y > \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)(\varphi_x(y) = y!) \right\} \\ D &=& \left\{ x \;\middle|\; x \text{ è pari oppure } (\exists y > x)(\varphi_y(x) = 0) \right\} \end{array}$$

5. Si definiscano le classi P ed NP. Assumendo $P \subset NP$, si collochi il seguente insieme nella classe opportuna:

$$E = \left\{ x_0 x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x_{2i+1} \right\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*
19 FEBBRAIO 2019

1. Si dimostri che la classe di linguaggi accettata da DFA e quella accettata da NFA coincidono.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si dimostri che un insieme produttivo non può essere finito.

3. Si dica (motivando) se la seguente funzione è o meno primitiva ricorsiva:

$$\begin{array}{rcll} f(x,0) & = & x & x \geq 0 \\ f(0,y) & = & f(2,y-1) & y > 0 \\ f(x,y) & = & f(x-1,y+1) & x > 0, y > 0 \end{array}$$

4. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \left\{ u_n \cdots u_0 \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{La stringa è palindroma e rappresenta un numero} \\ \text{binario multiplo di, o uguale a, 4} \\ (u_n \text{ è il bit più significativo, all'inizio} \\ \text{ci possono essere 0 inutili}) \end{array} \right\}$$

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari).

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{ x \mid (\exists y > x!)(\varphi_x(y) = y!) \} \\ C & = & \{ x \mid \{0,1,2\} \subseteq E_x \subseteq \{0,1,2,3\} \} \\ D & = & \{ x \mid (\exists y > x!)(\varphi_x(y) = x!) \} \end{array}$$

6. Si consideri il seguente problema: ci sono k giocatori dei quali sono note le altezze $a_1, \ldots, a_k$. Si vuole suddividerli in gruppi di 4 per organizzare un torneo 3 contro 3 (in tale torneo le squadre sono costituite da 4 giocatori di che si alternano in campo) in modo tale che

   - Presa ogni coppia di squadre, la differenza tra la somma totale delle altezze dei giocatori di una squadra e quelli dell'altra è minore o uguale a 15cm.
   - Presa ogni coppia di squadre, la differenza tra l'altezza del più alto di ciascuna squadra è minore o uguale a 6cm.

   Si dimostri che il problema di esistenza di una suddivisione che rispetti i vincoli sopra sta in NP.

Università degli Studi di Udine
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*
25 Giugno 2019

1. Sia fissato un alfabeto Σ che sta sullo sfondo per le prossime nozioni. Si definisca la nozione di linguaggio. Dato un linguaggio L si definisca la relazione R_L. Dato un DFA M si definisca la relazione R_M. Sia ora M un DFA che accetta L: si mostri che R_M raffina R_L.

2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si dimostri che un insieme produttivo non è r.e., e che contiene un sottoinsieme r.e. e infinito.

3. Si dica quando un linguaggio $L \in NP$ e cosa significhi essere NP completo. Si mostri dunque che 3SAT è NP-completo.

4. Si dica (motivando) se, fissato $i \in \mathbb{N}$, il seguente insieme è (o meno) regolare o libero dal contesto.
$$A_i = \left\{ \ 1^a 0^b 1^c \ \middle| \ abc > 0 \land a = c \land b = i! \ \right\}$$
Si studi (allo stesso modo): $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):
$$\begin{array}{rcl} B & = & \left\{ \ x \ \middle| \ (\exists y \le x)(\varphi_{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}(y) \downarrow) \ \right\} \\ C & = & \left\{ \ \langle x, y \rangle \ \middle| \ E_y = \{0, 1, 2, \ldots, x\} \ \right\} \\ D & = & \left\{ \ \langle x, y \rangle \ \middle| \ (\forall z < x)(\varphi_z(y) \downarrow) \ \right\} \end{array}$$

Soluzioni. 4) Fissato i, A_i è CF. Immediato mostrare che la seguente grammatica lo genera:
$$S \longrightarrow 1S1|1A1 \qquad A \longrightarrow \underbrace{0 \cdots 0}_{i!}$$

Immediato mostrare anche che A_i non è regolare e A non è CF con il pumping lemma. Vediamo il primo caso, sia n arbitrario, considero $z = 1^n 0^i 1^n$. $|z| \ge n$ e $z \in A_i$. Ora, in ogni modo di partizionare $z = uvw$ con $|uv| \le n$ e $|v| > 0$, si ha che v contiene almeno un 1 (tra il primo gruppo di 1). Spompando v avremo una stringa con meno 1 nella prima parte rispetto alla seconda e dunque non appartiene più al linguaggio. Pertanto A_i non è regolare.
5) B è r.e.: data x, calcolo $z = \lceil x/2 \rceil$. Determino la matrice di M_z e simulo la sua esecuzione in parallelo (dove tail) su $y = 0, 1, \ldots, x$. Appena una computazione termina, restituisco 1 (altrimenti loop). B è completo: definiamo $\psi(a, b) = 0$ se $\varphi_a(a) \downarrow$, indefinita altrimenti. ψ è calcolabile, per il Teorema s-m-n esiste una funzione g ricorsiva totale tale che $\psi(a, b) = \varphi_{g(a)}(b)$. La funzione $f(x) = 2g(x)$ è la funzione di riduzione da K a B. C è produttivo così come il suo complementare. Riduzioni già viste a lezione se ponete $x = 0$. D è ricorsivo. Si ricorda che $M_5(y)$ non termina qualunque sia y e dunque, se $x \ge 6$ ...

Università degli Studi di Udine
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*
23 Luglio 2019

1. Si dimostri la seguente equivalenza tra espressioni regolari:

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

2. Si definisca la nozione di insieme semplice e si mostri che un insieme semplice non è ricorsivo nè r.e. completo.

3. Si definisca la notazione $TIME(f(n))$ (come modello di calcolo basatevi sulla k-MdT) e si mostri un esempio di linguaggio che appartiene a $TIME(a \cdot n + b)$ per opportune costanti a, b.

4. Si dica (motivando) se la seguente funzione è o meno primitiva ricorsiva

$$\begin{cases} f(0,0) &= 0 \\ f(x,y) &= f(\min\{x,y\},0) \cdot Ack(x,y) \qquad \text{se } x+y>0 \end{cases}$$

5. Si dica (motivando) se il seguente insieme è (o meno) regolare o libero dal contesto.

$$A = \left\{ \ x \in \{0,1,'.'\}^* \ \middle| \ x \text{ è un prefisso dell'espansione binaria di } \frac{30}{7} \ \right\}$$

Nel caso sia regolare, si definisca l'automa minimo che accetta A. Cosa succederebbe se al posto di $\frac{30}{7}$ avessi scritto $\sqrt{18}$?

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B &=& \left\{ \ x \ \middle| \ \varphi_{x-2}(x+2) = 18 \ \right\} \\ C &=& \left\{ \ \langle x,y \rangle \ \middle| \ E_y = \{x!\} \ \right\} \\ D &=& \left\{ \ x \ \middle| \ (\exists y > x)(\forall u \in \mathbb{N})(\forall v \in \mathbb{N})(\varphi_y(u,v) = Ack(u,v)) \ \right\} \end{array}$$

Soluzioni. 4) Per induzione su $x \geq 0$ si mostra che $f(x,0) = 0$. Base: $f(0,0) = 0$ per definizione. Passo: $f(x+1,0) = f(\min\{0,x+1\},0)Ack(x+1,0) = f(0,0)Ack(x+1,0) = 0Ack(x+1,0) = 0$. Ora, per induzione su $y \geq 0$ avremo che $f(x,y) = 0$. Base: $f(x,0) = 0$ per la proprietà appena mostrata. Passo: $f(x,y+1) = f(\min\{x,y+1\},0)Ack(\min\{x,y+1\},0) = 0Ack(\min\{x,y+1\} = 0$ sempre per la proprietà appena mostrata.
5) $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$ che in base 2 diventa $100.\overline{010}$. Costruire il DFA minimo è immediato. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ è irrazionale dunque non periodico. Se esistesse un DFA in grado di accettarlo (o una grammatica in grado di generarlo) per il pumping lemma avremo che esisterebbe un periodo. Assurdo.
5) B è r.e.: data x, calcolo $z = x - 2$. Determino la matrice di M_z e simulo la sua esecuzione su $x+2$. Se termina e l'output è l'agognato 18, restituisco 1 (altrimenti loop). B è completo: definiamo $\psi(a,b) = 18$ se $\varphi_a(a)\downarrow$, indefinita altrimenti. ψ è calcolabile, per il Teorema s-m-n esiste una funzione g ricorsiva totale tale che $\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)$. La funzione $f(x) = g(x) + 2$ è la funzione di riduzione da K a B.
C è produttivo così come il suo complementare. Riduzioni già viste a lezione se ponete $x = 0$ (e $x! = 1$).
$D = \mathbb{N}$ è ricorsivo. Esistono infatti infiniti indici di MdT che calcolano la funzione di Ackermann.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica*
10 Settembre 2019

1. Si dimostri (formalmente) la seguente equivalenza tra espressioni regolari:

$$r^* \cdot (r + \varepsilon) = r^*$$

2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si mostri che un insieme produttivo non è r.e.. Si fornisca un esempio di insieme r.e. il cui complementare non è produttivo.

3. Si definiscano gli insiemi $NTIME(f(n))$ e $SPACE(f(n))$ (come modello di calcolo basatevi sulla i/o k-MdT) e si dimostri che se $L \in NTIME(f(n))$ allora $L \in SPACE(O(f(n)))$.

4. Si dica (utilizzando l'enumerazione delle MdT vista a lezione) se $8 \in K$ o meno.

5. Si dica (motivando) se il seguente insieme è (o meno) regolare o libero dal contesto.

$$A = \left\{ \, xxx \;\middle|\; x \in \{0,1\}^*, x \neq \varepsilon, \text{ e } x \text{ inizia con } 1 \, \right\}$$

   Cosa potremmo invece dire di $A \cap \{1\}^*$?

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \left\{ \, x \;\middle|\; (\forall y < x)(\varphi_x(y) = y^2) \, \right\} \\ C & = & \left\{ \, x \;\middle|\; (\forall y \geq x)(\varphi_x(y^2) = y) \, \right\} \\ D & = & \left\{ \, x \;\middle|\; W_x \cap E_x \neq \emptyset \, \right\} \end{array}$$