

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 28 Giugno 2011

0. Scrivete su ogni foglio che consegnate Nome, Cognome, Numero di matricola, ed il “codice” dell’esame che state sostenendo, ovvero: (a), (b), o (c):

- (a) Fondamenti dell’Informatica (9CFU),
- (b) Fondamenti dell’Informatica 1 (6CFU) O Fondamenti e Metodi dell’Informatica (6CFU),
- (c) Fondamenti dell’Informatica 2 (6CFU).

1. Si dimostri che non esiste  $f$  calcolabile tale che  $f(x, y) = 1$  se  $\varphi_x(y) \downarrow$  e  $f(x, y) = 0$  se  $\varphi_x(y) \uparrow$  (se servisse un lemma ausiliario, lo si enunci e dimostri). Chi sta sostenendo l’esame (c), se preferisce, può enunciare e dimostrare il risultato analogo della while calcolabilità.
2. Si fornisca con precisione la nozione di insieme produttivo e si dimostri che  $\bar{K}$  è produttivo.
3. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva (solo per chi sta sostenendo l’esame (a) o (b))

$$\begin{aligned} f(0, 0, z) &= 3 \cdot z \\ f(0, y + 1, z) &= 2 + f(0, y, z) \\ f(x + 1, y, z) &= 1 + f(x, y, z) \end{aligned}$$

4. Si consideri, al variare di  $i \in \mathbb{N}$  l’insieme

$$A_i = \left\{ x \in \{0, 1, 2\}^* \mid \begin{array}{l} \#(0, x) \leq i \wedge \#(1, x) \leq i \wedge \#(2, x) \leq i \wedge \\ \#(0, x) \leq \#(2, x) \wedge \#(2, x) \leq \#(1, x) \end{array} \right\}$$

ove  $\#(a, x)$  denota il numero di occorrenze del simbolo  $a$  nella stringa  $x$ .

- (a) Si dimostri che ciascun  $A_i$  è regolare e si definisca un DFA per uno dei linguaggi  $A_i$  che accetta in la stringa 2011.
  - (b) Si studi l’insieme  $B = \bigcup_{i \geq 0} A_i$  (qualora sia regolare si definisca un DFA che lo riconosce, qualora non lo sia, lo si dimostri; qualora sia libero dal contesto si scriva una grammatica che lo genera, qualora non lo sia, lo si dimostri)
5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} C &= \{ x \mid \varphi_x(2x^2) \downarrow \wedge \varphi_x(2x^2) \leq 10x \} \\ D &= \{ \langle x, y \rangle \mid |W_x| \cdot |E_y| = 1 \} \end{aligned}$$

L’esercizio  $D$  non è obbligatorio per chi sta sostenendo l’esame (b).

Cenni sulle soluzioni: (3)  $f$  è la funzione  $x+2y+3z$ , (4)  $A_i$  è finito, dunque regolare,  $B$  non è CF (si usi il pumping lemma),  $C$  è completo (nella riduzione conviene semplificarci la vita usando  $\psi(x, y) = 0$  se  $x \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti),  $D$  è produttivo (si riduca  $\bar{K}$  a lui) così come il suo complementare).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 21 Luglio 2011

0. Scrivete su ogni foglio che consegnate Nome, Cognome, Numero di matricola, ed il “codice” dell’esame che state sostenendo, ovvero: (a), (b), o (c):

- (a) Fondamenti dell'Informatica (9CFU),
- (b) Fondamenti dell'Informatica 1  $\vee$  Fondamenti e Metodi dell'Informatica (6CFU),
- (c) Fondamenti dell'Informatica 2 (6CFU).

1. (a),(c): Si enunci e dimostri il pumping lemma per i linguaggi liberi dal contesto. (b): si enunci e dimostri il pumping lemma per i linguaggi regolari.

2. (a),(c): Si fornisca con precisione la nozione di insieme semplice e si mostri che un insieme semplice non può essere nè creativo nè ricorsivo. (b): Si definisca e contestualizzi la funzione di Ackermann.

3. (a),(b): Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva

$$\begin{aligned} f(0, x, y) &= x + y \\ f(n + 1, x, y) &= (n + 1) * f(n, x + 1, y) \end{aligned}$$

4. (a): Si determini la funzione calcolata dalla seguente macchina di Turing:

	$\not\rightarrow$	0
$q_0$	$q_1 \not\rightarrow R$	
$q_1$	$q_2 0 R$	$q_2 0 R$
$q_2$	$q_3 \not\rightarrow L$	$q_3 \not\rightarrow L$
$q_3$	$q_4 \not\rightarrow L$	$q_4 0 L$

5. (a),(b),(c): Si consideri, al variare di  $i \in \mathbb{N}$  l'insieme

$$A_i = \{ 10^x 10^y 1 \mid x, y \in \mathbb{N}, (x + y) \bmod 3 = 0, x + y \leq i \}$$

- Si dimostri che ciascun  $A_i$  è regolare.
- Si studi l'insieme  $B = \bigcup_{i \geq 0} A_i$  (qualora sia regolare si definisca un DFA che lo riconosce, qualora non lo sia, lo si dimostri; qualora sia libero dal contesto si scriva una grammatica che lo genera, qualora non lo sia, lo si dimostri)

6. (a),(c): Si dimostri l'esistenza di un numero  $x \in \mathbb{N}$  tale che  $W_x = \{ \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \lfloor \sqrt{x} + 1 \rfloor \}$

7. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} C &= \{ x \mid W_x \supset \{0, 2, 4\} \} && (a),(b),(c) \\ D &= \{ x \mid W_x \subset \{0, 2, 4\} \} && (c) \\ E &= \{ \langle x, y \rangle \mid |W_x \times W_y| = 6 \} && (a),(b),(c) \end{aligned}$$

Cenni sulle soluzioni: (3)  $f$  è la funzione  $n!(n + x + y)$ , (4) la MdT calcola la funzione **zero**, (5) ciascun  $A_i$  è finito, dunque regolare,  $B$  è pure regolare (costruire un automa con due “cicli” di tre stati ciascuno collegati opportunamente, più qualche altro stato), (6) è una immediata applicazione del primo teorema di ricorsione, (7)  $C$  è completo,  $D$ ,  $E$ ,  $\bar{E}$  sono produttivi (si riduca  $\bar{K}$  a loro). Si ragioni su  $\bar{D}$  pensando che la proprietà  $W_x \not\subset \{0, 2, 4\}$  equivale a  $(\exists y \in \{1, 3, 5, 6, 7, \dots\}) \varphi_x(y) \downarrow$  OR  $\varphi_x(0) \downarrow \wedge \varphi_x(2) \downarrow \wedge \varphi_x(4) \downarrow \wedge (\forall y \in \{1, 3, 5, 6, 7, \dots\}) \varphi_x(y) \uparrow$ .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 21 Settembre 2011

0. Scrivete su ogni foglio che consegnate Nome, Cognome, Numero di matricola, ed il “codice” dell’esame che state sostenendo, ovvero: (a), (b), o (c):

- (a) Fondamenti dell'Informatica (9CFU),
- (b) Fondamenti dell'Informatica 1  $\vee$  Fondamenti e Metodi dell'Informatica (6CFU),
- (c) Fondamenti dell'Informatica 2 (6CFU).

e svolgete esclusivamente gli esercizi contrassegnati da tale lettera.

1. (a),(b): Si dimostri che la funzione segno **sg** è primitiva ricorsiva. (c): Si dimostri l’indecidibilità del problema della terminazione usando la *while* calcolabilità.
2. (a), (c): Si definiscano le nozioni di riduzione tra problemi e di completezza relativamente allo studio delle classi di complessità computazionale.
3. (a), (b), (c): Si definisca la nozione di insieme produttivo e,  
 (a), (c): si dimostri che, se  $A$  è produttivo e  $A \leq B$ , allora  $B$  è produttivo.
4. (a), (b), (c): Si dimostri che il seguente linguaggio non è regolare ma è libero dal contesto:

$$A = \{ 0^n 1^m 0^m 1^{2n} \mid m, n \in \mathbb{N} \}$$

5. (a), (b), (c): Si dimostri che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $W_n = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$
6. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari):

$$\begin{aligned} (a), (b), (c): B &= \{ x \mid (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) = 2y) \} \\ (a), (b): C &= \{ x \mid 1 \leq |W_x \cap \{0, 2, 4\}| \leq 2 \} \\ (c): D &= \{ \langle x, y, z \rangle \mid W_x \subset W_y \subset W_z \} \end{aligned}$$

Ove  $\subset$  è definito come:  $x \subset y \equiv (\forall z)(z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (\exists z)(z \in y \wedge z \notin x)$

Cenni sulle soluzioni. 4 e 5 sono piuttosto standard (ce ne sono di simili sulle dispense). Per quanto riguarda il 6,  $B$  è non estensionale, è creativo, con funzione di riduzione ottenuta via s-m-n da  $\varphi(a, b) = 2b$  se  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti.  $C$  è produttivo così come il suo complementare. Si usi  $\varphi(a, b) = 0$  se  $b = 0$  o  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti per  $C$ ,  $\varphi(a, b) = 0$  se  $b = 0$  e  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti per  $\bar{C}$ . Situazione simile per  $D$ . Per mostrare che è produttivo, si scrivano MdT  $x_0$  e  $z_0$  tali che  $W_{x_0} = \emptyset$  e  $W_{z_0} = \{0, 1\}$ . Si definisca dunque  $\varphi(a, 0) = 0$ ,  $\varphi(a, b) = \uparrow$  se  $b > 0$  e  $M_a(a) \downarrow$  in  $\leq b$  passi,  $\varphi(a, b) = 0$  altrimenti. Lascio  $\bar{D}$  al lettore.

0. Il compito è pensato per l'esame di Fondamenti dell'Informatica, laurea triennale, **9CFU**. Chi partecipasse allo scritto per altre tipologie di esame, mi contatti immediatamente.
1. Si definisca la funzione di Ackermann e se ne elenchino le principali proprietà. Si dimostri poi che per ogni  $x$  e per ogni  $y$  vale che  $y < A(x, y)$ .
2. Si definisca con precisione la nozione di insieme produttivo e si dimostri che  $\bar{K}$  è produttivo.
3. Si dimostri che la seguente funzione  $f$  è primitiva ricorsiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0, 0) = 0 \\ f(0, 0, z + 1) = 1 + f(0, 0, z) \\ f(0, y + 1, z) = f(0, y, z) + f(0, 0, y + z) \\ f(x + 1, y, z) = 2 * f(x, y, z) \end{array} \right.$$

4. Si studi il linguaggio  $A = \left\{ x \in \{0, 1, 2\}^* \mid \sum_{i=1}^{|x|} x_i = 4 \right\}$  (al solito, qualora sia regolare si definisca un DFA che lo riconosce, qualora non lo sia, lo si dimostri; qualora sia libero dal contesto si definisca una grammatica CF che lo genera, qualora non lo sia, lo si dimostri)
5. Si dimostri che esiste  $x \in \mathbb{N}$  tale che  $\varphi_x$  è una funzione totale ed inoltre  $E_x = \{0, 1, 2, 3, \dots, 2x\}$
6. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari):

$$\begin{aligned} B &= \{ x \mid \varphi_x(2x) = 4x \} \\ C &= \{ \langle x, y \rangle \mid \{1\} \subset W_x \subset W_y \} \end{aligned}$$

Ove  $\subset$  è definito come:  $x \subset y \equiv (\forall z)(z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (\exists z)(z \in y \wedge z \notin x)$

Traccia delle soluzioni.

3) Si mostri, per induzione, prima che  $f(0, 0, z) = z$ , poi che  $f(0, y, z) = \dots$  e infine che  $f(x, y, z) = \dots$ . Il risultato segue per composizione di funzioni primitive ricorsive.

4)  $A$  è regolare. Un DFA che lo accetta è semplice.

5) Si definisca  $\psi(x, y) = y$  se  $y \leq 2x$ ,  $= 0$  altrimenti. Segue per teorema s-m-n e primo teorema di ricorsione.

6)  $B$  è creativo. Che sia r.e. è banale. Per la completezza si definisca  $\psi(x, y) = 2y$  se  $x \in K$ , indefinito altrimenti. Si applichi dunque il teorema s-m-n e si completi la riduzione da  $K$ .

$C$  e  $\bar{C}$  sono entrambi produttivi.

Per mostrare  $C$  produttivo riduciamo  $\bar{K}$  a lui, definendo prima  $\psi(a, b) = 0$  se  $y \leq 1$ ,  $\psi(a, b)$  indefinito se  $y > 1$  e  $M_a(a) \not\downarrow$  in  $\leq b$  passi,  $\psi(a, b) = 0$  altrimenti. Sia  $f$  la funzione ottenuta per teorema s-m-n tale che  $\varphi_{f(a)}(b) = \psi(a, b)$ . Sia  $y$  l'indice di una funzione tale che  $W_y = \{0, 1, 2\}$ .

Si mostri dunque che  $a \in \bar{K}$  se e solo se  $\{1\} \subset W_{f(a)} \subset W_y$ .

Per mostrare  $\bar{C}$  produttivo, si riduca  $K$  a  $C$ , partendo da:  $\psi(a, b) = 0$  se  $y = 1$  o ( $y > 1$  e  $a \in K$ ), indefinito altrimenti. Sia  $y$  indice di una funzione totale ... si completi per esercizio.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
24 Febbraio 2012

0. Indicate esattamente la tipologia del vostro esame (nome corso e CFU).
1. Si mostri che i linguaggi liberi non sono chiusi per intersezione e complementazione.
2. Si mostri che la funzione  $f(x, y) = x \bmod y$  è primitiva ricorsiva (per gli eventuali studenti di Fondamenti 2 –6CFU– si dimostri *invece* l'indecidibilità del problema della terminazione usando la WHILE calcolabilità)
3. Si considerino i due insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{ 10^x 10^y 1 \mid x > 0, y > 0, x + y \text{ è pari} \} \\ B &= \{ 10^x 10^y 1 \mid x > 0, y > 0, x + y \text{ è primo} \} \end{aligned}$$

Si mostri che  $A$  è regolare e che  $B$  non è libero dal contesto.

4. Denotiamo con  $q_x$  il numero di stati della Macchina di Turing  $x$ -esima.  
Si studino i seguenti insiemi ed i loro complementari:

$$\begin{aligned} C &= \{ x \mid q_x < 2^x \} \\ D &= \{ x \mid \varphi_x(x) \downarrow \wedge \varphi_x(x) < 2^x \} \\ E &= \{ x \mid |W_x| < 2^x \} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 12 Giugno 2012

0. Indicate esattamente la tipologia del vostro esame (lo scritto comunque è uguale per tutti):
- Fondamenti dell'Informatica (9 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica (6 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica 2 (6 CFU)
  - .....
1. Si definisca la nozione di grammatica libera dal contesto (CF) e le relative nozioni di derivazione e di linguaggio generato. Si dimostri dunque che, se  $G$  è una grammatica CF, allora il linguaggio  $L(G)$  è ricorsivo.
2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si mostri che  $\bar{K}$  è produttivo. Si dimostri inoltre che se  $A$  è un insieme produttivo, allora  $A$  non è r.e.
3. Si studi il linguaggio

$$A = \{ 0^m 1^n \mid m \geq 0, n \geq 0, m \equiv n \pmod{3} \}$$

4. Assumiamo l'ordinamento delle MdT presentato nel corso. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari):

$$\begin{aligned} B &= \{ z \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(z = x + y \wedge \varphi_x(y) \downarrow) \} \\ C &= \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid (\forall z \leq x)(\varphi_y(z) \downarrow \wedge \varphi_y(z) \leq z) \} \\ D &= \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid (\forall z \geq x)(\varphi_y(z) \downarrow \wedge \varphi_y(z^2) = 2z + 1) \} \\ E &= \{ x \in \mathbb{N} \mid E_x = \{0, x\} \} \end{aligned}$$

L'insieme  $E$  va studiato *solo dopo* avete finito gli altri esercizi.

Traccia delle soluzioni:

$A$  è regolare. Scrivete un DFA con 7 stati che lo accetta.  $B = \mathbb{N}$  in quanto  $M_0$  termina su ogni input. Dunque è ricorsivo.  $C, D, E$  non sono estensionali.  $C$  è creativo mentre  $D$  ed  $E$  sono entrambi produttivi e con il complementare produttivo. Le dimostrazioni per  $C$  e  $D$  sono alquanto standard; suggerisco in entrambi di "fissare"  $x$  a 0 nelle funzioni che usate per la riduzione. Per  $K \leq E$  e  $\bar{K} \leq E$  è necessario usare il secondo teorema di ricorsione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 16 Luglio 2012

0. Indicate esattamente la tipologia del vostro esame (lo scritto comunque è uguale per tutti):
- Fondamenti dell'Informatica (9 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica (6 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica 2 (6 CFU)
  - .....

1. Si discuta sul test di decisione  $x \in L$  per i linguaggi regolari, per i linguaggi liberi dal contesto, e per i linguaggi di tipo 1.
2. Si dimostri che per ogni  $x \in \mathbb{N}$ , se  $W_x \neq \emptyset$ , allora esiste  $y \in \mathbb{N}$  per cui  $\varphi_y$  è totale e  $W_x = E_y$ .
3. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva (se lo è, altrimenti dimostrate il contrario):

$$\begin{cases} f(0, 0) &= 1 \\ f(0, y + 1) &= 2 \cdot f(0, y) \\ f(x + 1, y) &= f(x, A(0, y)) \end{cases}$$

(al solito,  $A$  è la funzione di Ackermann)

4. Si studi il seguente linguaggio:

$$B = \{ v \in \{0, 1, 2\}^* \mid \#(0, v) + \#(1, v) = \#(2, v) \}$$

ove  $\#(a, b)$  indica il numero di occorrenze del simbolo  $a$  nella stringa  $b$  (al solito, si dimostri se è o meno regolare e se è o meno libero dal contesto).

5. Si studino i seguenti insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} C &= \left\{ x \mid x \text{ è pari e } \varphi_{\frac{x}{2}}(30) = 18 \right\} \\ D &= \left\{ x \mid (\forall y \geq 2x)(\varphi_x(y) = y!) \right\} \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni:

3) Si dimostri prima per induzione su  $y$  che  $f(0, y) = 2^y$ . Dunque si dimostri per induzione su  $x$  che  $f(x, y) = 2^{x+y}$ . 4)  $B$  non è regolare (pumping lemma).  $B$  è CF, generato da

$$S \rightarrow \varepsilon \mid S0S2S \mid S2S0S \mid S1S2S \mid S2S1S$$

Si mostri in un senso per induzione sulla lunghezza delle derivazioni e per l'altro sulla lunghezza della stringa che la grammatica genera proprio  $B$ . 5)  $C$  e  $D$  non sono estensionali.  $C$  è completo.  $D$  è produttivo, così come il suo complementare. Per la riduzione  $K \leq C$  si moltiplichi per 2 la funzione ottenuta dal teorema smn.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 19 Settembre 2012

0. Indicate esattamente la tipologia del vostro esame (lo scritto comunque è uguale per tutti):
- Fondamenti dell'Informatica (9 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica (6 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica 2 (6 CFU)
  - .....

1. Si enuncino e dimostrino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto.
2. Si dimostri (opportunamente) che la funzione di fibonacci *fibo* è primitiva ricorsiva.
3. Si dia la definizione di  $\mathcal{C}$ -completezza per una classe di complessità  $\mathcal{C}$  (inclusa la definizione di riduzione).
4. Si studi il linguaggio

$$A = \left\{ a_1 a_2 \dots a_n \mid \begin{array}{l} a_i \in \{0, \dots, 9\}, n > 0, n \text{ è pari e} \\ 3.a_1 a_2 \dots \text{ è l'espansione decimale di } \frac{22}{7} \end{array} \right\}$$

5. Si dimostri che esiste un numero naturale  $n$  tale che  $W_n = \{1, 2, \dots, 2n\}$  e  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .  
 Esiste anche un numero  $m$  tale che:  $W_m = \{1, 2, \dots, m\}$  e  $E_m = \{1, 2, \dots, 2m\}$ ?
6. Si studino i seguenti insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \mid (\forall y \leq \text{fibo}(x))(\varphi_x(y) = \text{fibo}(y)) \right\} \\ C &= \left\{ x \mid (\exists y \geq \text{fibo}(x))(\varphi_x(y) = \text{fibo}(y)) \right\} \\ D &= \left\{ x \mid (\forall z \leq x)(\varphi_z(x) = \text{fibo}(x)) \right\} \end{aligned}$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 6 dicembre 2012

0. Indicate esattamente la tipologia del vostro esame (lo scritto comunque è uguale per tutti):
- Fondamenti dell'Informatica (9 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica (6 CFU)
  - Fondamenti dell'Informatica 2 (6 CFU)
  - .....

1. Si dimostri (opportunamente) che la funzione di fibonacci fibo è primitiva ricorsiva (Fondamenti da 6 o 9) OR  
 Si enunci e dimostri il Teorema SMN usando la while calcolabilità (Fondamenti 2).

2. Si dimostri che i linguaggi regolari sono inclusi nei linguaggi liberi dal contesto.

3. Si studi il linguaggio

$$A = \{ 0^a 1 0^b \mid a, b \in \mathbb{N}, a > 0, b \geq a^a \}$$

4. Si dimostri che esiste un numero naturale  $n$  tale che  $E_n = \{1, 2, 4, \dots, 2^n\}$

5. Si studino i seguenti insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ x \mid \varphi_x(10x^2) = 0 \} \\ C &= \{ x \mid \varphi_x(10x^2) = x \} \\ D &= \{ x \mid (\forall y)(\text{se } y \text{ è pari } \varphi_x(y) = 0, \text{ altrimenti } \varphi_x(y) = 1) \} \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni:

3) Non è CF (pumping lemma, per ogni  $n > 0$  sia  $z = 0^n 1 0^{n^n}$ , dunque ...). 4) Si definisca  $\psi(x, y) = 2^y$  se  $y \leq x$ . Si applichi dunque Smn e I teorema di ricorsione. 5)  $B$  e  $C$  sono r.e. completi. Per la riduzione si definisca  $\psi(x, y) = 0$  (resp.  $\sqrt{y/10}$ ) se  $x \in K$ , indefinito altrimenti.  $D$  e  $\bar{D}$  sono produttivi. Riduzioni abbastanza immediate da  $\bar{K}$  e  $K$ .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 23 Gennaio 2013

0. Indicate esattamente la tipologia del vostro esame:

- Fondamenti dell'Informatica (9 CFU)
- Fondamenti dell'Informatica (6 CFU)
- Fondamenti dell'Informatica 2 (6 CFU)
- .....

1. Si enunci e dimostri l'halting problem.

2. Si definisca la nozione di riduzione, per classi di complessità computazionale, e si dimostri che la relazione  $\leq$  da essa indotta è transitiva

3. Si studino gli insiemi

$$\begin{aligned}
 L &= \left\{ x \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} x, \text{ visto come sequenza di caratteri} \\ \text{ASCII a 8 bits, è un testo di } \{A, B, C\}^* \end{array} \right\} \\
 R &= \left\{ x \in \{0, 1\}^* \mid x \in L, \#(A, x) = \#(B, x) = \#(C, x) \right\}
 \end{aligned}$$

ove  $\#(\alpha, x)$  sono le occorrenze delle codifiche ASCII del carattere  $\alpha$  in  $x$

4. Si mostri che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $W_n = E_n = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$

5. Si studino i seguenti insiemi ed i loro complementari:

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ x \mid (\forall y \leq x)(\varphi_x(y^2) = 5y + 1) \right\} \\
 B &= \left\{ x \mid (\forall y \geq x)(\varphi_x(y^2) = 5y + 1) \right\} \\
 C &= \left\{ x \mid W_x = \{0, 1, 2, \dots, x\} \right\}
 \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni:

$L$  è regolare (scrivete un DFA),  $R$  non è CF (pumping lemma, per ogni  $n > 0$  sia  $z = A^n B^n C^n$ , dunque ...). 4) Si definisca  $\psi(x, y) = y$  se  $y \leq 2x, y$  pari. Si applichi dunque Smn e I teorema di ricorsione. 5)  $A$  è r.e. completo,  $B$  e  $C$  sono produttivi. Riduzioni abbastanza immediate (usando  $5\sqrt{y} + 1$ ) per  $A$  e  $B$ . Per  $C$  va usato il secondo teorema di ricorsione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
19 Febbraio 2013

1. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si dimostri che  $\bar{K}$  è produttivo.
2. Si assumano le funzioni  $f$  e  $g$  primitive ricorsive. Si dimostri che la funzione  $h$  definita come segue è primitiva ricorsiva:

$$h(x, y, z) = \sum_{i=0}^x f(i, y, g(z))$$

(nel caso di esame di fondamenti dell'informatica 2 (6CFU) si sostituisca la domanda sopra con la definizione di insieme semplice e la dimostrazione che un insieme semplice non è ricorsivo né creativo)

3. Si dimostri che il seguente linguaggio non è regolare, ma è libero dal contesto:

$$\{ x \in \{a, b, c\}^* \mid \#(a, x) = \#(b, x) \}$$

ove, al solito,  $\#(s, x)$  denota il numero di occorrenze del carattere  $s$  nella stringa  $x$ .

4. Si dimostri che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall x \in \mathbb{N} (\varphi_n(2x) = n \wedge \varphi_n(2x + 1) = 0)$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(8x^2 + 1) = x \} \\ B &= \{ x \in \mathbb{N} \mid (\forall y \geq x)(\varphi_x(y) \uparrow \vee y \text{ è pari}) \} \\ C &= \{ x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \geq x)(\varphi_x(y) \uparrow \vee y \text{ è pari}) \} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 18 Giugno 2013

1. Si definisca la nozione di automa a stati finiti non-deterministico (NFA) e si mostri che se  $L$  è accettato da un NFA, allora  $L$  è regolare.
2. Si enunci e dimostri il risultato di indecidibilità del problema della terminazione.
3. Si dica (motivando) se la seguente funzione è o meno primitiva ricorsiva.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0, 0) = 1 \\ f(0, 0, z + 1) = 2 + f(0, 0, z) \\ f(0, y + 1, z) = 3 + f(1, y, z) \\ f(x + 1, y, z + 1) = 2 * f(x, y, z + 1) \\ f(x + 1, y, 0) = 2 * f(x, y + 1, 0) \end{array} \right.$$

4. Si studi il seguente linguaggio e lo si collochi *opportunamente* nella gerarchia di Chomsky

$$A = \{ uu^r \mid u \in \{0, 1\}^*, u^r \text{ è } u \text{ letta al contrario} \}$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari):

$$\begin{aligned} B &= \{ x \mid (\forall y \leq 100)(\text{se } y \text{ è pari: } \varphi_x(y) = 0, \text{ se } y \text{ è dispari: } \varphi_x(y) = y) \} \\ C &= \{ x \mid \varphi_x(4x^2) = 3x + 1 \} \\ D &= \{ \langle x, y \rangle \mid W_x \neq \mathbb{N} \vee E_y = \mathbb{N} \} \\ E &= \{ \langle x, y \rangle \mid E_x = \{x, y\} \} \quad (*) \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni:

$f$  non è definita su tutto  $\mathbb{N}^3$ : essendo parziale e non è primitiva ricorsiva.  $A$  è CF e non regolare.  $B$  e  $C$  sono completi,  $D$  ed  $E$  produttivi così come i loro complementari. Per  $E$  risulta necessario usare il secondo teorema di ricorsione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
11 Luglio 2013

1. Si enunci e dimostri il teorema di Rice
2. Si enuncino e dimostrino le due principali relazioni tra le classi in tempo e in spazio deterministiche.
3. Si definisca una MdT che calcoli la funzione di base  $\pi_2^3$ .
4. Si studi il seguente insieme, collocandolo nella gerarchia di Chomsky

$$A = \{0^n 1^m 2^p 3^{m+n-2} \mid m > 0, n > 0, p > 0\}$$

5. Si dimostri che esiste  $x$  tale che  $W_x = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2x!\}$
6. Si studino i seguenti insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid (\forall y \leq x!)(\varphi_x(2y) \downarrow \wedge \varphi_x(2y) = y + 3)\} \\ C &= \{x \mid (\forall y \leq x!)(\varphi_y(2x) \downarrow \wedge \varphi_y(2x) = y + 3)\} \\ D &= \{\langle x, y \rangle \mid W_x \cap W_y = \emptyset\} \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni:

Per la MdT sono sufficienti due stati.  $A$  è CF e non regolare.  $B$  è completo,  $C$  è ricorsivo, mentre  $D$  è il complementare di un completo.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 11 Settembre 2013

1. Si dia la definizione di funzione Turing-calcolabile e si dimostri che le funzioni primitive-ricorsive di base sono Turing-calcolabili.
2. Si dia la definizione di grammatica di tipo 1 e si dimostri che il problema dell'appartenenza per le grammatiche di tipo 1 è decidibile.
3. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = \mu y (y > n! + 1 \wedge y \text{ è primo}) \end{cases}$$

4. Si studi il seguente linguaggio

$$L = \{ 0^a 1^b 2^c \mid a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge c = ab + 1 \}$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari— $\subset$  denota l'inclusione stretta):

$$\begin{aligned} A &= \{ x \mid (\forall y \leq 10)(\varphi_x(y) \downarrow) \wedge (\varphi_x(0) > \varphi_x(1) > \dots > \varphi_x(10)) \} \\ B &= \{ \langle x, y \rangle \mid \emptyset \subset W_x \subset W_y \} \end{aligned}$$

6. Si consideri il seguente problema decisionale: sono dati  $n$  numeri naturali (non necessariamente distinti)  $x_1, \dots, x_n$  e si vuol sapere se esiste un modo di distribuirli in  $k$  insiemi  $S_1, \dots, S_k$  (per chiarire,  $n, x_1, \dots, x_n, k$  sono gli input del problema) in modo tale che presi a due a due i numeri in ciascun  $S_i$  la loro somma non stia nello stesso  $S_i$ . Si dimostri che il problema sta in  $NP$ .

Traccia delle soluzioni:

Per  $f$  si tratta di trovare un limite superiore calcolabile da una funzione primitiva ricorsiva a  $y$ . Un limite sufficiente è  $1 + p_1 p_2 \dots p_n$  ( $p_i$  è l' $i$ -esimo numero primo). Per capire perchè pensate alla dimostrazione di Euclide della proprietà che ci sono infiniti numeri primi.  $A$  è r.e. completo. Per la completezza definite una funzione  $\psi(a, b)$  decrescente (per esempio  $100 - b$ ).  $B$  ed il suo complementare sono produttivi. Suggestisco di fissare  $\hat{y}$  tale che  $W_{\hat{y}} = \{0, 1\}$  ed effettuare le due riduzioni  $\bar{K} \leq B$  e  $K \leq B$  lavorando su  $x$ . L'appartenenza del problema dell'esercizio 6 ad  $NP$  è banale. Più interessante sarebbe studiare la  $NP$  completezza, ma non era richiesta.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
30 Gennaio 2014

1. Si dia la definizione di funzione primitiva ricorsiva e si dimostri che la funzione “resto della divisione tra numeri naturali” ( $\text{mod}$ ) è primitiva ricorsiva.
2. Si dia la definizione di grammatica libera dal contesto e di linguaggio generato da una grammatica e si dimostri che il problema dell'appartenenza per i linguaggi liberi dal contesto è decidibile.
3. Si studi il seguente linguaggio, in particolare si stabilisca formalmente se è o meno libero dal contesto ( $fatt$  denota la funzione fattoriale e  $1^n = \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n+1}$ ):

$$L = \{ 01^x 01^{fatt(x)} 0 \mid x \in \mathbb{N} \}$$

4. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari— $\subset$  denota l'inclusione stretta):

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(16x^2) = x \} \\ B &= \{ \langle x, y \rangle \subseteq \mathbb{N}^2 \mid W_x \subset E_y \} \\ C &= \{ x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})(y > x \wedge \varphi_y(x) \uparrow) \} \end{aligned}$$

5. Si collochi il seguente linguaggio in una opportuna classe di complessità:

$$D = \{ 01^n 0 \mid n \text{ è potenza di due} \}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
20 Febbraio 2014

1. Si enunci e dimostri l'indecidibilità del problema dell'arresto (halting problem).
2. Si dia la definizione di grammatica monotona e si dimostri che il problema dell'appartenenza ( $x \in L(G)$ ?) per tale classe di grammatiche è decidibile.
3. Si dimostri che la funzione definita come  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(n + 2) = 2 \cdot f(n + 1) - f(n)$  è primitiva ricorsiva.
4. Si studi il seguente linguaggio, in particolare si stabilisca formalmente se sia o meno regolare e/o libero dal contesto ( $x - y = 0$  se  $y > x$ )

$$L = \{ 01^x 01^y 01^{x-y} 0 \mid x, y \in \mathbb{N} \}$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari):

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(x^2 - 2x) = x \} \\ B &= \{ x \in \mathbb{N} \mid W_x \subset \{0, 2\} \} \end{aligned}$$

( $\subset$  indica l'inclusione stretta)



1. Si dia la definizione di grammatica di tipo 1 e si dimostri che il problema dell'appartenenza per le grammatiche di tipo 1 è decidibile.
2. Si dia la definizione di funzione Turing calcolabile e si dimostri che le cosiddette *funzioni di base* sono Turing calcolabili.
3. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva:

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 \\ f(x, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \end{cases}$$

4. Si pensi all'alfabeto dei nucleotidi  $\{A, C, G, T\}$  e si studi il seguente linguaggio (il cosiddetto DNA felino bilingue)

$$L = \{ x \in \{A, C, G, T\}^* \mid \#(CAT, x) = \#(GAT, x) \}$$

ove  $\#(u, x)$  è il numero di occorrenze della stringa  $u$  nella stringa  $x$   
(per intendersi,  $\#(AC, ACTTATCTTACG) = 2$ )

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} A &= \{ x \mid \varphi_x(0) = 0 \wedge (\forall y \in \{1, \dots, x\})(\varphi_x(y) \downarrow \wedge \varphi_x(y) = \varphi_x(\lfloor y/2 \rfloor)) + 1 \} \\ B &= \{ \langle x, y \rangle \mid W_x \cap E_y = \{ z \in \mathbb{N} \mid z \bmod 5 = 0 \} \} \\ C &= \{ x \mid (\forall y \in \mathbb{N})(y \text{ è pari} \rightarrow \varphi_x(y) = x) \} \end{aligned}$$

Traccia della soluzione.  $f(x, y) = 0$  per ogni  $x, y$ . Lo si dimostri per induzione su  $y \geq 0$ . Si noti che la chiamata ricorsiva è simile a quella della funzione di Ackermann, dunque non è possibile utilizzare semplici argomenti sintattici. Per  $L$ , usiamo per semplicità le minuscole per le lettere del DNA. Dopo aver mostrato che non è regolare con il pumping lemma (scegliete  $z = (cat)^n(gat)^n$ ), pensate prima al linguaggio:

$$N = \{ x \in \{a, c, g, t\}^* \mid x \text{ non contiene mai nè } cat \text{ nè } gat \}$$

Si scriva un DFA per  $N$  e da questo si tragga una grammatica lineare destra con  $Q$  stato iniziale. La grammatica definita da  $S \rightarrow ScatSgatS \mid SgatScatS \mid Q$  genera  $L$ .  $A$  è chiaramente r.e., per mostrare  $K \leq A$  si pensi alla funzione  $\log_2$ .  $B$  e  $\bar{B}$  sono produttivi. Fissate ad esempio  $x = 0$  ( $W_0 = \mathbb{N}$ ) e lavorate su  $y$  (pensate alla funzione  $5b \dots$ ). Anche  $C$  e  $\bar{C}$  sono produttivi. Nella riduzione bisogna usare il secondo teorema di ricorsione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 24 Luglio 2014

1. Si enunci e dimostri il Teorema di Rice.
2. Sia  $x \in L(G)$  con  $G$  grammatica libera dal contesto in forma normale di Chomsky priva di  $\varepsilon$  produzioni. Si determinino dei limiti (in funzione di  $|x|$ , il più possibile esatti) al numero  $n$  di passi della derivazione per  $x$  e all'altezza  $h$  dell'albero di derivazione per  $x$ .
3. Sia  $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{t}, \mathbf{c}, \mathbf{g}\}$  il linguaggio del DNA. Si studi, per  $i \geq 0$ , il linguaggio

$$L_i = \{ x \in \Sigma^* \mid \#(\mathbf{ta}, x) = \#(\mathbf{cg}, x) \wedge |x| \leq i \}$$

ed infine si studino i linguaggi  $T = \bigcup_{i \geq 0} L_i$  e  $B = \bigcap_{i \geq 0} L_i$   
 ( $\#(u, x)$  significa il numero di occorrenze della stringa  $u$  dentro  $x$ )

4. Si dimostri che  $g$  definita nel modo seguente è primitiva ricorsiva (se lo è)

$$g(x) = \begin{cases} \mathbf{fatt}(x) & \text{se } x \text{ è pari} \\ \mathbf{Ack}(2, x) & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \mid \varphi_{\lfloor \frac{x}{3} \rfloor}(3x+3) = x^3 \right\} \\ B &= \left\{ x \mid W_x \subset \{0, 3, 6, 9\} \right\} \\ C &= \left\{ \langle x, y \rangle \mid x < y \wedge (\exists z < y)(\varphi_z(x) \downarrow) \right\} \end{aligned}$$

Traccia della soluzione.  $|L_i| \leq 4^i$ , dunque è finito e pertanto regolare.  $T$  è CF (si veda compito precedente),  $B = \{\varepsilon\}$  è invece regolare.  $g$  è primitiva ricorsiva (basta dimostrare che  $\mathbf{Ack}(2, x) = 2x + 3$ ).  $A$  è r.e. completo. Per la riduzione si pensi a  $\psi(a, b) = (\frac{b}{3} - 1)^3$  se  $a \in K$ , indefinito altrimenti.  $B$  è produttivo (riduzione elementare da  $\bar{K}$ ) mentre il suo complementare è r.e. (perché?). Nella nostra enumerazione  $M_0$  termina sempre, pertanto  $C = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \wedge y > 0 \}$  e dunque ...

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 23 Settembre 2014

1. Si dimostri che, se  $G$  è una grammatica “dipendente dal contesto” allora l’insieme  $L(G)$  è ricorsivo.
2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si dimostri che  $\bar{K}$  è produttivo.
3. Si dimostri che il seguente linguaggio è libero dal contesto ma non regolare.

$$A = \{ 0^m(01)^n0^n \mid m > 0, n > 0 \}$$

In particolare, si definisca una grammatica  $G$  in forma normale di Chomsky tale che  $A = L(G)$

4. Si dimostri che la funzione  $g$  definita nel modo seguente è primitiva ricorsiva (dimostrandolo completamente a partire dalle funzioni di base e applicando tutte le definizioni necessarie—per intenderci, se vi servisse la somma, dovete definirla):

$$g(x, y) = \begin{cases} 2 * (x - y) & \text{se } x \geq y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5. Si dimostri che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $y \in \mathbb{N}$  vale che  $\varphi_n(y) = n$ .
6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \mid (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) \downarrow \wedge \lfloor \frac{\varphi_x(y)}{3} \rfloor = y) \right\} \\ C &= \left\{ x \mid (\forall y \geq x)(\varphi_x(y) \downarrow \wedge \lfloor \frac{\varphi_x(y)}{3} \rfloor = y) \right\} \\ D &= \left\{ \langle x, y \rangle \mid W_x \cap E_y = \{z \in \mathbb{N} \mid z \bmod 2 = 0\} \right\} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 12 Dicembre 2014

**Risultati scritto:** rispondo a vostra email a agostino.dovier@uniud.it

**Orali:** lunedì alle 10.30 nel mio ufficio

1. Si enunci il teorema di Myhill-Nerode e se ne dimostri una delle tre implicazioni.
2. Si definisca *con precisione* la nozione di riduzione e di completezza relativamente alle classi di complessità.
3. Per  $i \geq 1$  sia

$$L_i = \{ x \in \{0, 1\}^* \mid \text{non ci sono mai "i" 0 consecutivi in } x \}$$

Si dimostri che, dato  $i$  fissato,  $L_i$  è regolare e si fornisca l'automa minimo per  $L_4$ . Si studino poi  $A = \bigcap_{i \geq 1} L_i$  e  $B = \bigcup_{i \geq 1} L_i$

4. Si mostri che il seguente linguaggio non è libero dal contesto:

$$C = \{ 0^a 10^b \mid a > 0 \wedge b = a! \}$$

5. Sia  $n$  l'indice della seguente MdT (volendo potremmo calcolarlo, ma in un compito meglio di no).  $n \in K$ ?

	ϕ	0
$q_0$	$q_1 \not\rightarrow R$	$q_1 \not\rightarrow R$
$q_1$		$q_2 0R$
$q_2$		

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} D &= \{ x \mid (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) = y) \} \\ E &= \{ \langle x, y \rangle \mid W_x \cap E_y = \{0, 1, 2\} \} \\ F &= \{ x \mid (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) = x) \} \end{aligned}$$

1. Sia  $M$  un NFA. Si dimostri che esiste un DFA  $M'$  tale che  $L(M) = L(M')$ .
2. Si enunci il problema 3SAT e si dimostri che 3SAT è NP-completo.
3. Date due stringhe  $x_1, x_2$  della stessa lunghezza, con  $d_H(x_1, x_2)$  si denota il numero di posizioni in cui esse differiscono ( $d_H$  è detta *distanza di Hamming*). Ad esempio,  $d_H(0000, 0011) = 2$ ,  $d_H(0101, 1011) = 3$ ,  $d_H(1111, 1111) = 0$ .

Per  $i \geq 1$  sia  $\mathcal{C}_i \subseteq \{0, 1\}^i$  l'insieme contenente  $0^i$ ,  $1^i$  e tutte altre stringhe  $x$  di lunghezza  $i$  sull'alfabeto  $\{0, 1\}$  tali che  $d_H(x, 0^i) \geq 2$  e  $d_H(x, 1^i) \geq 2$ .

Si dica se, fissato  $i$ ,  $\mathcal{C}_i$  è regolare e, nel caso lo sia, si fornisca un DFA che accetta  $\mathcal{C}_i$ . Si studi, poi  $\mathcal{C} = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{C}_i$ .

4. Si studi la seguente funzione  $f$  (in particolare si dimostri se è primitiva ricorsiva o meno)

$$\begin{cases} f(0, y) = 1 \\ f(x+1, y) = \sum_{z=0}^x f(z, y) \end{cases}$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} D &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \geq x)(\varphi_x(\frac{y^2}{4}) = y) \right\} \\ E &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid E_x = \left\{ z \mid z \in \mathbb{N} \text{ mod } 5 = 0 \right\} \right\} \\ F &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid W_x \text{ è un insieme ricorsivo} \right\} \end{aligned}$$

Traccia della soluzione.

3) Dato  $i$  fissato,  $\mathcal{C}_i$  è finito e dunque regolare. Si osservi che  $\mathcal{C} = U \cup Z \cup (A \cap B)$  ove  $U = \{ 1^n \mid n > 0 \}$ ,  $Z = \{ 0^n \mid n > 0 \}$ ,  $A = \{ x \in \{0, 1\}^+ \mid x \text{ contiene almeno due } 1 \}$ ,  $B = \{ x \in \{0, 1\}^+ \mid x \text{ contiene almeno due } 0 \}$ .  $A, B, U, Z$  sono regolari (definite i 4 automi) e dunque anche  $\mathcal{C}$ , per le proprietà di chiusura.

4)  $f(x, y) = \overline{sg}(x) + sg(x)2^{x-1}$  (dimostratelo per induzione) e dunque primitiva ricorsiva.

5)  $D$  r.e. (dovetail su  $M_x(x), M_x(x+1), M_x(x+2), \dots$ ). Per mostrare che è completo definite  $\psi(a, b) = 2\sqrt{b}$  se  $a \in K$ , indefinito altrimenti e procedete come al solito.

$E$  è produttivo cosí come il suo complementare. Nelle riduzioni usate la funzione 5b.

Idem per  $F$ . Per  $K \leq F$  definite  $\psi(a, b) = \varphi_b(b)$  se  $M_a(a) \downarrow$  in  $\leq b$  passi, indefinito altrimenti. Per  $K \leq \bar{F}$  la riduzione usa la stessa idea.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
12 Febbraio 2015

1. Si illustrino e dimostrino brevemente le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari.
2. Si definisca l'insieme semplice e si dimostri che un insieme semplice non è né completo né creativo.
3. Si considerino i due insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{ 0^m 1^n 0^p \mid m, n, p \geq 0, m \geq n \} \\ B &= \{ 0^m 1^n 0^p \mid m, n, p \geq 0, n \geq p \} \end{aligned}$$

Li si collochi propriamente nella gerarchia di Chomsky (al solito, se sono regolari o CF lo si dimostri, se non lo sono, lo si dimostri). Si faccia poi lo stesso per  $C = A \cap B$ .

4. Si studi la seguente funzione  $f$  (in particolare si dimostri se è primitiva ricorsiva o meno)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0) = 1 \\ f(x + 1, 0) = 2 \cdot f(x, 0) \\ f(0, y + 1) = 1 + f(0, y) \\ f(x + 1, y + 1) = 2 + f(x, y) \end{array} \right.$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} D &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(17) = 34 \right\} \\ E &= \left\{ \langle x, y \rangle \mid \text{Per ogni } z \text{ pari si ha: } \varphi_x(z) \downarrow \wedge \varphi_y(z) \downarrow \wedge \varphi_x(z) = (\varphi_y(z))^2 \right\} \\ F &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid E_x = \{0, x\} \right\} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 22 GIUGNO 2015

1. Si dia la definizione formale della nozione di funzione Turing calcolabile e si dimostri che la funzione *zero* è Turing calcolabile.
2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si dimostri che  $\bar{K}$  è produttivo. Può esistere un insieme contemporaneamente ricorsivamente enumerabile e produttivo (e perchè)?
3. Si consideri la famiglia di insiemi al variare di  $i \geq 0$ :

$$A_i = \{ 10^i 1^j 0^{2i} 1 \mid j \geq 0 \}$$

Per ogni  $i \geq 0$ , si collochi  $A_i$  propriamente nella gerarchia di Chomsky (al solito, se sono regolari o CF lo si dimostri, se non lo sono, lo si dimostri). Si faccia poi lo stesso per  $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ .

4. Si studi la seguente funzione  $f$  (in particolare si dimostri se è primitiva ricorsiva o meno—Ack è la funzione di Ackermann)

$$\begin{cases} f(0, 0) = 1 \\ f(0, y + 1) = (y + 1)f(0, y) \\ f(x + 1, y) = \text{Ack}(0, f(x, y + 1)) \end{cases}$$

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(x) = x! \right\} \\ C &= \left\{ \langle x, y \rangle \mid E_x \cap E_y \subseteq \{0, 1, 2\} \right\} \\ D &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid E_x \text{ non è un insieme ricorsivo} \right\} \end{aligned}$$

P.S. I primi due esercizi valgono 4 punti, il terzo 5 punti. Non correggerò gli esercizi 4 e 5 a chi non raggiunge almeno 9 punti con gli esercizi 1, 2 e 3.

Traccia soluzioni. Dato  $i$  fissato,  $A_i$  è regolare;  $A$  invece non è regolare (usate pumping lemma), tuttavia è facile scrivere una grammatica CF che lo genera.  $B$  è r.e. (si pensi alla funzione semicaratteristica così definita: dato  $x$ , eseguo  $M_x(x)$ , se termina e il risultato è  $x!$  return 1 else loop) ed è completo ( $\psi(a, b) = b!$  se  $a \in K$ , indefinito altrimenti e procedete come al solito).

$C$  è produttivo (usate ad esempio  $\psi(a, b) = 3$  se  $a \in K$ , indefinito altrimenti e procedete come al solito per mostrare  $K \leq \bar{C}$ , ovvero  $\bar{K} \leq C$ ). E il suo complementare? Pensateci.

$D$  è produttivo così come il suo complementare. Per mostrare  $K \leq D$  usate  $\psi(a, b) = b$  se  $a \in K \wedge b \in K$ . Per  $\bar{K}$  similmente usate anche  $b \in K$  come ausilio.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 16 LUGLIO 2015

1. Si enunci il problema dell'arresto (Halting Problem) e si dimostri la sua indecidibilità.
2. Dato un generico linguaggio  $L$  e un generico DFA  $M$  si definiscano le relazioni  $R_M$  e  $R_L$ . Si mostri dunque che se  $L$  è regolare allora  $R_M$  raffina  $R_L$  per ogni DFA  $M$  t.c.  $L(M) = L$ .
3. A seguito della crisi greca la comunità europea ha deciso di abbassare il valore di  $\pi$  a  $\frac{22}{7}$ . Si studi pertanto il linguaggio

$$\Pi = \{ x.y \mid x \in \{0,1\}^*, y \in \{0,1\}^* \text{ t.c. } x.y \text{ è un prefisso (finito) dell'espansione binaria di } \frac{22}{7} \}$$

4. Considerando l'enumerazione delle MdT vista a lezione,  $5 \in K$ ?
5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(200) = 20 \} \\ B &= \{ x \in \mathbb{N} \mid E_x \supseteq \{0,1,2\} \} \\ C &= \{ \langle x,y,z \rangle \in \mathbb{N} \mid y \text{ è pari, } \varphi_z \text{ è totale e } W_x = \{\varphi_z(10)\} \} \end{aligned}$$

6. Si consideri il problema: Sono date  $n$  variabili  $X_1, \dots, X_n$  ciascuna delle quali può assumere dei valori nell'insieme  $\{0, \dots, 10\}$ . Sia dato inoltre un insieme  $\mathcal{C}$  di *vincoli* tra queste variabili ovvero formule del tipo  $\ell \text{ op } r$ , dove *op* può essere  $=, \neq, \leq, <, \geq, >$  mentre  $\ell$  e  $r$  sono variabili o somme di due o più variabili (eventualmente con ripetizioni). Ad esempio:

$$\mathcal{C} = \{ X_1 + X_1 + X_1 + X_2 \leq X_3 + X_4, X_1 \neq X_3 + X_5 \}$$

Si mostri che *stabilire se esiste* un assegnamento delle variabili con i valori ammessi (da 0 a 10) che soddisfa tutti i vincoli è un problema in NP.

Traccia di soluzione. 3) L'espansione di  $\pi$  dopo la svalutazione è  $11.\overline{001}$ . Scrivere un DFA che riconosce i prefissi è immediato. 4) La MdT numero "5" sull'input "5" legge  $\not b$ , si sposta a sx dove trova illimitati  $\not b$  e entra in loop. Dunque  $5 \in \bar{K}$ . 5)  $A$  e  $B$  sono r.e. completi.  $C$  è produttivo così come il suo complementare. Nella riduzione si suggerisce di prendere  $y = z = 0$ . Dunque  $\varphi_z$  calcola l'identità. Si lavora pertanto su  $W_x$ . 6) Usiamo la definizione di NP con "guess & verify". Dato uno dei  $11^n$  possibili guess, effettuare le somme e verificare i vincoli ha complessità polinomiale rispetto alle dimensioni del problema (in pratica, la lunghezza della descrizione di  $\mathcal{C}$ ).



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
11 SETTEMBRE 2015

1. Ammettendo come noto il Teorema di Myhill-Nerode, si dimostri l'esistenza e l'unicità dell'automa deterministico minimo. Qualora si usino dei concetti "particolari" (quali ad esempio  $R_L$ ), li si definisca.
2. Si dimostri che  $NP \subseteq EXPTIME$ .
3. Si studi, fissato  $i \geq 0$  il linguaggio:

$$A_i = \left\{ 0^i 1^j 0^{(i^2)} \mid j > 0 \right\}$$

Si studi dunque  $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ .

4. Si enumerino, con la tecnica vista a lezione, le macchine di Turing con due simboli ( $\emptyset$  e 0) e uno stato ( $q_0$ ). Che funzione calcola la macchina numero 3?
5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(2x + 5) = x \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ calcola la funzione "fattoriale"} \right\}$$

$$D = \left\{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ è pari e esiste } z > y \text{ t.c. } \varphi_z(x) = y \right\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
18 Dicembre 2015 — Appello straordinario

1. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si dimostri che ogni insieme produttivo ammette un sottoinsieme r.e. infinito.
2. Si dimostri con precisione che la funzione di Fibonacci è primitiva ricorsiva.
3. Si definisca la nozione di completezza per una classe di complessità computazionale; si definisca il problema 3SAT e, supponendo noti i risultati per SAT, si dimostri che 3SAT è NP-completo.
4. Si studi, fissato  $i \geq 0$  il linguaggio:

$$A_i = \left\{ x \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{Se letto come numero binario, } x = 2^i. \\ \text{(non ci sono 0 inutili davanti)} \end{array} \right\}$$

Si studi dunque  $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ .

5. Si studino i seguenti insiemi (ed i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_{\lceil \frac{x}{3} \rceil}(x^2 - 2x + 1) = x \right\} \\ C &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid E_x = W_x \right\} \\ D &= \left\{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ è pari e per ogni } z > 2y \text{ vale che } \varphi_z(x) = y \right\} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
28 Gennaio 2016

1. Si enunci e dimostri il pumping lemma per i linguaggi liberi dal contesto.
2. Dato un insieme  $A \neq \emptyset$ , si dimostri l'equivalenza tra le due proprietà:

(a)  $(\exists x)(A = W_x)$  e

(b) esiste  $f$  funzione ricorsiva totale tale che  $A = \text{range}(f)$

3. Si studino, per  $i \geq 0$  (fissati), i linguaggi

$$L_i = \{10^i 1\} \text{ e } R_i = L_i \circ L_{i-1} \circ \dots \circ L_0$$

Si studi dunque  $R = \bigcup_{i \geq 0} R_i$

4. Si definisca una macchina di Turing che calcola la funzione  $\pi_2^5$ .
5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} A &= \{ x \mid \varphi_x(2x + 3) = x! \} \\ B &= \{ \langle x, y \rangle \mid (\forall z < y)(\varphi_x(z) \uparrow) \} \\ C &= \{ \langle x, y \rangle \mid (\forall z < y)(\varphi_z(x) \uparrow) \} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
12 Febbraio 2016

1. Si dimostri che se  $\Pi$  è una proprietà estensionale ricorsiva allora  $\Pi = \emptyset$  oppure  $\Pi = \mathbb{N}$ .
2. Si definiscano le classi computazionali  $P$  ed  $NP$  (assumete di avere già la definizione di MdT deterministica e non deterministica e la nozione “*opera in tempo  $f(n)$* ”) e si dimostri dunque che  $P \subseteq NP$ .
3. Si dimostri, partendo dalle funzioni di base e usando le regole di composizione e ricorsione primitiva, che la funzione  $sum(x, y) = x + y$  è primitiva ricorsiva.
4. Si studi il seguente linguaggio

$$A = \left\{ x \in \{0, 1, 2\}^* \mid \begin{array}{l} x \text{ non inizia con } 0 \text{ e, se letto come numero in base } 3, \\ x \text{ rappresenta un numero pari} \end{array} \right\}$$

(es.  $112 = 9 + 3 + 2 = 14$  è ok,  $21 = 6 + 1 = 7$  no,  $02$  no — inizia con 0)

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ x \mid (\forall y < x) \varphi_x(x + y) = 3 \} \\ C &= \{ \langle x, y \rangle \mid \varphi_x(y) \uparrow \} \\ D &= \{ \langle x, y \rangle \mid (\forall z > y) (\varphi_x(z) \downarrow) \} \end{aligned}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 16 Giugno 2016

1. Sia  $\varphi$  ricorsiva (non necessariamente totale) tale che  $\text{range}(\varphi) \neq \emptyset$ . Si mostri che esiste  $f$  ricorsiva totale tale che  $\text{range}(\varphi) = \text{range}(f)$ .
2. Si definiscano le nozioni di grammatica monotona e di grammatica dipendente dal contesto. Si dimostri che gli insiemi di linguaggi generati dai due formalismi coincidono.
3. Si dimostri, partendo *dalle sole funzioni di base* e usando le regole di composizione e ricorsione primitiva, che la funzione pari definita come  $\text{pari}(x) = 1$  se  $x$  è pari,  $\text{pari}(x) = 0$  se  $x$  è dispari è primitiva ricorsiva.
4. Si studi il seguente linguaggio

$$A = \{ x \in \{0, 1\}^* \mid \text{Il numero di "0" in } x \text{ è uguale o doppio di quello degli "1" in } x \}$$

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ x \mid \varphi_x(0) = 100 \wedge \varphi_x(50) = 50 \wedge \varphi_x(100) = 0 \} \\ C &= \{ x \mid (\forall y \leq 100)(\varphi_x(y) \downarrow \wedge \varphi_x(y) \leq 100) \wedge (\forall y > 100)(\varphi_x(y) \downarrow \wedge \varphi_x(y) > 1000) \} \\ D &= \{ \langle x, y \rangle \mid (\forall z \leq y)(W_z \subset W_x) \} \end{aligned}$$

( $\subset$  denota l'inclusione stretta).

Traccia della soluzione. (1) e (2) stanno sulle dispense. Per (3), se definiamo:  $\text{pari}(0) = 0, \text{pari}(y + 1) = \overline{\text{sg}}(\text{pari}(y))$  basta definire  $\overline{\text{sg}}$  come visto a lezione (la soluzione con il modulo è molto più lunga).

(4)  $A$  non è regolare (semplice pumping lemma su  $0^n 1^n$  con  $i = 0$ . E' CF (si definiscano due grammatiche, una per stessi 0 e 1 e una per doppi 0 rispetto a 1, poi si unisca. Quella per stessi 0 e 1 è la seguente:  $S \rightarrow S0S1S \mid S1S0S \mid \varepsilon$ , l'altra ve la lascio).

(5)  $B$  e  $C$  sono estensionali (e dunque)?  $B$  è re completo. Per la completezza si usi, ad esempio,  $\psi(a, b) = 100 - b$  se  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti.

$C$  è produttivo così come il suo complementare. Per la produttività di  $C$  si usi, ad esempio,  $\psi(a, b) = 0$  se  $b \leq 100$ ;  $2000$  se  $b > 100$  e  $M_a(a)$  non termina in  $\leq b$  passi,  $0$  altrimenti.  $D$  è l'insieme vuoto: essendo  $W_0 = \mathbb{N}$  non può essere che con  $z = 0$   $W_z \subset W_x$ , e dunque ricorsivo.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 18 Luglio 2016

1. Si dimostri l'equivalenza tra i formalismi DFA e NFA.
2. Sia enunci e dimostri il primo teorema di ricorsione.
3. (a) Si studi l'insieme

$$A = \left\{ 0^{a_1} 1^{b_1} 0^{a_2} 1^{b_2} \dots 0^{a_n} 1^{b_n} \mid \begin{array}{l} n > 0, \\ (\forall i \in \{1, \dots, n\})(a_i > 0 \wedge b_i > 0 \wedge a_i \bmod 3 = b_i \bmod 2) \end{array} \right\}$$

- (b) Cosa succederebbe se aggiungessimo il vincolo  $a_1 < b_1$ ?
- (c) E se aggiungessimo invece i vincoli  $a_1 < b_1 < a_2$ ?

4. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ x \mid (\exists y > x^2)(\varphi_x(5y) = y^2) \} \\ C &= \{ x \mid (\forall y > x^2)(\varphi_x(5y) \downarrow \wedge \varphi_x(5y) \neq y^2) \} \\ D &= B \cup C \\ E &= B \cap C \end{aligned}$$

5. Si definisca con precisione la nozione di riduzione tra problemi in classi di *complessità computazionale* e si fornisca un esempio (dettagliato) di riduzione tra due problemi (diversi).

Traccia della soluzione.  $A$  è regolare. Si usino 4 stati per gli zeri iniziali (gli ultimi 3 formano un ciclo). Se arriva un uno quando sono entrati 3,6,9,12,... zeri si va in uno stato che aspetta un ulteriore uno (o 3,5,7,...) e cicla su questi ultimi due stati. Se arriva uno zero da quello stato si va allo stesso stato in cui si andava dallo stato iniziale con zero. Similmente se arriva un uno quando sono entrati 1,4,7,10,13... zeri. Se invece arriva un uno quando sono entrati 2,5,8,11,14... zeri si va in uno stato "pozzo". Con il vincolo (b) non è più regolare (semplice applicazione del PL), ma è CF. Con il vincolo (c) non è più CF.

$B$  è r.e. (dovetail) e completo (si definisca  $\psi(a, b) = (\frac{b}{5})^2$  se  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti).

$C$  e  $\bar{C}$  sono produttivi. Ad esempio, Per  $C$  si definisca  $1 + (\frac{b}{5})^2$  se  $M_a(a) \not\downarrow$  in  $\leq b$  passi,  $\psi(a, b) = \uparrow$  altrimenti. Per  $\bar{C}$  pensateci.

Si osservi che  $\bar{B} = \{ x \mid (\forall y > x^2)(\varphi_x(5y) \uparrow \vee (\varphi_x(5y) \downarrow \wedge \varphi_x(5y) \neq y^2)) \}$ . Pertanto,  $C \subseteq \bar{B}$  e dunque  $B \cap C = \emptyset$  (ricorsivo). Si noti che l'insieme  $\{ x \mid (\exists y > x^2)(\varphi_x(5y) \uparrow) \wedge (\forall y > x^2)(\varphi_x(5y) \downarrow \rightarrow \varphi_x(5y) \neq y^2) \}$  è il complementare di  $B \cup C$ . Pertanto?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
12 Settembre 2016

1. Si dimostri che il problema di stabilire se due NFA  $M_1$  e  $M_2$  accettano lo stesso linguaggio è decidibile.
2. Si definisca con precisione la nozione di insieme produttivo e si dimostri che un insieme produttivo contiene un sottoinsieme ricorsivamente enumerabile e infinito.
3. Si consideri il numero razionale  $\frac{43}{7}$ . Lo si scriva in base 2 e ci si concentri sulla sequenza (infinita) di bits  $\bar{b} = b_1 b_2 b_3 \dots$  dopo la virgola. Si definisca il DFA *minimo* per

$$A = \{ b_1 \dots b_n \mid n > 0, b_1 \dots b_n \text{ è un prefisso di } \bar{b} \}$$

4. Si dica se la seguente funzione è primitiva ricorsiva (e si spieghi perchè):

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0) = 7 \\ f(0, y + 1) = 3 + f(1, y) \\ f(x + 1, 0) = 5 + f(x, 1) \\ f(x + 1, y + 1) = 2 * f(x, y) \end{array} \right.$$

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{array}{l} A = \{ x \mid \varphi_x(x!) = x \} \\ B = \{ x \mid (\forall z > x)(\varphi_x(z) = z) \} \\ C = \{ x \mid (\forall z > x)(\varphi_z(x) = x) \} \end{array}$$

6. Si mostri che il problema di stabilire se due DFA  $M_1$  e  $M_2$  sono *isomorfi* appartiene alla classe NP.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
30 Gennaio 2017

1. Si dimostri che dato un linguaggio regolare esiste un un unico automa con minimo numero di stati che lo accetta, a meno di isomorfismo (assumete Myhill-Nerode per vero, non serve scrivere anche quella dimostrazione).
2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si dimostri che un insieme produttivo non può essere finito.
3. Si consideri l'insieme

$$A = \{ b_1 \cdots b_n \in \{0, 1\}^* \mid n > 0, b_1 \cdots b_n \text{ è palindroma} \}$$

Si dimostri che non è un linguaggio regolare e lo si collochi opportunamente nella gerarchia di Chomsky. In che classe di complessità collochereste  $A$  (spiegate)?

4. Considerando l'enumerazione delle MdT vista a lezione, si dica quanto vale  $\varphi_{10}(10)$  (10 è dieci, non due).
5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ \langle x, y \rangle \mid \varphi_x(y) = y \} \\ C &= \{ x \mid W_x \subseteq E_x \} \end{aligned}$$

6. Si consideri il seguente problema: sono date  $n$  variabili  $X_1, \dots, X_n$  ciascuna delle quali può assumere valori nell'insieme  $\{0, 1\}$ . Viene dato anche un insieme di disequazioni della forma  $a + b + c \geq 1$ , dove  $a, b, c$  sono o una variabile (per esempio  $X_i$ ) o una espressione aritmetica della forma 1 meno una variabile (per esempio  $(1 - X_i)$ ). Il problema è quello di stabilire se esiste un assegnamento di valori per le variabili che rende vere tutte le disequazioni.

Si dimostri che il problema è in NP.

Se vi avanza tempo, dimostrate pure che è NP-completo.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
15 Febbraio 2017

1. Si dimostri che se  $L$  è accettato da un NFA  $M$  allora esiste un DFA  $M'$  che lo accetta.
2. Si definisca la nozione di insieme produttivo e si *dimostri* che un insieme produttivo non può essere finito.
3. Si consideri l'insieme

$$A = \{ b_1 \dots b_n b_1 \dots b_n \in \{0,1\}^* \mid n > 0, b_1 \dots b_n \text{ è palindroma} \}$$

Si dica se è o meno libera dal contesto (dimostrandolo). In che classe di complessità computazionale collochereste  $A$  (spiegate)?

4. Considerando l'enumerazione delle MdT vista a lezione, si dica quanto vale  $\varphi_{12}(12)$ . Dunque  $12 \in K$ ?
5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ \langle x, y \rangle \mid \varphi_x(y) = 5y \} \\ C &= \{ x \mid E_x \cap W_x = \emptyset \} \end{aligned}$$

6. Si consideri il seguente problema: sono date  $n$  variabili  $X_1, \dots, X_n$  ciascuna delle quali può assumere valori nell'insieme  $\{0, 1\}$ . Viene dato anche un insieme di disequazioni della forma  $a + b + c \geq 1$ , dove  $a, b, c$  sono o una variabile (per esempio  $X_i$ ) o una espressione aritmetica della forma 1 meno una variabile (per esempio  $(1 - X_i)$ ). Il problema è quello di stabilire se esiste un assegnamento di valori per le variabili che rende vere tutte le disequazioni.

Si dimostri che il problema è in NP.

Se dimostri che è NP-completo.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 19 Giugno 2017

1. Si dimostri che se  $L$  è accettato da un NFA  $M$  allora esiste un DFA  $M'$  che lo accetta.
2. Si definisca (sempre con precisione) la nozione di funzione Turing calcolabile. Considerando l'enumerazione delle MdT vista a lezione (se ne volete usare un'altra, va bene, ma in caso spiegate quale), si individuino due valori in  $K$  e due in  $\bar{K}$ .
3. Si dimostri (con precisione) che  $P \subseteq NP$ .
4. Si consideri, fissato  $k \in \mathbb{N}$ , l'insieme

$$A_k = \{ 0^m 1^i 0^j 1^n \mid m > 0, n > 0, i > 0, j > 0, i + j \text{ è potenza di } 2, i + j \leq k \}$$

Si dica se è o meno regolare (si motivi la risposta). Nel caso lo sia, si scriva il DFA minimo che accetta  $A_k$ .

Si consideri ora  $A = \bigcup_{k \geq 0} A_k$ . Si dica se  $A$  è libero dal contesto (dimostrandolo).

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(2x) = x \} \\ C &= \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(0) \downarrow \wedge \varphi_x(1) \uparrow \} \\ D &= \{ \langle x, y \rangle \mid E_x = W_y \} \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni degli esercizi 4 e 5.

4) Fissato  $i$ ,  $A_i = 0^+ L 1^+$  dove  $L$  è finito e dunque regolare. Essendo l'unione di 3 regolari è regolare. Il DFA fatelo con calma.  $A$  non è CF. Dato  $n \in \mathbb{N}$  scegliete ad esempio  $z = 01^{2^n} 0^{2^n} 1$  e provate le varie partizioni.

5)  $B$  è creativo. Per la riduzione usate  $\psi(a, b) = \lfloor b/2 \rfloor$  se  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti.

$C$  è produttivo così come il suo complementare. Provate le due riduzioni:  $\psi(a, b) = 0$  se  $b = 0 \wedge a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti, e  $\psi(a, b) = 0$  se  $b = 0 \vee a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti.

$D$  è produttivo così come il suo complementare. Per le riduzioni, fissate  $y = 0$  (dunque  $E_y = \mathbb{N}$ ) e lavorate su  $x$ . Definite ad esempio:  $\psi(a, b) = b$  se  $a \in K$ ,  $\uparrow$  altrimenti, in un caso e  $\psi(a, b) = b$  se  $M_a(a) \not\downarrow$  in  $\leq b$  passi, 0 altrimenti, nell'altro caso.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 21 Luglio 2017

CAUSA LAUREE, l'orale sarà lunedì 24 alle ore 10.00 presso la sala riunioni DMIF.

1. Sia data  $G$  monotona. Si mostri che il test  $x \in L(G)$  è decidibile.
2. Si mostri (con dettaglio) che se  $A \neq \emptyset$ , le due affermazioni (1)  $(\exists x)(A = W_x)$  e (2) esiste  $f$  calcolabile e totale tale che  $A = \text{range}(f)$  sono equivalenti.
3. Si dica (con precisione) cosa significa essere NP completo. Si definisca il problema SAT e si mostri che  $\text{SAT} \in \text{NP}$ .
4. Si dica (motivando) se la seguente funzione è primitiva ricorsiva:

$$f(a, b) = \begin{cases} a + f(a - 1, b + 1) & \text{se } a > 0 \\ f(b, 0) & \text{se } a = 0 \wedge b > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \end{cases}$$

5. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \{ v \in \{0, 1\}^* \mid (\exists x)(\exists y)(v = xy \wedge |x| > 1 \wedge x \text{ è prefisso di } y) \}$$

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari)

$$\begin{aligned} B &= \{ x \in \mathbb{N} \mid (\forall y > x) (\varphi_y(x) \downarrow) \} \\ C &= \{ x \in \mathbb{N} \mid (\forall y > x) (\varphi_x(y) \uparrow \vee (\varphi_x(y) \downarrow \wedge \varphi_x(y) \neq 0)) \} \\ D &= \{ x \mid E_x \subseteq W_x \} \end{aligned}$$

Traccia delle soluzioni degli esercizi 4–6.

- 4) Si noti che  $f(1, 0) = 1 + f(0, 1) = 1 + f(1, 0)$ . Dunque è indefinita per la coppia  $(0, 1)$ . Non essendo totale non è primitiva ricorsiva.
- 5)  $A$  è di tipo 1. Non può essere CF (dato  $n$ , sia  $\alpha = 010011000111 \cdots 0^n 1^n$  e  $z = \alpha\alpha \in L$ . Si osserva che per ogni modo di partizzionarla con  $uvwxy$  e  $0 < |vx| \leq n$  sappiamo trovare un  $i$  per cui  $uv^iwx^iy \notin L$ . Fatevi un po' di casistiche. Per la grammatica di tipo 1, ragionate a partire da  $S \rightarrow BAEC, C \rightarrow 0C|1C|\epsilon, A \rightarrow 0ZA|1UA|\epsilon, Z0 \rightarrow 0Z, ZE \rightarrow E0, U0 \rightarrow 0U, UE \rightarrow E1, \dots$
6.  $B = \emptyset$  dunque ricorsivo.  $\bar{C} = \{ x \in \mathbb{N} \mid (\exists y > x) \varphi_x(y) = 0 \}$ , creativo (per la riduzione pensate semplicemente a  $\psi(a, b) = 0$  se  $a \in K, \uparrow$  altrimenti).  $D$  è produttivo così come il suo complementare.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
 Prova Scritta di *Fondamenti dell'Informatica (e annessi)*  
 12 SETTEMBRE 2017

1. Si definiscano e dimostrino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto.
2. Si enunci e dimostri il teorema di Rice. Quali sono le conseguenze pratiche?
3. Si illustri (mostrando le descrizioni istantanee) la computazione di  $M_1(1)$ . Si dica quale sia l'output fornito (se termina). Dunque  $1 \in K$ ?
4. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \{ 0^m 1^m 0^n 1^n \mid 2 \leq m \leq 5, 2 \leq n \}$$

(ovvero si dimostri se è, o meno, regolare e se è, o meno, libero dal contesto)

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari— $\subset$  denota l'inclusione stretta)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(0) \downarrow \wedge \varphi_x(10) \downarrow \wedge \varphi_x(100) \downarrow \wedge \varphi_x(0) = 2 \cdot \varphi_x(10) = 4 \cdot \varphi_x(100) \right\} \\ C &= \left\{ \langle x, y \rangle \mid \emptyset \subset W_x \subset W_y \subset \mathbb{N} \right\} \\ D &= \left\{ x \in \bar{K} \mid (\exists y \neq x) \varphi_x(y) \downarrow \right\} \end{aligned}$$

6. Si consideri il seguente problema INV: ad un pranzo ci sono  $k$  invitati, e ci sono  $h$  tavoli da 5 sedie l'uno. E' nota una relazione che ci dice che per diverse coppie  $\{i, j\}$  di invitati,  $i$  e  $j$  preferiscono non essere allo stesso tavolo (la relazione dunque è una tabella—o un grafo—dato in input). Esiste un modo per far accomodare gli invitati rispettando il vincolo suddetto?

Si mostri che il problema INV è in NP.

Traccia di soluzione: stando alla enumerazione delle dispense  $M_1$  nello stato  $q_0$  leggendo  $\neq$  si ferma.  $A$  non è regolare (come stringa per il pumping lemma, dato  $n$  sceglierei  $z = 00110^n 1^n$ ) ma è CF (ad esempio la grammatica  $S \rightarrow 00A1100B11, A \rightarrow \varepsilon \mid 01 \mid 0011 \mid 000111, B \rightarrow \varepsilon \mid 0B1$ ).  $B$  è r.e., per la completezza usate il "solito"  $\psi(a, b) = 0$  se  $a \in K, \uparrow$  altrimenti.  $C$  è produttivo così come il suo complementare. Fisserei  $y$  tale che  $W_y = \{0, 1\}$  e lavorerei su  $x$  nelle riduzioni da  $K$  e  $\bar{K}$ .  $D$  è produttivo così come il suo complementare (che è  $\{x \mid x \in K \vee (\forall y \neq x) \varphi_x(y) \uparrow\}$ ). Per le riduzioni avrete bisogno del secondo teorema di ricorsione.  $INV \in NP$  in quanto "indovinato" un assegnamento degli invitati ai tavoli, è immediato verificare (in tempo lineare sul numero degli invitati, ammettendo accesso in tempo costante alla tabella) se questo soddisfa o meno il vincolo.