

1. Si definiscano con precisione a) il concetto di grammatica CF, b) di linguaggio generato da una grammatica CF, e si mostri dunque che data una grammatica CF G e una stringa x , il problema $x \in L(G)$ è decidibile.
2. Si dimostri con precisione la seguente proposizione. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Allora vale che:

$$(\exists x \in \mathbb{N})(A = W_x) \leftrightarrow (\exists f \text{ ric. totale})(A = \text{range}(f))$$

3. Si collochi *con precisione*¹ il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \{10^a 10^b 10^{2a-b} 1 : a, b > 0\}$$

(se $2a - b < 0$ si prenda il valore 0)

4. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{aligned} C &= \{x : (\forall y \leq 100)(\varphi_x(y!) = y)\} \\ D &= \{\langle x, y \rangle : \{18\} = \{pair(a, b) : a \in W_x, b \in W_y\}\} \\ E &= \{x : (\exists y > x)(\varphi_y(y) = 18)\} \end{aligned}$$

5. Si definiscano le classi di complessità NP e PSPACE. Si dimostri che $NP \subseteq PSPACE$.

¹Nel senso che se è regolare lo si dimostri, se non lo è lo si dimostri, se è CF lo si dimostri, etc...

Traccia della soluzione. 1, 2, 5 sono direttamente dal libro.

3. Si veda $A = \{10^a 10^b 10^{2a-b} 1 : a, b > 0\}$ come unione di due insiemi quello in cui $2a \leq b$ e quello in cui $2a > b$: $A_1 = \{10^a 10^b 11 : 2a \leq b\}$ e $A_2 = \{10^a 10^b 10^{2a-b} 1 : 2a > b\}$. Sono entrambi CF e dunque anche la loro unione.

Per A_1 si prenda ad esempio $S \rightarrow 1X11, X \rightarrow 0X00, X \rightarrow Z, Z \rightarrow Z0, Z \rightarrow 1$. In pratica ci concentriamo su $2a = b$ e poi aggiungiamo eventuali altri zero nella parte contata da b

Per A_2 (ritulizzo per semplicità le stesse variabili ma si tratta di due grammatiche distinte). Iniziamo con $S \rightarrow 1X1$ e ci concentriamo su $\{0^a 10^b 10^c : c = 2a - b, 2a - b > 0\}$ che genereremo a partire da X seguendo due casi e inseriamo pertanto $X \rightarrow A \mid C$

- Supponiamo prima che $2a - b$ sia pari, dunque lo sarà anche b . Dunque $c = 2c'$ e $b = 2b'$. Pertanto $a = b' + c'$ e le stringhe hanno la forma $0^{b'+c'} 1 (00)^{b'} 1 (00)^{c'}$ ottenibili da una grammatica: $A \rightarrow 0A00 \mid B1, B \rightarrow 0B00 \mid 0100$ (“simile” a quella vista a lezione, mi sarebbe bastata questa allo scritto)
- Supponiamo ora che $2a - b$ sia dispari, dunque lo sarà anche b . Dunque $c = 2c' + 1$ e $b = 2b' - 1$. $2a - b = c$ implica che $2a - 2b' + 1 = 2c' + 1$ pertanto ancora $a = b' + c'$ ma nella generazione devo ricordarmi di chiudere in modo asimmetrico per ottenere un dispari. Una grammatica potrebbe essere (controllate) $C \rightarrow 0C00 \mid D10, D \rightarrow 0D00 \mid 010$

Per mostrare che A non è regolare, dato n , si prenda $z = 10^n 1010^{2n-1} 1$ e si pompi la prima stringa (due casi: comprendendo l'1 iniziale o no).

4. C è r.e. completo. Per la completezza sia f la funzione inversa del fattoriale ($f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(6) = 3, f(24) = 4, f(120) = 5$, etc) Si definisca $\psi(a, b) = f(b)$ se $a \in K$, indefinito else. Dunque ...

D viene definito in modo arzigogolato ma le uniche coppie che funzionano sono quelle in cui $W_x = \{2\}$ e $W_y = \{3\}$, entrambe proprietà complicate. Si definisca una MdT che termina solo su 3, sia $\bar{y}$ il suo indice. Si definisca dunque $\psi(a, b) = 0$ se $b = 2 \wedge a \in K$, indefinito else. Dunque ... $\langle g(a)\bar{y} \rangle$... Per l'altro verso, si definisca $\psi(a, b) = 0$ se $b = 2 \vee a \in K$, indefinito else. Dunque ...

$E = \mathbb{N}$ (perchè?) dunque ricorsivo.