ESAME 19 GIUGNO 2025

1. Si definisca a) il concetto di grammatica CF, b) di linguaggio CF, c) l'operazione di concatenazione tra linguaggi e d) si dimostri che i linguaggi CF sono chiusi per concatenazione.

2. Si dimostri (o si dimostri che non è vera) la seguente equivalenza tra espressioni regolari:

$$(r + s) \cdot t^* = r + r \cdot t + s \cdot t^*$$

3. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti insiemi A_i (con i fissato) ed A, entrambi sottoinsiemi di $\{0, 1\}^*$, siano (o meno) regolari o liberi dal contesto.

$$A_i = \left\{ x_1 \dots x_i : \begin{array}{l} x_1 \dots x_i \text{ è prefisso dell'espansione binaria} \\ \text{(bits dopo la virgola) di } \frac{5}{6} \end{array} \right\}$$

   $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$.

   Nel caso fossero regolari, si fornisca un DFA che accetta A_0 uno che accetta A_5 e uno che accetta A.

4. Si dimostri che $B = \{0^m 1^n 0^m 1^n : m > 0 \text{ e } n > 0\}$ non è CF

5. Si diano le definizioni di a) insieme ricorsivamente enumerabile (r.e.), b) di insieme produttivo, e c) si mostri, senza ricorrere ad altri risultati, che se A è produttivo, allora A non può essere r.e.

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \left\{ x : \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) = x! \right\} \\ D & = & \{\langle x, y, z \rangle : (W_x \cup W_y) = W_z\} \\ E & = & \{x : (\exists y > x)(\varphi_y(y) = 18)\} \end{array}$$

7. Sia $f(\cdot)$ una funzione calcolabile totale. Si mostri che esiste c per cui

$$NTIME(f(n)) \subseteq TIME(c^{f(n)})$$

Traccia della soluzione. 1, 5, 7 sono direttamente dal libro.
2. Si prenda ad esempio $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$. A sinistra cè la stringa 011, a destra no. 3. A_i ha un solo elemento dunque è sicuramente regolare. A

contiene le stringhe $1, 11, 110, 1(10)1, 1(10)(10), 1(10)(10)1, \ldots$
4. Dato n si prenda $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$. Per ogni modo di partizionarla ... Dunque per il PL non è CF
6. C è r.e. completo. E' r.e. in quanto .... Per la riduzione usate $(2b)!$ come output della funzione a due parametri quando $a \in K$. Applicate il Teorema s-m-n e ....
D produttivo così come il suo complementare. Fissate $z = 0$ e definite pure la stessa funzione del punto precedente che usate sia per x per y: $K \leq D$. Fissate ora $z = 6$, e usate ancora la stessa funzione.